

# 量子微腔中运动原子的辐射压力<sup>\*</sup>

丁彩英 谭磊<sup>†</sup> 刘利伟 徐岩

(兰州大学理论物理研究所, 兰州 730000)

(2007 年 11 月 30 日收到 2008 年 2 月 25 日收到修改稿)

利用全量子理论研究了量子微腔中运动原子的辐射压力. 从量子微腔与运动原子相互作用模型出发, 利用代数动力学方法对系统的哈密顿量进行规范变换, 推导出系统的时间演化算符和原子内态约化密度算符的表达式, 在此基础上给出辐射压力的解析解, 并讨论了驻波场和行波场中运动二能级原子和三能级原子的辐射压力, 数值结果与实验符合.

关键词: 量子微腔, 运动原子, 代数动力学, 辐射压力

PACC: 4250, 4250P, 3280, 3280P

## 1. 引 言

近二十年来, 单原子的激光冷却及其在科学技术中的应用研究是量子光学最为活跃的前沿领域之一. 人们就单原子激光冷却的基本原理与技术进行了大量的研究, 取得了一系列的重要进展, 已经建立了多普勒冷却、偏振梯度冷却、速度选择相干布居俘获、拉曼冷却等传统激光冷却机理<sup>[1]</sup>. 单原子的激光冷却与原子所处的环境密切相关, 原子-腔场组成的系统已成为探索许多量子物理问题的重要工具<sup>[2]</sup>. 光学微腔中原子系统冷却和俘获的研究是目前微腔量子电动力学工作的重点之一<sup>[3-8]</sup>. 实验结果表明: 对于蓝失谐的激光场, 运动原子在腔中的辐射压力比真空中的辐射压力大, 腔冷却机理延长了原子的储蓄时间(源于 Sisyphus 冷却), 而且冷却的速率至少是其他冷却的 5 倍以上<sup>[7]</sup>. 随后, 人们通过改变激光场、抽运场以及腔场的结构, 对腔冷却进行了大量的研究<sup>[8-11]</sup>, 众所周知原子系统的冷却和俘获取决于运动原子在腔场中所受的辐射压力, 因此对辐射压力的研究是个有意义的课题<sup>[12, 13]</sup>.

微腔中辐射压力的理论研究方法主要有密度矩阵法(density matrix method)<sup>[14]</sup>、修饰态方法(dressed-

state method)<sup>[3, 12, 15]</sup>、蒙特卡罗波函数法(Monte-Carlowave function method)<sup>[16]</sup>. 三种方法各有优缺点, 利用密度矩阵法可以给出辐射压力的清晰物理图像, 但对于受激辐射物理图像不清楚; 利用修饰态方法可以给出受激辐射的物理解释, 将该方法推广到多能级原子系统是很有趣的, 推广的主要困难在于系统的非线性导致很难找到一个合适的变换消除哈密顿量中复杂的相互作用耦合项; 而蒙特卡罗波函数法为更深入理解光与原子相互作用, 并为模拟计算提供方便, 其缺点在于不能给出完整的解析解. 随着冷却原子温度的降低, 原子的德布罗依波长要大于光波的波长, 为了能从量子层次上揭示腔场对原子行为的影响, 此时对系统的描述更为合理的是采用全量子结果. 因此寻找量子微腔中运动原子辐射压力的全量子结果有重要的实际价值.

基于此考虑, 本文利用代数动力学方法<sup>[17]</sup>在文献[18]的基础上用全量子理论研究量子微腔中运动原子的辐射压力, 得到运动二能级原子和运动三能级原子辐射压力的解析表达式.

## 2. 运动二能级原子的动力学

考虑二能级原子与单模量子化腔场的相互作用. 在偶极近似和旋波近似下, 系统的哈密顿量为

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10704031), 国家基础科学人才培养基金(批准号: J0630313), 兰州大学理论物理与数学纯基础科学基金(批准号: LZU05001)和甘肃自然科学基金(批准号: 3ZS061-A25-035)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: tanlei@lzu.edu.cn

$$H = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hbar\omega_0 S_z + \hbar\omega a^+ a + \hbar\tilde{\Omega}(R) (a^+ S_- e^{i\Phi(R)} + a S_+ e^{-i\Phi(R)}), \quad (1)$$

这里  $p_x^2/2m$  是原子质心运动的动能,  $\omega_0$  与  $\omega$  分别是原子与腔场的本征频率,  $S_z, S_-, S_+$  是二能级原子的自旋算符.  $a^+$  与  $a$  是单模腔场的产生和湮没算符,  $R$  是原子质心运动坐标,  $\tilde{\Omega}(R)$  是拉比频率, 其依赖于腔场的振幅和原子的偶极距,  $\Phi(R)$  是腔场的有效相位.

引入规范变换

$$U_g = \exp\left[\frac{\theta}{N^{1/2}}(a S_+ e^{-i\Phi(R)} - a^+ S_- e^{i\Phi(R)})\right] \quad (2)$$

其中  $\theta = -\arctan \frac{\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \hbar^2 \Omega^2 N} - \frac{\Delta}{2}}{\hbar \Omega N^{1/2}}$ ,  $\Delta = \frac{\hbar k P_g}{m} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar\omega_0 - \hbar\omega$  是原子与腔模的失谐量.  $N = a^+ a + S_z + \frac{1}{2}$  和  $P_g = p_x - \hbar k \left(S_z + \frac{1}{2}\right)$  是系统的两个守恒量.

根据  $SU(2)$  算子  $S_z, N^{-1/2} a S_+ e^{-i\Phi(R)}, N^{-1/2} a^+ S_- e^{i\Phi(R)}$  的对易关系, 对系统的哈密顿量进行规范变换, 则规范变换后系统的哈密顿量为<sup>[18]</sup>

$$H' = U_g^{-1} H U_g = E(N, P_g) + \lambda S_z, \quad (3)$$

其中  $\lambda = \sqrt{\Delta^2 + 4\hbar^2 \Omega^2 N}$ . 从(3)式看出系统的非线性哈密顿量通过规范变换线性化了.

为了计算辐射压力, 下面引入系统的时间演化算符

$$U(t) = e^{-iHt} = U_g e^{-iH't} U_g^{-1}, \quad (4)$$

这里设  $\hbar = 1$ , 其中

$$e^{-iH't} = e^{-iEt} \left( \cos \frac{\lambda t}{2} - i 2 S_z \sin \frac{\lambda t}{2} \right),$$

把(2)式引入的规范变换和线性化哈密顿量(3)式代入(4)式, 可得

$$U(t) = e^{-iEt} \left[ \cos \frac{\lambda t}{2} - i 2 \sin \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta J_0 + i \sin \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta (J_+ + J_-) \right], \quad (5)$$

这里  $J_+ = N^{-1/2} a S_+ e^{-i\Phi(R)}$ ,  $J_- = N^{-1/2} a^+ S_- e^{i\Phi(R)}$ .

系统  $t$  时刻的密度算符与初始时刻的密度算符有如下关系:

$$\rho(t) = U(t) \rho(0) U^\dagger(t). \quad (6)$$

假定  $t=0$  时刻原子的内态处于基态, 初始时刻系统的密度算符可分解成三部分:

$$\rho(0) = |\psi_f(0)\rangle \langle \psi_f(0)| \otimes |\psi_g(0)\rangle \langle \psi_g(0)| \otimes |1\rangle \langle 1|, \quad (7)$$

其中  $|\psi_f(0)\rangle = \sum_{n'} F_{n'} |n'\rangle$  表示腔场初始时刻的能量本征态,  $|\psi_g(0)\rangle = \int dp_x \alpha(p_x) |p_x\rangle$  是原子质心动量本征态.

原子内态约化密度算符为

$$\rho^A(t) = \int dp_x \sum_n |n\rangle \langle n| \rho(t) |n\rangle \langle n|. \quad (8)$$

把(5)(6)(7)式代入(8)式,  $\rho^A(t)$  的表达式为

$$\begin{aligned} \rho^A(t) = & \int dp_x \sum_n |\alpha(p_x)|^2 |F_n|^2 \\ & \times \left[ \left( \cos \frac{\lambda t}{2} + i \sin \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta \right) |1\rangle \langle 1| + i e^{-i\Phi(R)} \sin \frac{\lambda t}{2} \sin 2\theta |2\rangle \langle 2| \right] \\ & \times \left[ |1\rangle \langle 1| \left( \cos \frac{\lambda t}{2} - i \sin \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta \right) - 2 |e^{i\Phi(R)} \sin \frac{\lambda t}{2} \sin 2\theta\rangle \langle 2| \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

耦合系统中约化密度算符可以计算出小系统中任意物理量的平均值. 因此原子所受辐射压力平均值的表达式为

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(t) \rangle &= \langle F(t) \rangle = -\nabla H_{\text{int}} = -\text{Tr} \rho \nabla H_{\text{int}} \\ &= -\sum_{m=1}^2 m |\rho^A(t)\rangle \langle \nabla H_{\text{int}} | m \rangle, \quad (10) \end{aligned}$$

这里  $\nabla H_{\text{int}} = \tilde{\Omega}(J_+ + J_-) - i\tilde{\Omega}\Phi(R)(J_+ - J_-)$ ,  $\tilde{\Omega} = \frac{d\tilde{\Omega}}{dR}$ ,  $\Phi(R) = \frac{d\Phi}{dR}$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(t) \rangle = & \int dp_x \sum_n |\alpha(p_x)|^2 |F_n|^2 \\ & \times \left[ \frac{\left( \cos \frac{\lambda t}{2} \sin \frac{\lambda t}{2} \sin 2\theta + i \sin^2 \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta \sin 2\theta \right)}{\sqrt{n}} \right. \\ & \times \alpha(i\tilde{\Omega} + \Phi(R)\tilde{\Omega}) \\ & \left. - \frac{\left( \cos \frac{\lambda t}{2} \sin \frac{\lambda t}{2} \sin 2\theta - i \sin^2 \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta \sin 2\theta \right)}{\sqrt{n}} \right. \\ & \left. \times a^+(i\tilde{\Omega} - \Phi(R)\tilde{\Omega}) \right], \quad (11) \end{aligned}$$

$\tilde{\Omega} = \hbar\Omega N^{-1/2}$ .  $|m\rangle$  是原子的内态矢,  $n$  是腔场的光子数.

如果把腔场作为经典场处理<sup>[12]</sup>,  $a^+ \rightarrow \alpha^* e^{i\omega t}$ ,  $a \rightarrow \alpha e^{-i\omega t}$  且  $\alpha^* = \alpha$  是其振幅. 则辐射压力可以写为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(t) &= \int dp_x \sum_n |\alpha_{p_x}|^2 |F_n|^2 \\
 &\times \left[ \left( \cos \frac{\lambda t}{2} \sin \frac{\lambda t}{2} \sin 2\theta + i \sin^2 \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta \sin 2\theta \right) \right. \\
 &\times e^{-i\omega t} (i \tilde{\Omega} + \Phi(R) \tilde{\Omega}) \\
 &- \left( \cos \frac{\lambda t}{2} \sin \frac{\lambda t}{2} \sin 2\theta - i \sin^2 \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta \sin 2\theta \right) \\
 &\left. \times e^{i\omega t} (i \tilde{\Omega} - \Phi(R) \tilde{\Omega}) \right]. \quad (12)
 \end{aligned}$$

从(12)式可以看出单模腔场施加于原子上的辐射压力与腔场的频率、失谐参数、耦合常数、拉比频率以及相位等有关。

对于行波场,  $\Omega(R) = \text{const}$ ,  $\Phi(R) = -k \cdot R$ . 可知

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(t) &= F(t) \\
 &= - \int dp_x \sum_n |\alpha_{p_x}|^2 |F_n|^2 \\
 &\times \left[ \left( \cos \frac{\lambda t}{2} + i \sin \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta \right) e^{-i\omega t} \right. \\
 &+ \left. \left( \cos \frac{\lambda t}{2} - i \sin \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta \right) e^{i\omega t} \right] \\
 &\times k \sin \frac{\lambda t}{2} \sin 2\theta \tilde{\Omega}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

对于驻波场,  $\Omega(R) = \Omega_0 \cos(k \cdot R)$ ,  $\Phi(R) = 0$ .

同样得到

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(t) &= F(t) \\
 &= -i\Omega_0 k \int dp_x \sum_n |\alpha_{p_x}|^2 |F_n|^2 \\
 &\times \left[ \left( \cos \frac{\lambda t}{2} + i \sin \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta \right) e^{-i\omega t} \right. \\
 &- \left. \left( \cos \frac{\lambda t}{2} - i \sin \frac{\lambda t}{2} \cos 2\theta \right) e^{i\omega t} \right] \sin(k \cdot R), \quad (14)
 \end{aligned}$$

这里  $k = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ ,  $\lambda_c$  是微腔的尺寸. 分析可知在驻波场中辐射压力与腔的尺寸、腔模的频率、原子的位置、相互作用时间、偶和强度、失谐参数有关.

### 3. 级联型运动三能级原子与双模量子化腔场构成的系统

级联型运动三能级原子与双模量子化腔场相互作用系统,如图1所示.

利用偶极近似和旋波近似,系统的哈密顿量为

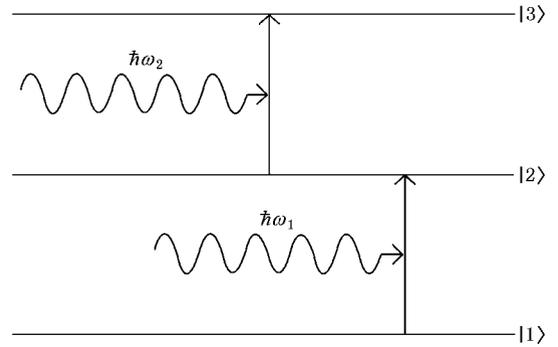


图1 级联型运动三能级原子与双模量子化腔场的相互作用

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{p^2}{2m} + \sum_{i=1}^3 E_i \sigma_{ii} + \hbar\omega_1 a_1^+ a_1 + \hbar\omega_2 a_2^+ a_2 \\
 &+ \hbar g_1 (\sigma_{21} a_1 e^{-i\Phi_1(R)} + \text{h.c.}) \\
 &+ \hbar g_2 (\sigma_{23} a_2 e^{-i\Phi_2(R)} + \text{h.c.}), \quad (15)
 \end{aligned}$$

这里  $p$  是三能级原子的动量. 原子的三个能级为  $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$  相应的能量为  $E_i (i=1, 2, 3)$ .  $\omega_1, \omega_2$  是双模量子化腔场的本征频率.  $a_1^+, a_1, a_2^+, a_2$  是双模腔场的产生湮没算符.  $R$  是原子的位置,  $g_1$  与  $g_2$  是三能级原子与双模腔场的耦合强度, 其取决于双模量子化腔场的振幅和原子的偶极距.  $\Phi_1(R), \Phi_2(R)$  是双模腔场的相位.

引入规范变换矩阵

$$U_g = \exp[\alpha (A_{13}^r - A_{31}^r)] \exp[\beta (A_{23}^r - A_{32}^r)] \quad (16)$$

在这里  $\alpha = \arctan \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\sqrt{\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2}}{\Delta}$ .  $\Delta$  是双模量子化腔场与三能级原子的失谐参量, 其与反冲动量、原子的质心运动速度及其腔场与原子本征跃迁频率的差值有关.  $\tilde{g}_1 = \hbar \sqrt{N_1} g_1$ ,  $\tilde{g}_2 = \hbar \sqrt{N_2} g_2$ .  $N_1, N_2$  是双模腔场的激发数算子,  $SU(3)$  的生成元为  $A_{12}^r = N_1^{-1/2} \sigma_{12} a_1^+ e^{i\Phi_1(R)}$ ,  $A_{23}^r = N_2^{-1/2} \sigma_{23} \times a_2^+ e^{i\Phi_2(R)}$ ,  $A_{13}^r = N_1^{-1/2} N_2^{-1/2} \sigma_{13} a_1^+ a_2^+ e^{i[\Phi_1(R) + \Phi_2(R)]}$ .

利用  $SU(3)$  算子的对易关系, 对(15)式进行如下的变换:

$$H' = U_g^{-1} H U_g. \quad (17)$$

令

$$\begin{aligned}
 \lambda_{2,3} &= \lambda_{2,3}(N_1, N_2, P_i) \\
 &= \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2},
 \end{aligned}$$

其中  $P_i = p + \hbar k_1 \sigma_{11} - \hbar k_2 \sigma_{33}$  是原子与腔场系统的动量守恒量. 则变换后的哈密顿量为<sup>[18]</sup>

$$H' = E_0 + \Delta A_{11}^r + \lambda_2 A_{22}^r + \lambda_3 A_{33}^r, \quad (18)$$

系统哈密顿量线性化了.

引入时间演化算符

$$\begin{aligned} U(t) &= e^{-iHt/\hbar} \\ &= U_g e^{-iHt/\hbar} U_g^{-1} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 U_{ij}(N_1, N_2, P_i) A_{ij}^r, \quad (19) \end{aligned}$$

经计算得到

$$\begin{aligned} &U_{11}(N_1, N_2, P_i) \\ &= e^{-iE_0 t/\hbar} (\cos^2 \alpha e^{-i\Delta t/\hbar} + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta e^{-i\lambda_2 t/\hbar} \\ &\quad + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta e^{-i\lambda_3 t/\hbar}), \\ &U_{22}(N_1, N_2, P_i) \\ &= e^{-iE_0 t/\hbar} (\cos^2 \beta e^{-i\lambda_2 t/\hbar} + \sin^2 \beta e^{-i\lambda_3 t/\hbar}), \\ &U_{33}(N_1, N_2, P_i) \\ &= e^{-iE_0 t/\hbar} (\sin^2 \alpha e^{-i\Delta t/\hbar} + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta e^{-i\lambda_2 t/\hbar} \\ &\quad + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta e^{-i\lambda_3 t/\hbar}), \\ &U_{12}(N_1, N_2, P_i) \\ &= e^{-iE_0 t/\hbar} \sin \alpha \sin \beta \cos \beta (e^{-i\lambda_3 t/\hbar} - e^{-i\lambda_2 t/\hbar}), \\ &U_{23}(N_1, N_2, P_i) \\ &= e^{-iE_0 t/\hbar} \cos \alpha \sin \beta \cos \beta (e^{-i\lambda_3 t/\hbar} - e^{-i\lambda_2 t/\hbar}), \\ &U_{13}(N_1, N_2, P_i) \\ &= e^{-iE_0 t/\hbar} \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad \times (\sin^2 \beta e^{-i\lambda_2 t/\hbar} + \cos^2 \beta e^{-i\lambda_3 t/\hbar} - e^{-i\Delta t/\hbar}), \\ &U_{ij}(N_1, N_2, P_i) \\ &= U_{ji}(N_1, N_2, P_i), (i, j = 1, 2, 3). \quad (20) \end{aligned}$$

假设初始时刻原子内态处于基态,则系统的密度算符由三部分构成,

$\rho(0) = |\Psi_r(0)\rangle \langle \Psi_r(0)| \otimes |\Psi_k(0)\rangle \langle \Psi_k(0)| \otimes |1\rangle \langle 1|$ , 其中  $|\Psi_r(0)\rangle = \sum_{n'_1, n'_2} F_{n'_1, n'_2} |n'_1, n'_2\rangle$  是双模腔场的能量本征态,  $|\Psi_{p'_x}(0)\rangle = \int dp'_x C(p'_x) |p'_x\rangle$  是原子质心动量本征态.

$t$  时刻系统的密度算符为

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t), \quad (21)$$

那么根据(21)式,可知系统中原子的内态约化密度算符为

$$\begin{aligned} \rho^A(t) &= \int dp_x \sum_{n_1, n_2} |\alpha(p_x)|^2 |F_{n_1, n_2}|^2 \\ &\quad \times [ |U_{11}|^2 |1\rangle \langle 1| + |U_{11} U_{21}^+ e^{i\Phi_1(R)}| |1\rangle \langle 2| \\ &\quad + |U_{11} U_{31}^+ e^{i\Phi_1(R)+\Phi_2(R)}| |1\rangle \langle 3| \\ &\quad + |U_{21} U_{11}^+ e^{-i\Phi_1(R)}| |2\rangle \langle 1| + |U_{21}|^2 |2\rangle \langle 2| \\ &\quad + |U_{21} U_{31}^+ e^{i\Phi_2(R)}| |2\rangle \langle 3| \\ &\quad + |U_{31} U_{11}^+ e^{-i\Phi_1(R)+\Phi_2(R)}| |3\rangle \langle 1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ |U_{31} U_{21}^+ e^{-i\Phi_2(R)}| |3\rangle \langle 2| \\ &+ |U_{31}|^2 |3\rangle \langle 3| ]. \quad (22) \end{aligned}$$

原子所受辐射压力的期望值为

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(t) \rangle &= \langle F(t) \rangle = \langle \nabla H_{\text{int}} \rangle = -\text{Tr}(\rho \nabla H_{\text{int}}) \\ &= - \int dp_x \sum_{n_1, n_2} |\alpha(p_x)|^2 |F_{n_1, n_2}|^2 \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{U_{11} U_{21}^+}{\sqrt{n_1}} a_1 + \frac{U_{21} U_{11}^+}{\sqrt{n_1}} a_1^\dagger \right) \dot{g}_1 \right. \\ &\quad - i \left( \frac{U_{11} U_{21}^+}{\sqrt{n_1}} a_1 - \frac{U_{21} U_{11}^+}{\sqrt{n_1}} a_1^\dagger \right) \tilde{g}_1 \Phi_1(R) \\ &\quad + \left( \frac{U_{21} U_{31}^+}{\sqrt{n_2}} a_2 + \frac{U_{31} U_{21}^+}{\sqrt{n_2}} a_2^\dagger \right) \dot{g}_2 \\ &\quad \left. - i \left( \frac{U_{21} U_{31}^+}{\sqrt{n_2}} a_2 - \frac{U_{31} U_{21}^+}{\sqrt{n_2}} a_2^\dagger \right) \tilde{g}_2 \Phi_2(R) \right] \quad (23) \end{aligned}$$

其中  $n_1, n_2$  是双模腔场的光子数.

对辐射压力中的量子化腔场做经典处理<sup>[12]</sup>,即  $a_1 \rightarrow \alpha_1 e^{-i\omega_1 t}$ ,  $a_2 \rightarrow \alpha_2 e^{-i\omega_2 t}$ ,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  是双模的振幅且  $\alpha_1^* = \alpha_1$ ,  $\alpha_2^* = \alpha_2$ . 可得

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(t) \rangle &= - \int dp_x \sum_{n_1, n_2} |\alpha(p_x)|^2 |F_{n_1, n_2}|^2 \\ &\quad \times [ (U_{11} U_{21}^+ e^{-i\omega_1 t} + U_{21} U_{11}^+ e^{i\omega_1 t}) \dot{g}_1 \\ &\quad - i \Phi_1(R) (U_{11} U_{21}^+ e^{-i\omega_1 t} - U_{21} U_{11}^+ e^{i\omega_1 t}) \tilde{g}_1 \\ &\quad + (U_{21} U_{31}^+ e^{-i\omega_2 t} + U_{31} U_{21}^+ e^{i\omega_2 t}) \dot{g}_2 \\ &\quad - i \Phi_2(R) (U_{21} U_{31}^+ e^{-i\omega_2 t} - U_{31} U_{21}^+ e^{i\omega_2 t}) \tilde{g}_2 ], \quad (24) \end{aligned}$$

这即为运动三能级原子在腔场所受平均辐射压力的解析解. 从(24)式可以看出原子所受的辐射压力与双模的频率、相互作用时间、耦合强度、相位等有关.

行波场中,耦合强度是常数,相位为  $\Phi_1(R) = -k_1 \cdot R$ ,  $\Phi_2(R) = -k_2 \cdot R$ . 由此辐射压力为

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(t) \rangle &= \langle F(t) \rangle = i \int dp_x \sum_{n_1, n_2} |\alpha(p_x)|^2 |F_{n_1, n_2}|^2 \\ &\quad \times [ k_1 (U_{11} U_{21}^+ e^{-i\omega_1 t} - U_{21} U_{11}^+ e^{i\omega_1 t}) \tilde{g}_1 \\ &\quad + k_2 (U_{21} U_{31}^+ e^{-i\omega_2 t} - U_{31} U_{21}^+ e^{i\omega_2 t}) \tilde{g}_2 ]. \quad (25) \end{aligned}$$

驻波场中,  $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_{10} \cos(k_1 \cdot R)$ ,  $\tilde{g}_2 = \tilde{g}_{20} \cos(k_2 \cdot R)$ .  $\Phi_1(R) = 0$ ,  $\Phi_2(R) = 0$ . 可知

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(t) \rangle &= \langle F(t) \rangle = - \int dp_x \sum_{n_1, n_2} |\alpha(p_x)|^2 |F_{n_1, n_2}|^2 \\ &\quad \times [ (U_{11} U_{21}^+ e^{-i\omega_1 t} + U_{21} U_{11}^+ e^{i\omega_1 t}) \dot{g}_1 \\ &\quad + (U_{21} U_{31}^+ e^{-i\omega_2 t} + U_{31} U_{21}^+ e^{i\omega_2 t}) \dot{g}_2 ]. \quad (26) \end{aligned}$$

为了便于数值分析,这里假设原子的运动是一维的,且耦合强度是相同.辐射压力的系数  $-\int dp_x \times \sum_{n_1, n_2} |\alpha_{p_x}|^2 |F_{n_1, n_2}|^2$  归一化为 1,因此  $k_2 = -k_1 = ke_x$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\tilde{g}_i = \tilde{g}_{10} \cos(kx)$ ,  $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_{20} \cos(kx)$ ,  $\tilde{g}_{10} = \tilde{g}_{20} = \hbar g_0$ .驻波场中的辐射压力可以写为

$$f = g_0 \hbar k \sin kx [ (U_{11} U_{21}^+ + U_{21} U_{31}^+) e^{-i\omega t} + (U_{21} U_{11}^+ + U_{31} U_{21}^+) e^{i\omega t} ], \quad (27)$$

这里  $\Delta = \hbar^2 k^2 / 2m + \hbar P \cdot k / m + \hbar \omega_1 + (E_1 - E_2)$ ,  $\lambda_2 - \lambda_3 = 2\lambda_1$ ,  $\alpha, \beta$  化简为  $\arctan 1$  和  $\frac{1}{2} \arctan \times$

$\frac{2\sqrt{2}g_0 \hbar \cos^2 kx}{\Delta}$ , 因此  $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos 2\beta =$

$\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + 8\hbar^2 g_0^2 \cos^2 kx}}$ ,  $\sin 2\beta = \frac{2\sqrt{2}g_0 \hbar \cos kx}{\sqrt{\Delta^2 + 8\hbar^2 g_0^2 \cos^2 kx}}$ , 代

入(27)式得到

$$f = \frac{g_0^2 \hbar^2 k \sin 2kx}{\sqrt{\Delta^2 + 8g_0^2 \hbar^2 \cos^2 kx}} \times \left[ \sin\left(\frac{\lambda_3 t}{\hbar}\right) \sin \omega t - \sin\left(\frac{\lambda_2 t}{\hbar}\right) \sin \omega t + \frac{2\Delta \sin^2\left(\frac{\lambda_1 t}{\hbar}\right)}{\sqrt{\Delta^2 + 8g_0^2 \hbar^2 \cos^2 kx}} \cos \omega t \right]. \quad (28)$$

从上式中看出原子的受力方向由波矢的方向决定,而辐射压力的大小与耦合系数、失谐、原子坐标等系统的参量有关,显然改变这些参量可以改变辐射压力的大小,下面将通过图示法分析辐射压力与参量的关系(为了与实验结果进行对比,我们采用文献[7]的数据,其中辐射压力用二能级原子在真空中所受的最大辐射压力约化,微腔的尺寸选择在几十个微米到一百个微米的数量级,为了讨论问题简单起见,我们考虑一维情况且腔场频率与原子跃迁近共振的情况).

根据耦合常数的定义,可以从两个方面讨论:其一从腔场与原子相互作用的半经典理论看其与辐射场的强度成正比(审稿意见中提到了光场的强度,要讨论辐射压力与光场强度的关系,可以将腔场看作经典光场,此时耦合常数与腔场成正比);其二从腔场与原子相互作用的全量子理论的角度看其与量子化微腔的尺寸成反比;因此通过研究辐射压力与耦合常数的关系,可以得出辐射压力与腔场强度和微腔尺寸的关系.图2显示了辐射压力与不同耦合常数的依赖关系.

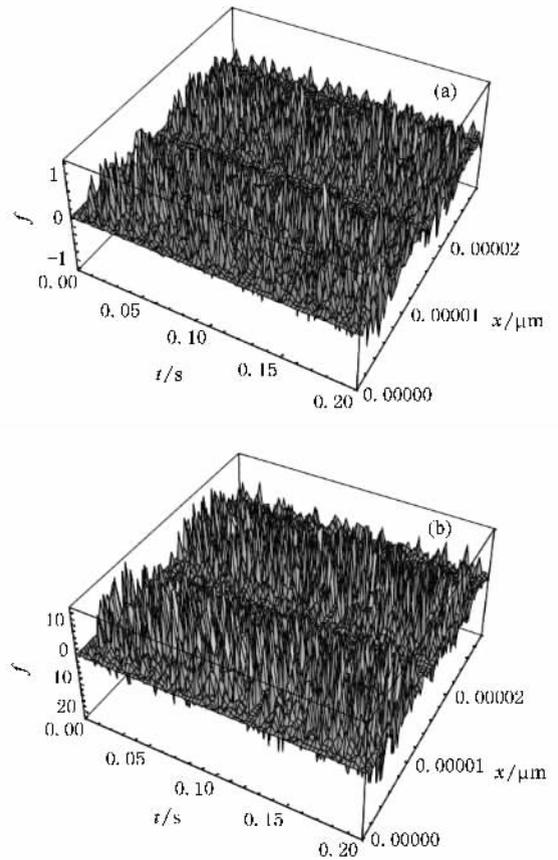


图2 原子的辐射压力随原子坐标和时间的变化关系(参数失谐为  $\Delta = 2\pi \times 2\text{MHz}$ , 耦合常数取不同值:  $g_0 = 2\pi \times 2\text{MHz}$ (a);  $g_0 = 2\pi \times 32\text{MHz}$ (b))

从图 2(a)和图 2(b)可以看出,随着耦合常数的增大,辐射压力也增大.图2可以反映出随着光场强度的增大,辐射压力增大;对于驻波场情况,辐射压力与光场的强度成正比,这里的结果符合理论和实验的结果[7];其次通过图1也可以反映出辐射压力随着腔场尺寸的增大而减小,文献[7]的实验数据及理论研究表明量子微腔中原子所受的辐射压力比真空中原子的辐射压力大,图1也反映出这一事实,体现了腔场与原子的作用进入强耦合时,用单光子就可以完全改变原子的状态.为了更清楚地看清以上的分析,我们选取不同的时间做了二维图形(图3),显然,随着耦合参数的增大,辐射压力增大.

根据文章中失谐的定义,其与反冲动量、运动原子的质心运动速度、腔场频率与原子跃迁本征频率的差值有关,因此通过研究辐射压力与失谐的关系,可以得出辐射压力与反冲动量、运动原子的质心运动速度、腔场频率与原子跃迁本征频率的差值

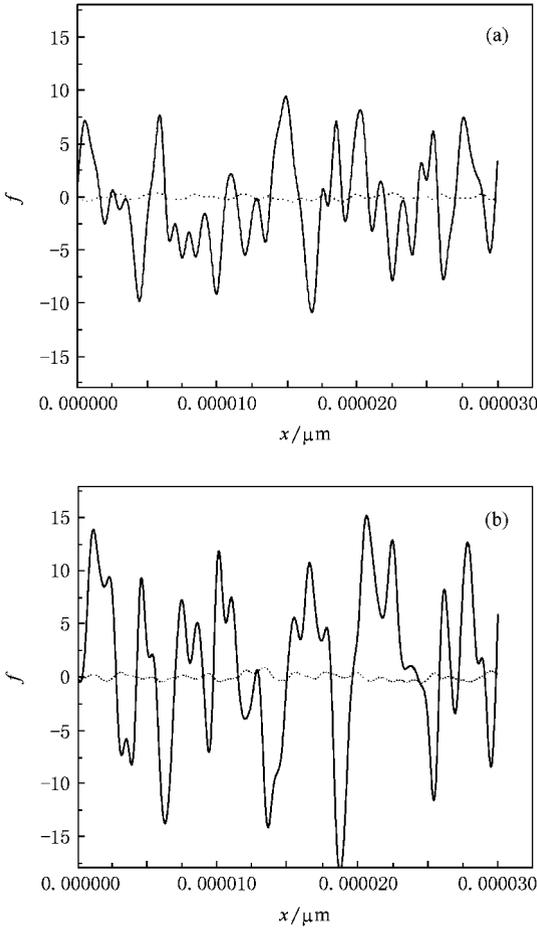


图3 原子的辐射压力随原子坐标的变化关系(参数失谐为  $\Delta = 2\pi \times 2\text{MHz}$ , 耦合常数取不同值:  $g_0 = 2\pi \times 2\text{MHz}$ (虚线);  $g_0 = 2\pi \times 32\text{MHz}$ (实线)).(a)  $t = 0.05\text{ s}$  (b)  $t = 0.15\text{ s}$ )

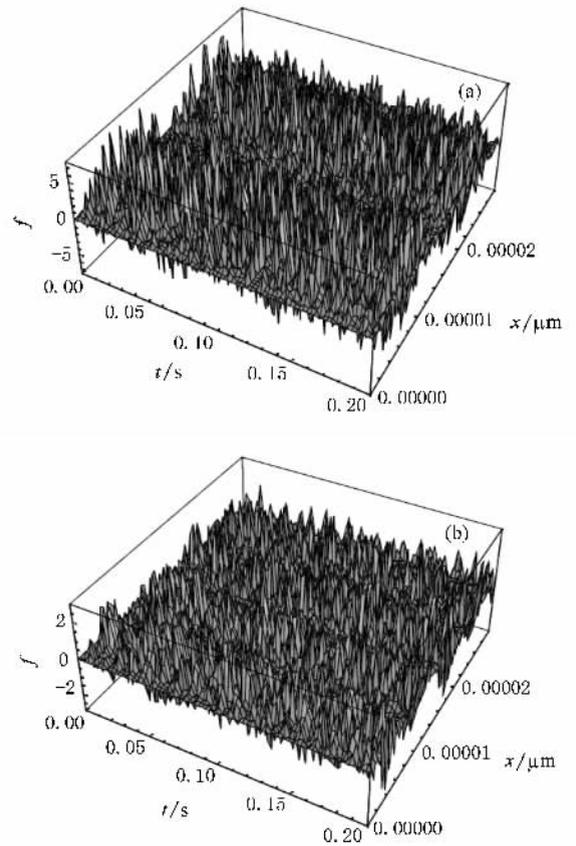


图4 原子的辐射压力随原子坐标和时间的变化关系(耦合常数为  $g_0 = 2\pi \times 16\text{MHz}$ , 选取不同的失谐:  $\Delta = 2\pi \times 2\text{MHz}$ (a);  $\Delta = 2\pi \times 128\text{MHz}$ (b))

的关系. 图4显示了辐射压力随失谐的变化关系.

从图4(a)和图4(b)可以看出,随着失谐的增大,辐射压力减小.在腔场与原子近共振的情况下,

可以通过失谐讨论辐射压力与原子速度的关系,失谐越大意味着原子的运动速度越快,随着原子运动速度的增大,原子与腔场的耦合强度减弱,导致辐射压力减小.为了更清楚地看清以上的分析,我们选取不同的时间做了二维图形(图5),显然,随着失谐的

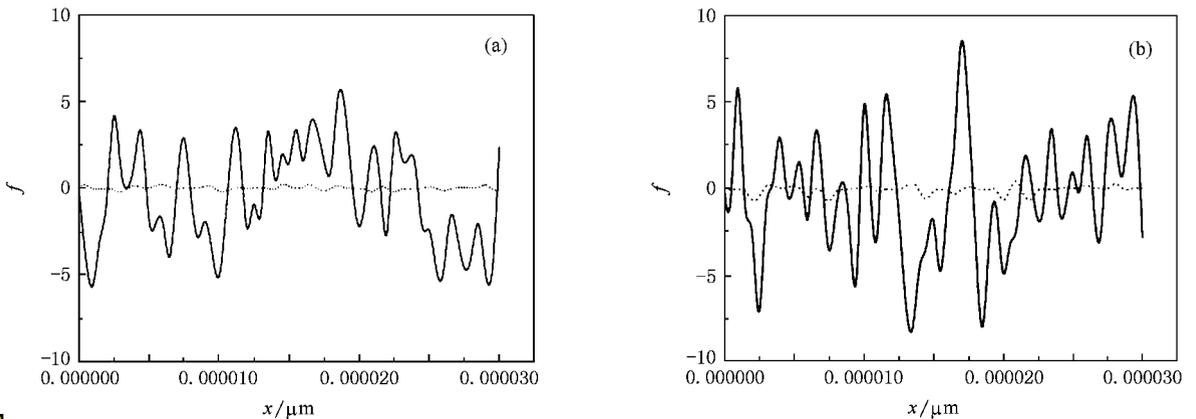


图5 原子的辐射压力随原子坐标的变化关系(耦合常数为  $g_0 = 2\pi \times 16\text{MHz}$ , 选取不同的失谐:  $\Delta = 2\pi \times 2\text{MHz}$ (实线);  $\Delta = 2\pi \times 128\text{MHz}$ (虚线)).(a)  $t = 0.05\text{ s}$  (b)  $t = 0.15\text{ s}$ )



增大,辐射压力减小.

从上面的图形中可以看出原子所受的辐射压力与耦合强度、腔的尺寸、失谐参量、原子的坐标等参量有关.

## 4. 结 论

本文中利用运动二能级原子、运动级联型三能级原子分别与单模量子化微腔场和双模量子化微腔

场相互作用模型,从全量子理论出发,运用代数动力学方法,把非线性系统规范变换为线性系统.通过线性化哈密顿量推导出时间演化算符的表达式,根据时间演化算符得到原子密度算符,进而直接计算出原子所受辐射压力的平均值.最后讨论了在驻波场和行波场中辐射压力的解析解.并且讨论了驻波场中耦合强度、腔的尺寸、失谐参量、腔模的本征频率、原子的坐标、相互作用时间对辐射压力的影响,数值结果与实验符合.

- [ 1 ] Wang Y Z , Xu Z 2005 *Progress in Physics* **25** 345 ( in Chinese ) [ 王育竹、徐震 2005 物理学进展 **25** 345 ]
- [ 2 ] Cheng G P , Ke S S , Zhang L H , Li G X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 830 ( in Chinese ) [ 程桂平、柯莎莎、张立辉、李高翔 2007 物理学报 **56** 830 ]
- Liu X J , Zhou B J , Liu M W , Li S C 2007 *Chin. Phys.* **16** 3685
- [ 3 ] Sun C P , Zhao S R 1996 *Science in China ( Series A )* **26** 921 ( in Chinese ) [ 孙昌璞、赵树人 1996 中国科学( A 辑 ) **26** 921 ]
- Zhang L , Wang C , Sun C P , Li Y M 1999 *Chin. J. Lasers* **26** 529 ( in Chinese ) [ 张力、王成、孙昌璞、李延敏 1999 中国激光 **26** 529 ]
- [ 4 ] Liu T , Zhang T C , Wang J M , Peng K C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1346 ( in Chinese ) [ 刘涛、张天才、王军民、彭耀 2004 物理学报 **53** 1346 ]
- Liu T , Geng T , Yan S B , Li G , Zhang J , Wang J M , Peng K C , Zhang T C 2006 *Science in China ( Series G )* **36** 248
- [ 5 ] Lu J F , Yin J P 2006 *Progress in Physics* **26** 22 ( in Chinese ) [ 陆俊发、印建平 2006 物理学进展 **26** 22 ]
- [ 6 ] Horak P , Hechenblaikner G , Gheri K M , Stecher H , Ritsch H 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4974
- Vladan V , Steven C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 3787
- [ 7 ] Maunz P , Puppe T , Schuster I , Syassen N , Pinkse P W H , Rempe G 2004 *Nature* **428** 50
- [ 8 ] Nußmann S , Murr K , Hijlkema M , Weber B , Kuhn A , Rempe G 2005 *Nature Physics* **1** 122
- [ 9 ] Murr K , Nußmann S , Puppe T , Hijlkema M , Weber B , Webster S C , Kuhn A , Rempe G 2006 *Phys. Rev. A* **73** 063415
- [ 10 ] Fortier K M , Kim S Y , Gibbons M J , Ahmadi P , Chapman M S 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 233601
- [ 11 ] Puppe T , Schuster I , Grothe A , Kubanek A , Murr K , Pinkse P W H , Rempe G 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 013002
- Morigi G , Pinkse P W H , Kowalewski M , Riedle R D V 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 073001
- [ 12 ] Panat P V , Lawande S V 2000 *Phys. Rev. A* **61** 063406
- [ 13 ] Salzburger T , Domokos P , Ritsch H 2005 *Phys. Rev. A* **72** 033805
- [ 14 ] Tan L , Zhong C K , Zhang C L , Zhang Q 2006 *Chin. J. Phys.* **44** 214
- [ 15 ] Yatsenko L , Metcalf H 2004 *Phys. Rev. A* **70** 063402
- [ 16 ] Dalibard J , Castin Y , Molmer K 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 580
- Vukics A , Janszky J , Domokos P 2005 *J. Phys. B* **38** 1453
- [ 17 ] Wang S J 1999 *Progress in Physics* **19** 331 ( in Chinese ) [ 王顺金 1999 物理学进展 **19** 331 ]
- [ 18 ] Cen L X , Wang S J 2000 *J. Phys. A* **33** 3697

# Light forces on moving atom in micro-cavity<sup>\*</sup>

Ding Cai-Ying Tan Lei<sup>†</sup> Liu Li-Wei Xu Yan

( *Institute of Theoretical Physics , Lanzhou University , Lanzhou 730000 , China* )

( Received 30 November 2007 ; revised manuscript received 25 February 2008 )

## Abstract

Optical forces on moving atom were investigated in micro-cavity using fully quantum theory. In terms of the models of moving atom interacting with micro-cavity field , using algebraic dynamics method , the Hamiltonian can be diagonalized by introducing a canonical transformation. The expression of evolution operator of the system and reduced density operators are calculated straightforwardly. Analytical expressions for the forces are obtained , and the forces are discussed for a traveling-wave field and a standing-wave field respectively.

**Keywords** : micro-cavity , moving atom , algebraic dynamics , optical forces

**PACC** : 4250 , 4250P , 3280 , 3280P

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Nature Science Foundation of China ( Grant No. 10704031 ) , the National Science Foundation for Fostering Talents in Basic Research of the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. J0630313 ) , the Foundation Research for Physics and Mathematics of Lanzhou University of China ( Grant No. LZU05001 ) and the Natural Science Foundation of Gansu Province of China ( Grant No. 3ZS061-A25-035 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : tanlei@lzu.edu.cn