

分数阶混沌系统的异结构同步*

张若洵^{1)†} 杨世平¹⁾

1) (河北师范大学物理科学与信息工程学院, 石家庄 050016)

2) (邢台学院初等教育学院, 邢台 054001)

(2008 年 3 月 3 日收到, 2008 年 5 月 10 日收到修改稿)

基于分数阶线性系统稳定性理论, 结合反馈控制和主动控制方法, 提出了一种分数阶混沌系统异结构同步方法, 给出了同步控制器解析式. 以分数阶 Chen 混沌系统和分数阶 Liu 混沌系统、分数阶新超混沌系统和分数阶超混沌 Rössler 系统的异结构同步为例, 进行了数值模拟, 证实了该方法的有效性和可行性.

关键词: 分数阶混沌, 异结构混沌同步, 新超混沌系统, 超混沌 Rössler 系统

PACC: 0545

1. 引 言

近年来, 分数阶混沌系统及其应用引起人们广泛兴趣和深入的研究, 整数阶微积分是分数阶微积分理论的特例, 整数阶混沌系统都是对实际混沌系统的理想化处理^[1]. 分数阶微积分是整数阶微积分理论的推广, 利用分数阶微积分算子能更准确地描述实际混沌系统的动力学特性. 特别是在最近, 在 Lorenz 混沌系统、Chua's 混沌系统、Chen 混沌系统、Liu 混沌系统、Li 混沌系统、新超混沌系统以及 Rössler 超混沌系统中, 通过计算机数值模拟, 发现当系统的阶数为分数时仍然出现混沌状态^[2-8], 且更能反映系统呈现的工程物理现象^[9-11], 这促进了人们利用分数阶微积分理论更深入地研究混沌这一自然界普遍存在的物理现象.

由于混沌系统对初值的敏感性和长时间的不可预测性, 控制混沌成了混沌应用的关键环节. 自 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步的原理^[12], 并在电路中得以实现以来, 混沌同步的研究得到了蓬勃发展, 人们提出了多种混沌控制和同步方法, 如驱动-响应混沌同步方法、线性和非线性反馈同步方法、耦合同步方法、自适应同步方法、驱动参量同步方法^[13-16]等. 这些同步方法大多适用于整数阶混沌系统之间的同步, 分数阶混沌系统的异结构同

步^[17]较少. 本文通过非线性反馈控制, 使得非线性的混沌同步误差系统变成线性系统, 根据分数阶线性系统稳定性原理, 设计了同步控制器, 实现了分数阶混沌系统之间的异结构同步. 理论分析、数值模拟证实了该方法的有效性.

2. 分数阶混沌系统异结构同步理论分析

在分数阶微积分的研究过程中, 对分数阶导数的概念有多种定义, 本文采用 Caputo 微分定义^[18]来研究分数阶混沌动力学行为, Caputo 微分定义为

$$D_*^\alpha y(x) = J^{m-\alpha} y^{(m)}(x), \alpha > 0, \quad (1)$$

这里 $m = [\alpha]$, 为第一个不小于 α 的整数, $y^{(m)}$ 为 y 的 m 阶导数, J^β 是 β 阶 Riemann-Liouville 积分算子, 即

$$J^\beta z(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} z(t) dt, \beta > 0, \quad (2)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数. D_*^α 通常称为 α 阶 Caputo 微分算子.

2.1. 系统数学模型与问题描述

考虑由下面数学模型描述的分数阶混沌系统

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax + f(x), \quad (3)$$

这里 $d^\alpha/dt^\alpha = D_*^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, A 是关于系统参数的 n

* 河北省自然科学基金(批准号: A2006000128)资助的课题.

† E-mail: xtzhrx@126.com

$n \times n$ 矩阵 $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ 为系统(1)的状态向量, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ 为系统非线性项 $n \times 1$ 矩阵. 将系统(3)看作驱动系统, 响应系统为

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = By + g(y) + u, \quad (4)$$

这里 $0 < \alpha < 1$, B 是关于系统参数的 $n \times n$ 矩阵, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$ 为系统(4)的状态向量, $g(y) = (g_1(y), g_2(y), \dots, g_n(y))^T$ 为系统非线性项 $n \times 1$ 矩阵, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ 为控制器.

设响应系统(4)与驱动系统(3)之间的状态误差为 $e = y - x$, 误差向量 $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$, 我们的目标就是选取合适的控制器 u , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$.

2.2. 分数阶混沌系统异结构同步控制器设计

引理 1^[19] 对于分数阶线性系统

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Cx,$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, C 为 $n \times n$ 阶常数矩阵, 若矩阵 C 的特征值 λ_i 满足 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, 则分数阶系统(3)的零点是渐近稳定的, 即有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$.

定理 1 若选取控制器

$$u = Ax - Bx + f(x) - g(y) - Ke, \quad (5)$$

K 为 $n \times n$ 常实数矩阵, 且 K 可使矩阵 $(B - K)$ 的特征值 λ_i 满足 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, 则系统(3)和(4)渐近同步.

证明 由(4)式减去(3)式, 并将(6)式代入, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha e}{dt^\alpha} &= \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} \\ &= By + g(y) + Ax - Bx + f(x) \\ &\quad - g(y) - Ke - Ax - f(x) \\ &= Be - Ke = (B - K)e. \end{aligned}$$

由引理 1 知, 当矩阵 $(B - K)$ 的特征值 λ_i 满足 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ 时, 则分数阶系统(5)的零点是渐近稳定的, 即有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$.

备注 1 几乎所有分数阶连续混沌系统都能写成(3)式或(4)式的形式, 所以该方法具有一定的通用性. 该方法通过非线性反馈使得非线性的混沌同步误差系统转变成线性系统, 我们称这种方法为反

馈线性化 (linearization by feedback) 同步方法.

备注 2 该方法也可用于分数阶混沌系统的自同步, 此时 $B = A$, $g = f$, 控制器(5)简化为

$$u = f(x) - f(y) - Ke. \quad (5')$$

3. 分数阶混沌系统异结构同步数值模拟

3.1. 分数阶 Chen 系统^[4]和分数阶 Liu 系统^[5]的异结构同步

驱动系统为分数阶 Chen 系统

$$\frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = 35(x_2 - x_1),$$

$$\frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} = -7x_1 - x_1x_3 + 28x_2,$$

$$\frac{d^\alpha x_3}{dt^2} = x_1x_2 - 3x_3. \quad (6)$$

响应系统为受控的 Liu 系统

$$\frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} = 10(y_2 - y_1) + u_1,$$

$$\frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} = 40y_1 - y_1y_3 + u_2,$$

$$\frac{d^\alpha y_3}{dt^2} = 4y_1^2 - 2.5y_3 + u_3. \quad (7)$$

把驱动系统(6)写成(3)的形式, 有

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax + f(x), \quad (8)$$

这里 $A = \begin{pmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $f(x) =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

将响应系统(7)写成(4)式的形式, 有

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = By + g(y) + u, \quad (9)$$

这里 $B = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $g(y) =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ 4y_1^2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

根据定理 1, 选取控制器 u 为

$$u = Ax - Bx + f(x) - g(y) - Ke$$

$$= \begin{pmatrix} -25 & 25 & 0 \\ -47 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ 4y_1^2 \end{pmatrix} - Ke, \quad (10)$$

其中 $e = y - x = (e_1, e_2, e_3)^T$. (9) 式减去 (8) 式, 并把 (10) 式代入得误差系统为

$$\frac{d^\alpha e}{dt^\alpha} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix} e - Ke, \quad (11)$$

选取 $K = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则误差系统 (11) 变为

$$\frac{d^\alpha e}{dt^\alpha} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix} e = Ce. \quad (12)$$

通过计算得到, C 的三个特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ 均为负实数, 即 $|\arg(\lambda_i)| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ 根据引理 1, 误差系统 (12) 的零点是渐进稳定的, 即有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ 因此实现了分数阶 Chen 系统和分数阶 Liu 系统的异结构同步.

采用预估-校正解法^[20]进行数值模拟, $\alpha = 0.9$, 时间步长为 0.01, 状态初始值 $x_1(0) = 2, x_2(0) = 1, x_3(0) = 3; y_1(0) = -10, y_2(0) = -3, y_3(0) = 10$. 图 1(a) 是分数阶 Chen 系统吸引子, (b) 是分数阶 Liu 系统吸引子; 图 2(a)~(d) 是系统 (6) 和 (7) 同步历程图与误差系统演化曲线, 可见, 系统 (6) 和 (7) 渐进同步.

3.2. 分数阶新超混沌系统^[7]和分数阶 Rössler 超混沌系统^[8]同步

刘崇新最近发现了一个超混沌系统

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} &= -10x_1 + x_2 x_3 + x_3, \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} &= 2.5x_2 - x_1 x_3, \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} &= x_1 x_2 - 4x_3 - 2x_4, \\ \frac{d^\alpha x_4}{dt^\alpha} &= -0.25x_1, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $0 < \alpha \leq 1, x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 为状态向量, 系统具有分数阶混沌的最低阶是 0.4 阶.

以系统 (13) 为驱动系统, 响应系统为受控的分数阶 Rössler 超混沌系统

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} &= -y_2 - y_3 + u_1, \\ \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} &= y_1 + 0.32y_2 + y_4 + u_2, \\ \frac{d^\alpha y_3}{dt^\alpha} &= 3 + y_1 y_3 + u_3, \\ \frac{d^\alpha y_4}{dt^\alpha} &= -0.5y_3 + 0.05y_4 + u_4. \end{aligned} \quad (14)$$

把驱动系统 (13) 写成 (3) 的形式, 有

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax + f(x), \quad (15)$$

这里 $A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$

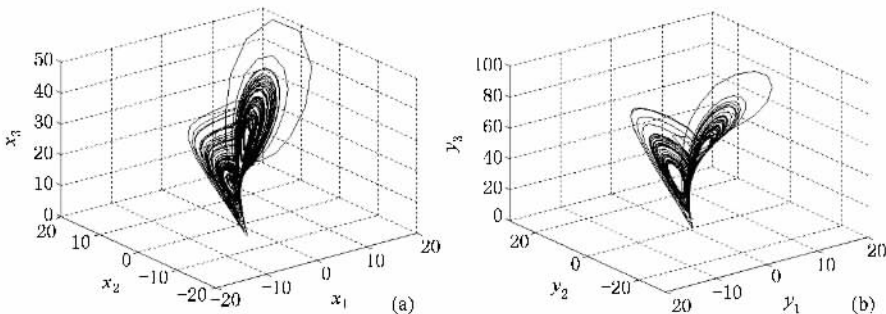


图 1 分数阶混沌系统吸引子 (a) 分数阶 Chen 系统吸引子 (b) 分数阶 Liu 系统吸引子

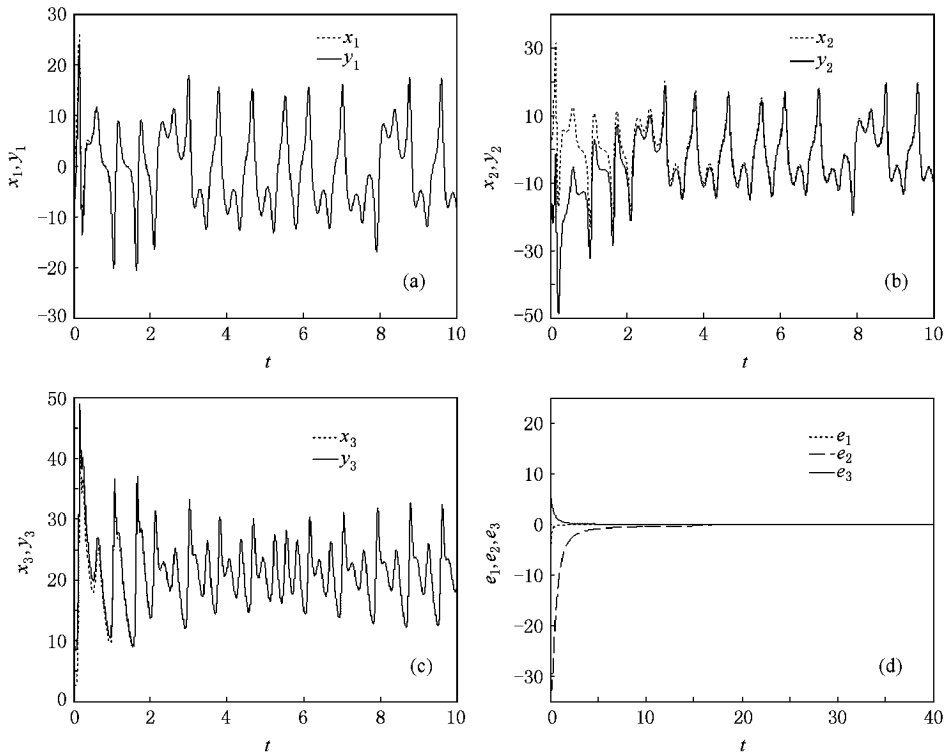


图2 系统(6)和(7)同步历程与误差系统演化曲线 (a)–(c)同步历程 (d)误差系统演化曲线

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

将响应系统(14)写成(4)式的形式,有

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = By + g(y) + u, \quad (16)$$

$$\text{这里 } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0.32 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.05 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

$$g(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 + y_1 y_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

根据定理1,选取控制器 u 为

$$\begin{aligned} u &= Ax - Bx + f(x) - g(y) - Ke \\ &= \begin{pmatrix} -10 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2.18 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ -0.25 & 0 & 0.5 & -0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 + y_1 y_3 \\ 0 \end{pmatrix} - Ke, \quad (17)$$

其中 $e = y - x = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$. (16)式减去(15)式,并把(17)式代入得误差系统为

$$\frac{d^\alpha e}{dt^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0.32 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.05 \end{pmatrix} e - Ke, \quad (18)$$

$$\text{选取 } K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1.05 \end{pmatrix}, \text{则误差系统}$$

变为

$$\frac{d^\alpha e}{dt^\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} e = Ce. \quad (19)$$

通过计算得到, C 的四个特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的实部均为负实数,即 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{2} > \frac{\alpha\pi}{2}$,根据引理

1, 误差系统 (19) 的零点是渐进稳定的, 即有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$ 或 $\lim_{t \rightarrow \infty} (y - x) = 0$, 因此实现了分数阶新超混沌系统和分数阶 Rössler 超混沌系统的异结构同步.

采用 预 估-校 正 解 法 (predictor-corrector algorithm)^[20] 进行数值模拟, $\alpha = 0.95$, 时间步长为 0.01, 状态初始值 $x_1(0) = 2, x_2(0) = 1, x_3(0) = 1,$

$x_4(0) = 1; y_1(0) = -10, y_2(0) = 10, y_3(0) = 8, y_4(0) = -1.$ 图 3 (a) (b) 是分数阶新超混沌系统吸引子, 图 4 (a) (b) 是分数阶 Rössler 超混沌系统吸引子^[8], 图 3 (a) — (d) 是系统 (13) 和 (14) 同步历程图, (e) 是误差系统 (19) 演化曲线, 可见, 系统 (13) 和 (14) 渐进同步.

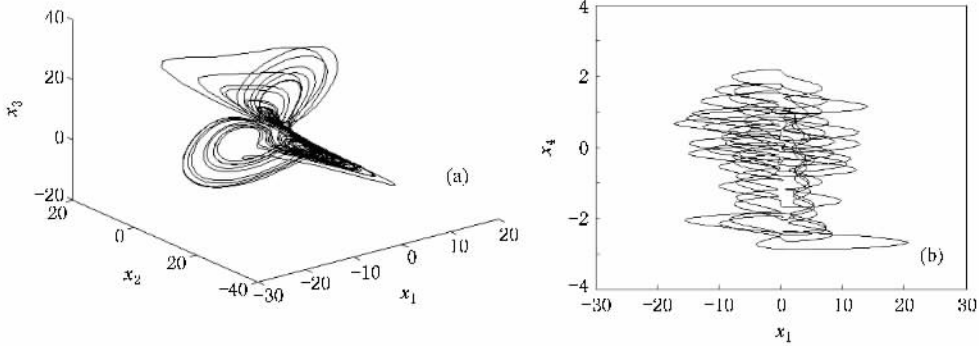


图 3 分数阶新超混沌系统吸引子 ($\alpha = 0.95$)

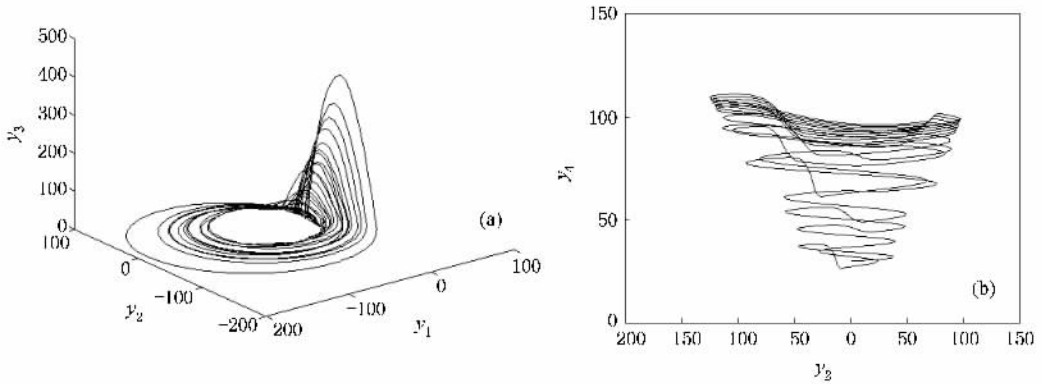


图 4 分数阶 Rössler 超混沌系统吸引子 ($\alpha = 0.95$)

4. 结 论

基于分数阶线性系统稳定性理论, 结合反馈控制和主动控制方法, 提出了一种分数阶混沌系统异结构同步方法, 给出了同步控制器解析式. 所提出的方法具有通用性, 通过非线性反馈使得非线性的

混沌同步误差系统转变成线性系统, 简化了混沌同步问题的研究, 我们称这种方法为反馈线性化 (linearization by feedback) 同步方法. 理论上证明了所设计控制器的正确性, 通过分数阶 Chen 系统和分数阶 Liu 系统、分数阶新超混沌系统和分数阶 Rössler 超混沌系统的数值模拟, 进一步说明了所提出方法的可行性和有效性.

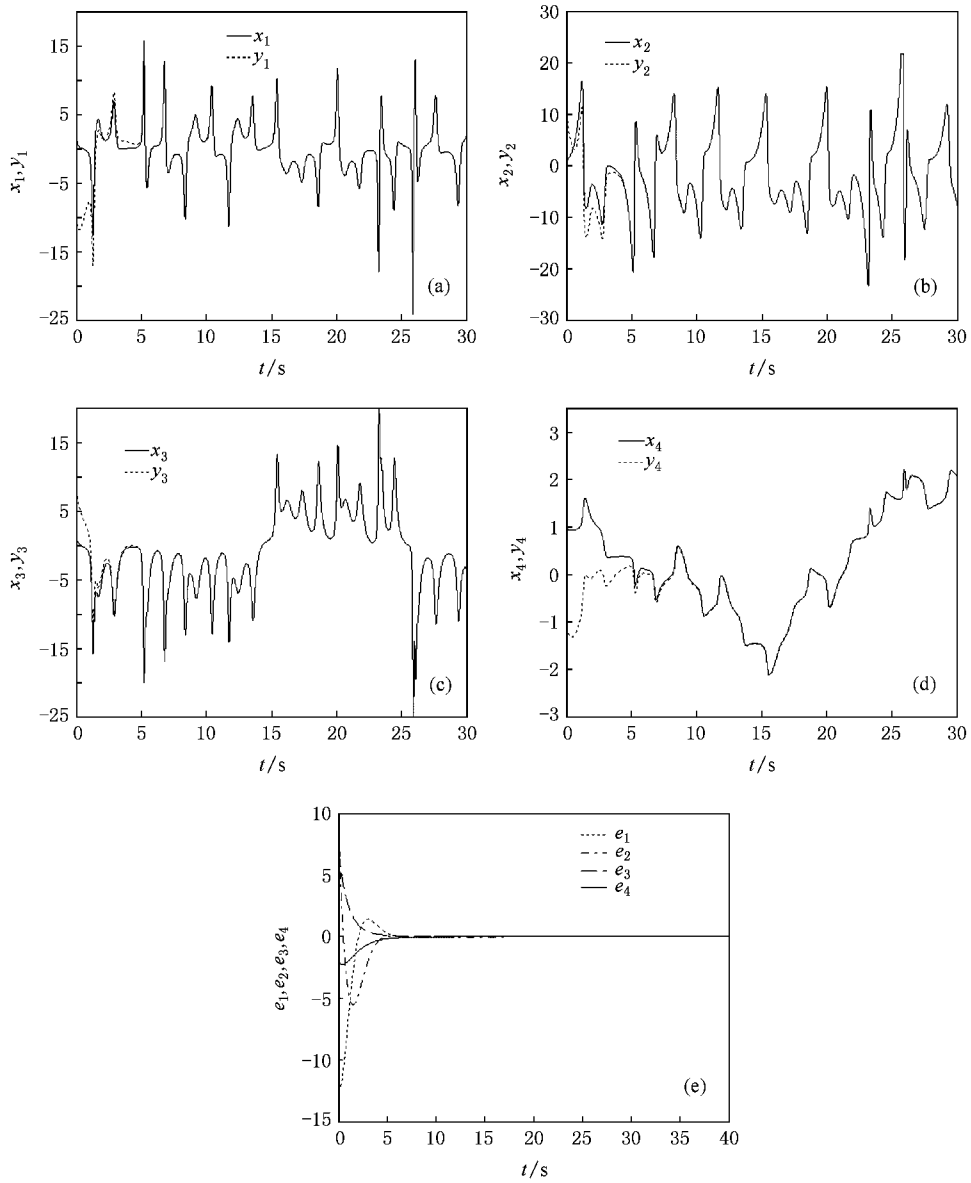


图5 系统(13)和(14)同步历程与误差系统演化曲线 (a)–(d)同步历程;(e)误差系统演化曲线

- [1] Liu C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 (in Chinese) [刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198]
- [2] Grigorenko I, Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101
- [3] Hartley T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans Circuits Syst. I* **42** 485
- [4] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 443
- [5] Lu J J, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 1586
- [6] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [7] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865]
- [8] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [9] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 549
- [10] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
- [11] Wang F Q, Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 963
- [12] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [13] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese) [陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
- [14] Zhang R X, Tian G, Li P, Yang S P, 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2073 (in Chinese) [张若洵、田刚、栗苹、杨世平 2008 物理学报 **57** 2073]
- [15] Zhang P W, Tang G N, Luo X S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3497

- (in Chinese) [张平伟、唐国宁、罗晓曙 2005 物理学报 **54** 3497]
- [16] Yang S P , Niu H Y , Tian G , Yuan G Y , Zhang S 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 619 (in Chinese) [杨世平、牛海燕、田刚、袁国勇、张闪 2001 物理学报 **50** 619]
- [17] Zhang C F , Gao J F , Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 (in Chinese) [张成芬、高金峰、徐磊 2007 物理学报 **56** 5124]
- [18] Caputo M 1967 *The Geophys. J. Roy Astronom. Soc.* **13** 529
- [19] Matignon D 1996 *In : IMACS , IEEE-SMC , Lille , France* 963
- [20] Diethelm K , Ford N J , Freed A D 2002 *Nonlinear Dynamics* **29** 3

Synchronization of fractional-order chaotic systems with different structures ^{*}

Zhang Ruo-Xun^{1)†} Yang Shi-Ping¹⁾

1) (College of Physics Science and Information Engineering , Hebei Normal University , Shijiazhuang 050016 , China)

2) (College of Elementary Education , Xingtai University , Xingtai 054001 , China)

(Received 3 March 2008 ; revised manuscript received 10 May 2008)

Abstract

Based on stability theory of fractional-order linear systems , a novel method combining feedback control and active control is proposed for the synchronization between two different fractional-order chaotic systems . The controller is obtained , and the method can be applied to solve synchronization problems of several classes of fractional-order chaotic systems , e. g. , Lorenz system , Rössler system , Chen system , Liu system , Lü system , Rössler hyperchaotic system and the new hyperchaotic system . Numerical simulation results are presented to demonstrate the effectiveness and feasibility of the proposed method .

Keywords : fractional-order chaotic system , chaos synchronization with different structures , new hyperchaotic system , Rössler hyperchaotic system

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province , China (Grant No. A2006000128) .

[†] Email : xtzhxr@126.com