

时域小波 Galerkin 法在有耗地面与任意目标复合散射中的应用^{*}

代少玉[†] 吴振森

(西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

(2007 年 5 月 23 日收到 2008 年 8 月 1 日收到修改稿)

采用时域小波 Galerkin(WGTD)方法计算了有耗地面与三维目标的复合散射,其中连接边界采用三波法.得到近场数据后,为避免复杂的 Sommerfeld 积分用互易原理简化了外推过程.计算了地面目标的雷达散射截面,验证了 WGTD 方法的精度和有效性.与时域有限差分方法相比, WGTD 方法具有色散线性好、节省内存、计算速度快等优点.

关键词: 时域小波 Galerkin 法, 复合散射, 有耗半空间

PACC: 4110H, 5225P, 6114D

1. 引言

在计算电磁学领域,时域有限差分(FDTD)方法是简单而有效的数值方法之一,已被广泛应用于电磁散射与传播、天线分析设计等方面^[1-3].为克服数值色散的影响,FDTD 的空间步长必须足够小,但这又占用较多的内存和 CPU 时间.1999 年,日本学者 Namiki^[4]首先将 20 世纪 50 年代成熟的交替隐式差分格式应用到 FDTD 技术中,提出了交替隐式时域差分(ADI-FDTD)算法,并证明了该算法在时间上的无条件稳定性.汤炜等^[5]将其应用到目标散射中,数值结果表明,其计算效率明显优于传统 FDTD 方法.由于 ADI-FDTD 方法是采用分裂场的形式迭代,内存开销更大,因此适用于微带等电小尺寸精细结构的计算.近年来,应用小波函数分析电磁波传播特性的数值分析方法引起了许多学者的兴趣,其中时域多分辨率分析(multiresolution time domain)方法能很好地模拟实际结果^[6,7],但 Battle-Lemarie 尺度函数是非紧支撑的,计算迭代时需要考虑许多项,尤其是处理连接边界和吸收边界时相当复杂.紧支撑的小波函数可以减少项数^[8,9],文献[10-12]提出了具有二阶消失矩的 Daubechies 尺度函数 D_2 (图 1)的时域小波 Galerkin(wavelet-Galerkin time domain,简记为 WGTD)

算法,计算了波导的电磁问题.

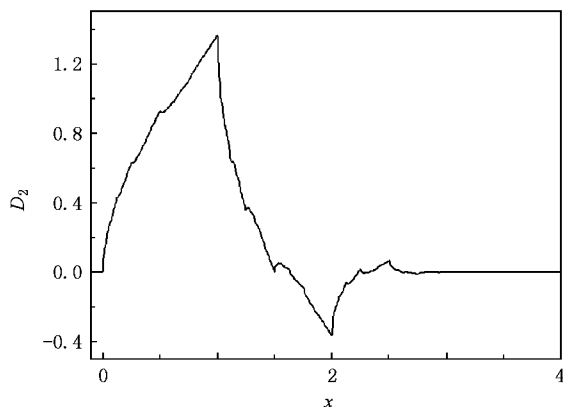


图 1 紧支撑域为[0,3]的 Daubechies 尺度函数

半空间环境中的电磁辐射和散射分析对于诸如地下探测、地面和海面雷达目标隐身与识别等实际工程具有重要的意义,如何对半空间环境下的辐射散射问题进行精确建模一直是计算电磁学领域广受关注的课题.基于微分方程的有限元和时域有限差分法可以求解该类问题^[13,14],它们对传播空间进行离散,但产生的未知量数目太多.与当前流行的 FDTD 算法相比, WGTD 方法具有较好的色散特性^[10,11],空间步长为 FDTD 方法的 2—3 倍,大大节省了内存.

^{*} 国家自然科学基金(批准号 60771038)资助的课题.

[†] E-mail: shydai@xidian.edu.cn

本文利用二阶 Daubechies 尺度函数 D_2 的紧支撑性 结合标准 Galerkin 法 导出半空间的 WGTD 算法 计算了有耗地面与目标的复合散射. 与传统 FDTD 方法相比 在不失精度的条件下 ,WGTD 方法所需的网格数较少 ,显示了 WGTD 算法的优越性 ,提高了电磁场计算效率.

2. WGTD 的推导及三波技术

Maxwell 方程组中关于 E_z 的微分形式如下：

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z. \tag{1}$$

空间网格同样采用标准的 Yee 网格^[1,2] ,电磁场各分量按下式展开：

$$H_x(\mathbf{r},t) = \sum_{i,j,k,n=-\infty}^{\infty} H_{i,j,k,n+0.5}^{\phi_x,n+0.5} h_{n+0.5}(t) \times \{\phi_i(x)\phi_{j+0.5}(y)\phi_{k+0.5}(z)\}, \tag{2}$$

$$H_y(\mathbf{r},t) = \sum_{i,j,k,n=-\infty}^{\infty} H_{i+0.5,j,k,n+0.5}^{\phi_y,n+0.5} h_{n+0.5}(t) \times \{\phi_{i+0.5}(x)\phi_j(y)\phi_{k+0.5}(z)\}, \tag{3}$$

$$E_z(\mathbf{r},t) = \sum_{i,j,k,n=-\infty}^{\infty} E_{i,j,k,n+0.5}^{\phi_z,n} h_n(t) \times \{\phi_i(x)\phi_j(y)\phi_{k+0.5}(z)\}. \tag{4}$$

这里 $E_{i,j,k,n+0.5}^{\phi_z,n}$, $H_{i,j,k,n+0.5}^{\phi_x,n+0.5}$, $H_{i+0.5,j,k,n+0.5}^{\phi_y,n+0.5}$ 为场展开系数 ; n, i, j, k 分别为时间和空间的坐标 ,并有 $t = n\Delta t, x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z$,其中 $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ 分别为时间和空间的离散间隔 ; h 和 ϕ 可以为各类尺度函数 ,本文中 $h(t)$ 取为 Haar 尺度函数 , ϕ 取为 D_2 函数. $h_n(t), \phi_i(x)$ 分别定义为

$$h_n(z) = h\left(\frac{t}{\Delta t} - n\right), \tag{5}$$

$$\phi_i(x) = \phi\left(\frac{x}{\Delta x} - i\right). \tag{6}$$

将场展开式 (2)–(4) 代入 Maxwell 方程组 (1) ,同时进行标准的 Galerkin 法检验^[6,15] ,并且利用下列内积关系式：

$$h_n(t), \frac{dh_{n+0.5}(t)}{dt} = \delta_{n,n'} - \delta_{n,n'+1}, \tag{7}$$

$$\phi_k(x), \phi_{k'}(z) = \delta_{k,k'} \Delta z, \tag{8}$$

$$\phi_i(x), \frac{d\phi_{i+0.5}(x)}{dx} = \sum_l \alpha(l) \delta_{i+l,i'}, \tag{9}$$

式中 $\delta_{k,k'}$ 为狄拉克函数. 系数 α_l 可以由傅里叶频域的数值内积获得^[10] ,

$$a_l \equiv \frac{d\phi_{i+0.5}(x)}{dx}, \phi_{i-l}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \omega |\mathcal{F}(\omega)|^2 \sin[\alpha(l+0.5)] d\omega, \tag{10}$$

式中 \mathcal{F} 为 ϕ 的傅里叶变换. 表 1 列出了 $0 \leq l \leq 2$ 时 $\alpha(l)$ 的值 , $l > 2$ 时 , $\alpha(l) = 0$. 这是由于 Daubechies 尺度函数的紧支撑特性所致. 根据对称关系 , $l < 0$ 时 , $\alpha(-1-l) = \alpha(-l)$.

表 1 (9 式) 中系数 $\alpha(l)$ 的值

l	$\alpha(l)$
0	1.2291670
1	-0.0937500
2	0.0104167

Galerkin 法检验并整理后可得 $E_{i,j,k,n+0.5}^{\phi_z,n}$ 步进迭代公式为

$$E_{i,j,k,n+1}^{\phi_z,n+1} = \frac{2\epsilon - \sigma\Delta t}{2\epsilon + \sigma\Delta t} E_{i,j,k,n+0.5}^{\phi_z,n} + \frac{2\Delta t}{2\epsilon + \sigma\Delta t} \left[\sum_{l=-L_s}^{L_s-1} \alpha(l) \times \left(\frac{H_{i+0.5+j,k,n+0.5}^{\phi_y,n+0.5}}{\Delta x} - \frac{H_{i,j+0.5+k,n+0.5}^{\phi_x,n+0.5}}{\Delta y} \right) \right]. \tag{11}$$

对 D_2 函数而言 , $L_s = 3$. 将场分量按类似方式展开并代入其他 Maxwell 微分方程中进行 Galerkin 法检验 ,可得到其他电磁场分量的步进迭代公式. 为使 (11) 式收敛 ,时间步长 Δt 应满足修正的 Courant 稳定性条件^[6]

$$\frac{1}{\Delta t} \geq v_{\max} \sum_{l=0}^{L_s-1} |\alpha(l)| \sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2 + (1/\Delta z)^2}, \tag{12}$$

式中 v_{\max} 为计算空间电磁波的最大传播速度. 为简便起见 ,本文在计算时采用 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta, s = v_{\max} \Delta t / \Delta = 0.4$. 由于 Daubechies 尺度函数近似满足移位内插特性^[16] ,因而 (6) 式可以改写为

$$\phi_i(x) = \phi\left(\frac{x}{\Delta x} - i + M_1\right), \tag{13}$$

式中

$$M_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathcal{F}(x) dx.$$

对 D_2 函数而言 , $M_1 = 0.6343975$. 尽管 D_2 尺度函数的支撑域是 $[0, 3]$,然而无论计算的目标多么复杂 ,只要利用局部抽样计算不均匀问题时仍然很简单. 场值可近似为该点的尺度系数. 例如

$$\begin{aligned}
 & E_z(i\Delta x, j\Delta y, (k+0.5)\Delta z, n\Delta t) \\
 &= \iiint E_z(\mathbf{r}, t) \delta\left(\frac{x}{\Delta x} - i\right) \delta\left(\frac{y}{\Delta y} - j\right) \\
 &\quad \times \delta\left(\frac{z}{\Delta z} - k - 0.5\right) \delta\left(\frac{t}{\Delta t} - n\right) dx dy dz dt \\
 &= E_{i,j,k+0.5,n}^{\phi z} \quad (14)
 \end{aligned}$$

值得注意的是, 抽样值特别依赖于检验函数^[16].

色散特性分析通常先假设 Maxwell 的时谐解, 然后代入各向同性均匀、线性、无耗的步进方程中, 数值求解所产生的非线性方程^[16].

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right\}^2 \\
 &= \left\{ \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=0}^{L_x-1} \alpha(l) \sin(k_x(l+1/2)\Delta x) \right\}^2 \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{\Delta y} \sum_{l=0}^{L_y-1} \alpha(l) \sin(k_y(l+1/2)\Delta y) \right\}^2 \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{\Delta z} \sum_{l=0}^{L_z-1} \alpha(l) \sin(k_z(l+1/2)\Delta z) \right\}^2. \quad (15)
 \end{aligned}$$

图 2 比较了 WGTD 方法与 FDTD 方法的色散特性, 其中 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$, $c\Delta t/\Delta = 0.4$, 方向为 $(1, 1, 1)$. 从图 2 可以看出 WGTD 方法的线性程度高于 FDTD 方法, 这样就保证了 WGTD 方法在大网格尺寸时的精度.

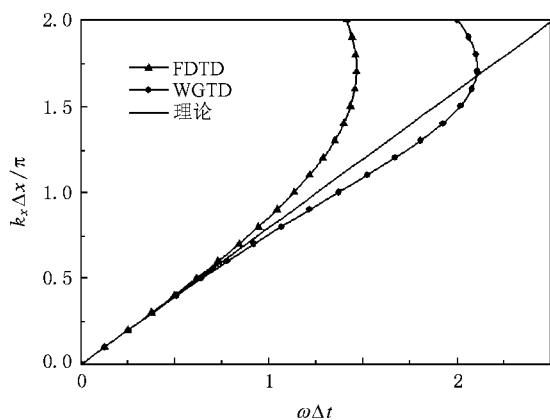


图 2 WGTD 方法和 FDTD 方法的色散曲线与理论结果比较

在半空间问题中, 入射波在界面出现反射和透射现象, 上半空间存在入射场和反射场, 下半空间存在透射场, 这就是三波技术^[17]. WGTD 方法和 FDTD 方法一样, 总场-散射场边界条件需要将所有针对目标的外加入射场赋予连接边界. 设入射波沿 θ, ϕ 方向入射, 定义入射面所在的坐标面为 zox , 即假定 $\phi = 0^\circ$. 入射波电场矢量分解成垂直入射面和平行入射面分量, 分别对应 TE 波和 TM 波. 图 3 为

TE 波在半空间散射的几何示意图.

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = [E_v(\mathbf{r})\hat{v} + E_h(\mathbf{r})\hat{h}], \quad (16)$$

式中 E_v 为垂直入射面分量, E_h 为平行入射面分量, 时谐因子采用 $\exp(-i\omega t)$.

$$E_v(\mathbf{r}) = E_v \exp[i(k_{xi}x + k_{zi}z - \omega t)], \quad (17)$$

$$E_h(\mathbf{r}) = E_h \exp[i(k_{xi}x + k_{zi}z - \omega t)]. \quad (18)$$

先考虑 TE 波电场和磁场的 x, y, z 分量,

$$E_y^{(TE)}(\mathbf{r}) = E_v \exp[i(k_{xi}x + k_{zi}z - \omega t)], \quad (19)$$

$$H_x^{(TE)}(\mathbf{r}) = \frac{E_v \cos\theta}{Z_0} \exp[i(k_{xi}x + k_{zi}z - \omega t)], \quad (20)$$

$$H_z^{(TE)}(\mathbf{r}) = \frac{E_v \sin\theta}{Z_0} \exp[i(k_{xi}x + k_{zi}z - \omega t)], \quad (21)$$

$$E_y^{(TE)}(\mathbf{r}) = R^{TE} E_v \exp[i(k_{xi}x + k_{zi}z - \omega t)], \quad (22)$$

$$E_y^{(TE)}(\mathbf{r}) = T^{TE} E_v \exp[i(k_{xi}x + k_{zi}z - \omega t)]. \quad (23)$$

这里上标 i 表示入射波, r 和 t 分别表示反射波和透射波, R^{TE}, T^{TE} 为菲涅耳反射系数和透射系数. TM 波可用类似方法写出.

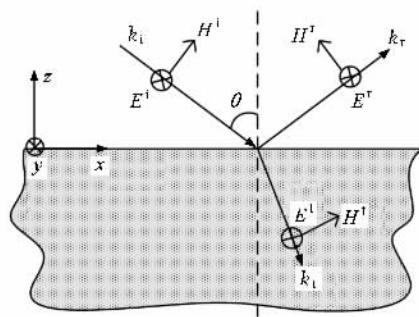


图 3 TE 波在界面处入射、反射和透射示意图

在计算过程中应特别注意相位问题, 设基准点位于 (x_0, y_0, z_0) , 空气介质面位于 $z = 0$ 平面(图 4), 同时利用

$$k_{xi} = k_{xr} = k_{xt},$$

$$k_{yi} = k_{yr} = k_{yt},$$

$$k_{zi} = -k_{zt}.$$

A 点入射波相位比较容易得到

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = k_{xi}(x - x_0) + k_{yi}(y - y_0) + k_{zi}(z - z_0). \quad (24)$$

A 点反射波相位可以看作界面对称点 A' 的入射波相位, 即

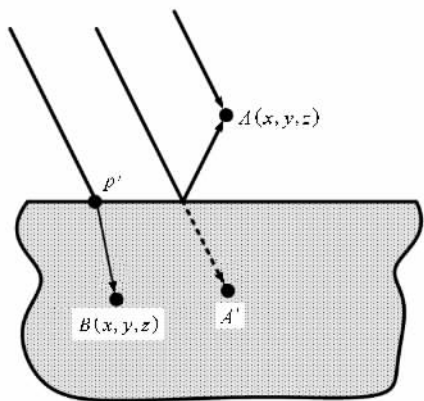


图4 在界面处入射波、反射波和透射波相位示意图

$$\Phi_i(r) = k_{xi}(x - x_0) + k_{yi}(y - y_0) + k_{zi}(z + z_0).$$
$$(25)$$

B 点透射波相位可以看成边界点的相位与 *Bp'* 的相位之和,相对基准点

$$\Phi_t(r) = k_{xt}(x - x_0) + k_{yt}(y - y_0) + (k_{zt}z - k_{zi}z_0).$$
$$(26)$$

将对应的 TE 和 TM 波合并,就可得到在连接边界上的场量.

3. 近远场变换

计算出近场数据后,为得到雷达散射截面(RCS),需将近场数据外推到远区场. FDTD 方法是虚拟一个输出边界,将该面上的电(磁)场通过等效原理转换成磁(电)流,最后叠加这些点源的远区辐射场.但在半空间问题中,地面的反射、透射和折射过程较为复杂,为避免半空间 Green 函数的复杂积分计算,本文在此利用互易原理进行外推.互易原理描述如下^[18]:设在近区 *a* 点处电流源 *J_a* 和磁流 *M_a* 在远区 *b* 点处激发的电场和磁场分别为 *E_b* 和 *H_b*, *b* 点处电流源 *J_b* 和磁流 *M_b* 在 *a* 点处激发的电场和磁场分别为 *E_a* 和 *H_a*.

$$a, b = \int_V dV (J_a \cdot E_b - M_a \cdot H_b).$$
$$(27)$$

由于 *a, b = b, a*, 在外推过程中利用一些变换可以得到^[18]

$$E_\theta(J_p, r_a; r_\infty) = E_p(J_\theta, r_\infty; r_a)$$
$$(p = x, y, z). \quad (28)$$

由方程(28)可知,在 *a* 点处 *p* 方向的电流 *J_p* 在无穷远处的辐射电场 *E_θ*(*J_p*, *r_a*; *r_∞*) 分量等于放置在无

穷远处 *θ* 方向的相同电流 *J_θ* 在近区 *r_a* 处的辐射电场 *p* 方向分量 *E_p*(*J_θ*, *r_∞*; *r_a*). 由于地面影响,远区电(磁)流在上半空间产生的场为辐射场和反射场的叠加,下半空间为辐射透射波.

4. 数值计算与讨论

首先计算贴地介质圆柱的散射,模型如图5所示.圆柱高度为250 cm,直径为60 cm,圆柱电参数 $\epsilon_r = 3.2$,地面电参数 $\epsilon_r = 5, \sigma = 0.01 \text{ s/m}$.入射波频率为300 MHz,入射天顶角 $\theta_i = 45^\circ$,方位角 $\phi_i = 0^\circ$,空间步长取2 cm, $\Delta t = 8/3 \times 10^{-11} \text{ s}$.散射方位角 $\phi_s = 0^\circ$ 时, $0 \leq \theta_s \leq 90^\circ$; $\phi_s = 180^\circ$ 时, $-90^\circ \leq \theta_s \leq 0$.用WGTD方法计算了同极化(hh, vv)和交叉极化(hv, vh)的RCS,结果如图6所示.同极化的结果与文献[19]一致,验证了WGTD方法的有效性.

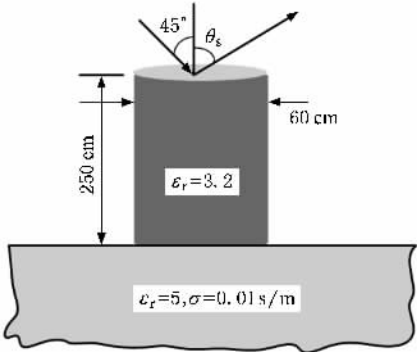


图5 地面与贴地介质圆柱的复合散射示意图

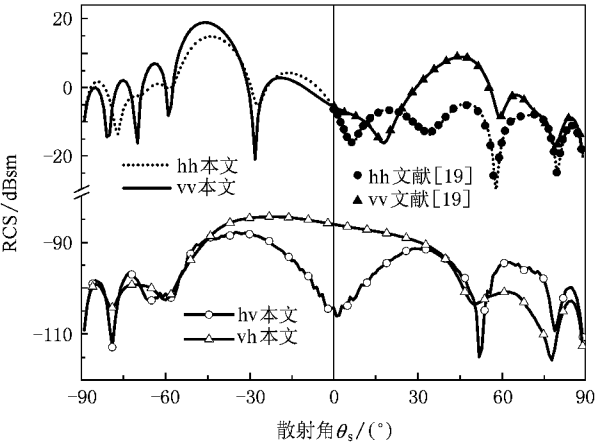


图6 RCS随方位角 θ_s 的变化关系

最后计算了地面上方圆柱的散射,模型如图7

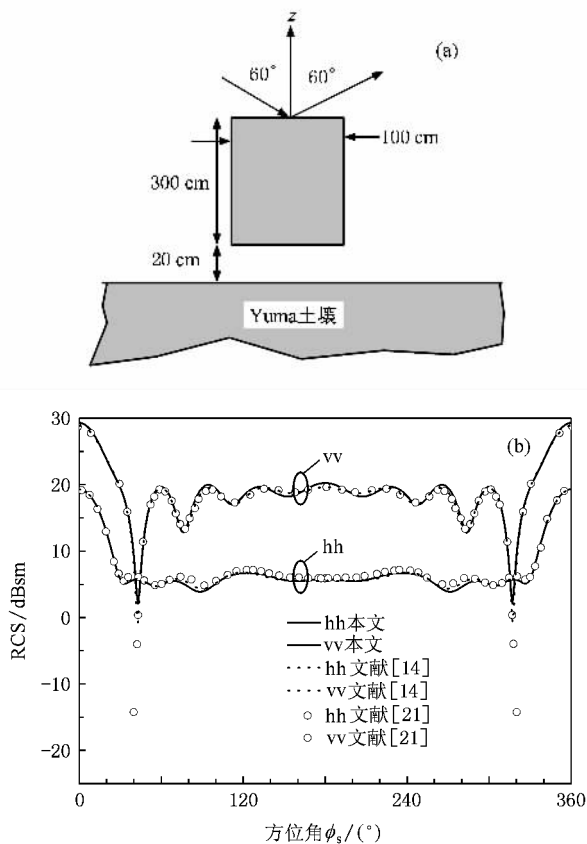


图7 计算所使用的地面上方圆柱散射模型及 RCS 随方位角 ϕ_s 变化关系 (a) 计算所使用的模型 (b) RCS 随 ϕ_s 的变化

(a)所示.背景为含水量 10%(质量分数)的 Yuma 土壤^[20],导体圆柱高为 300 cm,半径为 100 cm.柱底离地面高度 20 cm,入射波频率为 600 MHz,入射天顶角 $\theta_i = 60^\circ$,方位角 $\phi_i = 0^\circ$.文献 20 给出了含水量为 10%的 Yuma 土壤介电常数和电导随频率变化的色散特性,但并没有提供具体的参数值.读图提取电磁参数 $\epsilon_r = 6.46315$, $\sigma = 0.611$ s/m.空间步长为 2 cm, $\Delta t = 8/3 \times 10^{-11}$ s.用 WGTD 方法计算 $\theta_s = 60^\circ$ 时同极化的 RCS 随方位角 ϕ_s 的变化关系,结果如图 7(b)所示.本文的计算结果与文献[14]利用 FDTD 方法和文献[21]利用矩量法得到的结果相符.而文献[14]中空间网格为 1 cm,因此体现了 WGTD 方法所需内存少的优点.

5. 结 论

本文利用三波叠加技术和互易原理,研究了半空间中的 WGTD 方法,计算了有耗地面与任意目标的复合散射.算例表明,WGTD 方法在大尺寸网格情况下的计算结果与文献仍相符,证实了该方法的有效性和精度,因而具有计算效率高的优点.该方法将是计算电磁学中一种有发展潜力的方法.

- [1] Taflov A 1995 *Computational Electrodynamics—The Finite-Difference Time-Domain Method* (Norwood: Artech House)
- [2] Kunz K S, Luebbers R 1993 *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics* (Boca Raton: CRC Press)
- [3] Liu S B, Xu L J, Yuan N C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4789 (in Chinese)[刘少斌、徐利军、袁乃昌 2005 物理学报 **54** 4789]
- [4] Namiki T 1999 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47** 2003
- [5] Tang W, Yan Y B, Li Q L, Wu Z S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4173 (in Chinese)[汤 炜、闫玉波、李清亮、吴振森 2004 物理学报 **53** 4173]
- [6] Krumpholtz M, Katehi L P B 1996 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **44** 555
- [7] Tentzeris E M, Robertson R L, Harvey J F, Katehi L P B 1999 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47** 1004
- [8] Daubechies I 1992 *Ten Lectures on Wavelets* (Philadelphia: SIAM)
- [9] Dogaru T, Carin L 2002 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **50** 774
- [10] Cheong Y W, Lee Y M, Ra K H, Kang J G, Shin C C 1999 *IEEE Microw. Guided Wave Lett.* **9** 207
- [11] Fujii M, Hoefer W J R 2000 *IEEE Microw. Guided Wave Lett.* **10** 125
- [12] Fujii M, Hoefer W J R 2001 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **49** 886
- [13] Han D H, Polycarpou A C, Balanis C A 2001 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **49** 402
- [14] Tang W, Li Q L, Wu Z S, Yan Y B, Dong H 2004 *Chin. J. Radio Sci.* **19** 438 (in Chinese)[汤 炜、李清亮、吴振森、闫玉波、董 慧 2004 电波科学学报 **19** 438]
- [15] Harrington R F 1982 *Field Computation by Moment Methods* (Malabar: Krieger)
- [16] Sweldens W, Piessens R 1993 *Proc. Statistical Computing Section* (San Francisco: Amer. Statist. Assoc.) p20
- [17] Wong P B, Tyler G L, Baron J E 1996 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **44** 504
- [18] Tsang L, Kong J A, Ding K H 2000 *Scattering of Electromagnetic Waves: Theories and Applications* (New York: John Wiley & Sons, Inc.)
- [19] Tang W 2005 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Xidian University) p122 (in Chinese)[汤 炜 2005 博士学位论文(西安:西安电子科技大学)第 122 页]
- [20] Geng N, Sullivan A, Carin L 2000 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **38** 1561
- [21] Geng N, Carin L 1999 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **47** 610

Application of wavelet-Galerkin time domain method in the composite scattering of target and lossy ground^{*}

Dai Shao-Yu[†] Wu Zhen-Sen

(*School of Science , Xidian University , Xi'an 710071 , China*)

(Received 23 May 2007 ; revised manuscript received 1 August 2008)

Abstract

This paper employs the wavelet-Galerkin time domain (WGTD) technique to study composite scattering of arbitrarily target and a lossy ground, and the incidence is realized through three-wave technology. The far-field radiated by the surface currents is calculated using the reciprocity theorem instead of the more complicated Sommerfeld integration. Numerical radar cross section demonstrate the validity and precision of WGTD. Compared to finite difference time domain method, the WGTD method has the advantages of smaller memory and higher efficiency.

Keywords : wavelet-Galerkin time domain method , composite scattering , lossy half space

PACC : 4110H , 5225P , 6114D

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60771038).

[†] E-mail :shydai@xidian.edu.cn