

# 一维六方准晶非周期平面内的平面应变理论<sup>\*</sup>

刘官厅<sup>1)†</sup> 何青龙<sup>1)‡</sup> 郭瑞平<sup>3)</sup>

1) 内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)

2) 兴安职业技术学院数学系, 乌兰浩特 137400)

3) 装备指挥技术学院基础部, 北京 101416)

(2008 年 12 月 28 日收到, 2009 年 1 月 30 日收到修改稿)

针对一维六方准晶中一种新平面弹性问题, 即非周期平面内的平面弹性问题, 通过引入应力势函数, 建立了一维六方准晶中非周期平面内的平面应变理论. 作为应用, 求解了一维六方准晶中垂直于准周期方向的椭圆孔口问题, 得到了其弹性应力场的解析解. 在极限情形下, 可给出裂纹问题的解.

关键词: 一维六方准晶, 椭圆孔口, 广义解析函数

PACC: 6140M, 6220M

## 1. 引言

准晶是 1982 年由实验发现、1984 年才首次报道的固体新结构<sup>[1,2]</sup>, 这一发现被认为是凝聚态物理和材料科学的一项重大进展. 迄今在不同合金系中已研制出 200 多种准晶, 其中半数以上热力学性能稳定, 因而准晶又是一种具有良好应用前景的新型材料<sup>[3-10]</sup>. 因此, 对准晶的研究具有重要意义.

按照在三维空间中原子排列方式的不同, 准晶可分为三维准晶、二维准晶和一维准晶. 一维六方准晶是指在具有六重旋转对称轴的方向上原子是准周期排列的, 而在垂直于该方向的平面内原子是周期排列的. 由于准周期方向的存在, 在讨论一维六方准晶的平面弹性问题时, 就会出现两种不同的平面应变理论. 一种为垂直于准周期方向平面内的弹性问题, 即周期平面内的平面应变理论, 对该类问题已有若干研究成果<sup>[11-17]</sup>. 另一种是平行于准周期方向平面内的弹性问题, 即非周期平面内的平面应变理论, 对该类问题的研究目前尚不多见. 本文就后一问题进行研究, 通过引入新的应力势函数, 建立了一维六方准晶中非周期平面内的平面应变理论, 利用广义解析函数给出了控制方程的一般解.

从发现准晶以来, 就观察到准晶的缺陷<sup>[18,19]</sup>.

与此同时, 关于准晶弹性与缺陷的理论研究也吸引了许多研究者的注意, 如位错、裂纹和孔口等已有不少文献报道<sup>[11-17]</sup>. 作为应用, 借助于广义保角映射, 本文求解了一维六方准晶中垂直于准周期方向的椭圆孔口问题, 得到了其弹性应力场的解析解. 在极限情形下, 可给出裂纹问题的解.

## 2. 基本方程

取点群  $6mm$  一维六方准晶的准周期方向为坐标轴  $x_3$ , 垂直于准周期方向的平面为坐标平面  $x_1-x_2$ , 建立直角坐标系. 用  $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12}, w_{33}, w_{31}, w_{32}$  分别表示声子场应变  $\epsilon_{ij}$  和相位子场应变  $w_{3j}$ ; 用  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}, H_{33}, H_{31}, H_{32}$  分别表示声子场应力  $\sigma_{ij}$  和相位子场应力  $H_{3j}$ . 根据文献<sup>[8,11]</sup>, 点群  $6mm$  一维六方准晶弹性问题的广义胡克定律可表示为

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11}\epsilon_{11} + C_{12}\epsilon_{22} + C_{13}\epsilon_{33} + R_1 w_{33}, \\ \sigma_{22} &= C_{12}\epsilon_{11} + C_{11}\epsilon_{22} + C_{13}\epsilon_{33} + R_1 w_{33}, \\ \sigma_{33} &= C_{13}\epsilon_{11} + C_{13}\epsilon_{22} + C_{13}\epsilon_{33} + R_2 w_{33}, \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} = 2C_{44}\epsilon_{23} + R_3 w_{32}, \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = 2C_{44}\epsilon_{31} + R_3 w_{31}, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = 2C_{66}\epsilon_{12}, \\ H_{33} &= R_1(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + R_2\epsilon_{33} + K_1 w_{33},\end{aligned}$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10761005)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: guantingliu@imnu.edu.cn

$$\begin{aligned} H_{31} &= 2R_3 \epsilon_{31} + K_2 w_{31}, \\ H_{32} &= 2R_3 \epsilon_{23} + K_2 w_{32}, \end{aligned} \quad (1)$$

式中,  $C_{ij}$  表示声子场独立弹性常数,  $K_i$  表示相位子场独立弹性常数,  $R_i$  表示声子场与相位子场耦合独立弹性常数. 几何方程为

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (2)$$

$$w_{3j} = \partial_j w_3 \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

式中  $u_i$  和  $w_3$  分别表示声子场与相位子位移, 且

$$\partial_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

不记体力的静平衡方程为

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{21} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{31} + \partial_2 \sigma_{32} + \partial_3 \sigma_{33} &= 0, \\ \partial_1 H_{31} + \partial_2 H_{32} + \partial_3 H_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

方程(1)–(3)就是点群  $6mm$  一维六方准晶弹性问题的基本方程.

### 3. 非周期平面内的平面应变

当点群  $6mm$  一维六方准晶中的缺陷沿周期方向穿透时(如无限长直位错和穿透性裂纹或孔口等), 材料的几何性质将不随周期方向改变. 这时, 在垂直于周期方向的平面(非周期平面)内为平面弹性问题. 假设缺陷沿坐标轴  $x_1$  方向穿透材料, 则

$$\begin{aligned} \partial_1 u_i &= 0, \\ \partial_1 w_3 &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{ij} &= 0, \\ \partial_1 H_{3j} &= 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4)$$

且所有的场变量仅依赖于坐标变量  $x_2$  和  $x_3$ .

将方程(4)代入方程(1)–(3), 得到  $x_2$ – $x_3$  平面内的物理方程为

$$\epsilon_{22} = a_1 \sigma_{22} + a_2 \sigma_{33} + b_1 H_{33}, \quad (5)$$

$$\epsilon_{33} = a_2 \sigma_{22} + a_3 \sigma_{33} + b_2 H_{33}, \quad (6)$$

$$2\epsilon_{23} = a_4 \sigma_{23} + b_3 H_{32}, \quad (7)$$

$$w_{32} = b_3 \sigma_{23} + c_1 H_{32}, \quad (8)$$

$$w_{33} = b_1 \sigma_{22} + b_2 \sigma_{33} + c_2 H_{33}, \quad (9)$$

式中常数

$$a_1 = \frac{C_{33} K_1 - R_2^2}{\Delta_1},$$

$$a_2 = \frac{R_1 R_2 - C_{13} K_1}{\Delta_1},$$

$$a_3 = \frac{C_{11} K_1 - R_1^2}{\Delta_1},$$

$$a_4 = \frac{K_2}{\Delta_2},$$

$$b_1 = \frac{C_{13} R_2 - C_{33} R_1}{\Delta_1},$$

$$b_2 = \frac{R_1 C_{13} - R_2 C_{11}}{\Delta_1},$$

$$b_3 = -\frac{R_3}{\Delta_2},$$

$$c_1 = \frac{C_{44}}{\Delta_2},$$

$$c_2 = \frac{C_{11} C_{33} - C_{13}^2}{\Delta_1},$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= C_{11} C_{33} K_1 + 2C_{13} R_1 R_2 - R_1^2 C_{33} \\ &\quad - R_2^2 C_{11} - C_{13}^2 K_1, \\ \Delta_2 &= C_{44} K_2 - R_3^2. \end{aligned}$$

$x_2$ – $x_3$  平面内的平衡方程为

$$\begin{aligned} \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} &= 0, \\ \partial_2 \sigma_{32} + \partial_3 \sigma_{33} &= 0, \\ \partial_2 H_{32} + \partial_3 H_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

变形协调方程为

$$\begin{aligned} \partial_3^2 \epsilon_{22} + \partial_2^2 \epsilon_{33} - 2\partial_2 \partial_3 \epsilon_{23} &= 0, \\ \partial_2 w_{33} - \partial_3 w_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

一般情况下, 应力面外应力  $\sigma_{11}$  不为零,  $\sigma_{11}$  可由下列公式给出:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (C_{11} a_1 + C_{12} a_2 + R_1 b_1) \sigma_{22} \\ &\quad + (C_{11} a_2 + C_{12} a_3 + R_1 b_2) \sigma_{33} \\ &\quad + (C_{11} b_1 + C_{12} b_2 + R_1 c_2) H_{33}. \end{aligned}$$

这是一套关于声子场与相位子场耦合的偏微分方程, 与一般晶体的弹性方程完全不同. 由于方程的复杂性, 直接求解比较困难.

现在我们引入两个新的应力势函数来简化上述方程. 令

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \partial_3^2 U, \\ \sigma_{33} &= \partial_2^2 U, \\ \sigma_{23} &= -\partial_2 \partial_3 U, \\ H_{22} &= \partial_3 V, \\ H_{33} &= -\partial_2 V. \end{aligned} \quad (12)$$

显然, 方程(10)已经满足.

将方程(12)代入方程(5)–(9),然后将所得的结果代入方程(11),经简单计算得

$$\begin{aligned} L_1 U - L_2 V &= 0, \\ L_2 U + L_3 V &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

其中微分算子  $L_i (i = 1, 2, 3)$  分别为

$$\begin{aligned} L_1 &= a_3 \partial_2^4 + a_1 \partial_3^4 + (2a_2 + a_4) \partial_2^2 \partial_3^2, \\ L_2 &= b_2 \partial_2^3 + (b_1 + b_3) \partial_2 \partial_3^2, \\ L_3 &= c_2 \partial_2^2 + c_1 \partial_3^2. \end{aligned} \tag{14}$$

由方程(13)消去  $V$ , 得到一个关于  $U$  的偏微分方程

$$(L_1 L_3 + L_2^2)U = 0. \tag{15}$$

点群  $6mm$  一维六方准晶中非周期平面内平面弹性问题的最终控制方程为一个六阶偏微分方程.

由文献[20]可知, 方程(15)的解可用三个广义解析函数  $F_k(z_k) (k = 1, 2, 3)$  表示为

$$\begin{aligned} U(x_2, x_3) &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 F_k(z_k), \\ z_k &= x_2 + \mu_k x_3, \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

是微分方程(15)的特征根,  $\alpha, \beta$  是仅依赖于准晶弹性常数的实常数. 如果特征根出现重根, 上述公式可以进一步简化.

另一方面, 由方程(13)得

$$\begin{aligned} V(x_2, x_3) &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \eta_k F'_k(z_k), \\ \eta_k(\mu_k) &= \frac{b(\mu_k)}{c(\mu_k)}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned} b(\mu_k) &= (b_1 + b_3)\mu_k^2 + b_2, \\ c(\mu_k) &= c_1\mu_k^2 + c_2. \end{aligned}$$

将(16)和(17)式代入方程(12), 可得

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 f'_k(z_k), \\ \sigma_{33} &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 f'_k(z_k), \\ \sigma_{23} &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k f'_k(z_k), \\ H_2 &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \eta_k \mu_k f'_k(z_k), \\ H_3 &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \eta_k f'_k(z_k), \end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$f_k(z_k) = \partial_{z_k} F_k(z_k) = F'_k(z_k).$$

这就是点群  $6mm$  一维六方准晶中非周期平面内的声子场与相位子场应力的复表示.

下面推导边界条件的复表示.

如图1所示, 假设  $AB$  弧是弹性体在坐标平面  $x_2-x_3$  内的一段边界曲线,  $N$  是  $AB$  弧的外法线,  $T_2$  与  $T_3$  是作用在  $AB$  弧上的面力,  $T_h$  是作用于相位子空间的广义力, 则应力边界条件可表示为

$$(\sigma_{22})_s \cos(N, x_2) + (\sigma_{32})_s \cos(N, x_3) = T_2, \tag{19}$$

$$(\sigma_{33})_s \cos(N, x_3) + (\sigma_{23})_s \cos(N, x_2) = T_3, \tag{20}$$

$$(H_{33})_s \cos(N, x_3) + (H_{23})_s \cos(N, x_2) = T_h. \tag{21}$$

将方程(12)代入(19)–(21)式, 沿边界关于弧长  $s$  积分, 并注意到

$$\begin{aligned} \cos(N, x_2) &= \frac{dx_3}{ds}, \\ \cos(N, x_3) &= -\frac{dx_2}{ds}, \end{aligned} \tag{22}$$

得边界条件的复表示为

$$\begin{aligned} \partial_3 U &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k f_k(z_k) \\ &= \int_s T_2 ds, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 U &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 f_k(z_k) \\ &= -\int_s T_3 ds, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} V &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \eta_k f_k(z_k) \\ &= \int_s T_h ds. \end{aligned} \tag{25}$$

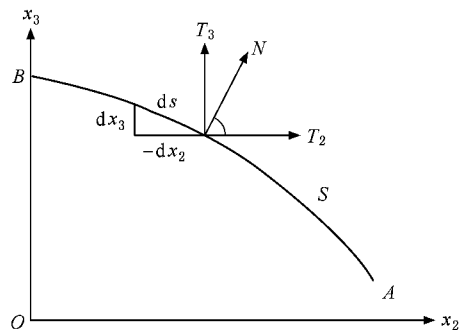


图1 表面力  $T_2$  与  $T_3$  作用在边界  $AB$  弧上

# 4. 垂直于准周期方向的椭圆孔口问题

假设在点群  $6mm$  一维六方准晶中, 沿周期方向  $x_1$  有一个穿透性的椭圆孔口. 这时, 材料的几何性质将不随周期方向  $x_1$  改变, 在垂直于周期方向的平面(非周期平面  $x_2-x_3$ )内为平面弹性问题.

在平面  $x_2-x_3$  内, 设椭圆孔口  $L$  的方程为

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1, \quad (26)$$

其中  $a$  和  $b$  为椭圆的长半轴和短半轴.

考虑在无穷远处沿准周期方向  $x_3$  作用于外载荷  $p$  的静平衡问题, 如图 2 所示. 该问题的边界条件如下: 当  $z \rightarrow \infty$  时,

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(z) &= p, \\ \sigma_{22}(z) &= \sigma_{23}(z) = 0; \end{aligned} \quad (27)$$

当  $z = t \in L$  时,

$$T_2(t) = T_3(t) = 0. \quad (28)$$

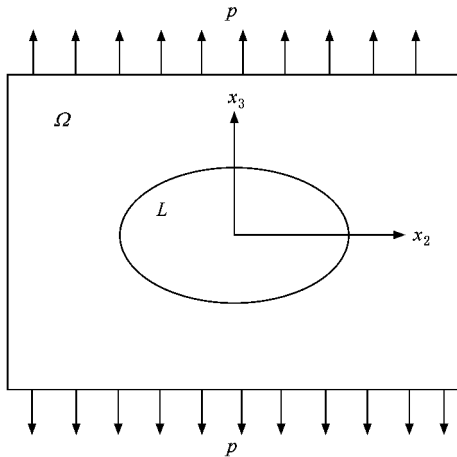


图 2 一维六方准晶非周期平面内的椭圆孔口

由于相位子场在垂直空间, 它与热运动的原子重排有关<sup>[5]</sup>, 故相位子应力边界条件一般可取零, 当  $z \rightarrow \infty$  时,

$$H_2(z) = H_3(z) = 0; \quad (29)$$

当  $z = t \in L$  时,

$$T_h(t) = 0. \quad (30)$$

现在求解上述边值问题. 为了求得区域  $\Omega$  内的复势函数, 我们假设函数  $f_k(z_k)$  的 Laurent 展式为

$$f_k(z_k) = C_k z_k + \sum_{i=2}^{\infty} C_k^{(j)} z_k^j + f_k^{(0)}(z_k). \quad (31)$$

这里

$$f_k^{(0)}(z_k) = a_{k0} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} z_k^{-j}, \quad (32)$$

$C_k, C_k^{(j)}$  和  $a_{kj}$  是待定复常数.

将  $f_k(z_k)$  代入方程(18), 由条件(23)和(25)式得

$$C_k^{(j)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3; j = 2, 3, \dots); \quad (33)$$

$$\begin{aligned} 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 C_k &= 0, \\ 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 C_k &= p, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k C_k &= 0, \\ 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \eta_k C_k &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \eta_k C_k = 0.$$

上述方程组中共有 6 个实常数  $\text{Re} C_k, \text{Im} C_k (k = 1, 2, 3)$ , 但只有 5 个独立的方程, 因此, 其中一个常数可以自由选择, 不妨取  $\text{Re} C_3 = 0$ .

将  $f_k(z_k)$  再代入方程(23)–(25), 由条件(28)和(30)式得

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^3 [f_k^{(0)}(z_k) + \overline{f_k^{(0)}(z_k)}] \\ &= - \sum_{k=1}^3 [C_k z_k + \overline{C_k z_k}], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^3 [\mu_k f_k^{(0)}(z_k) + \overline{\mu_k f_k^{(0)}(z_k)}] \\ &= - \sum_{k=1}^3 [C_k z_k + \overline{C_k z_k}], \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^3 [\eta_k f_k^{(0)}(z_k) + \overline{\eta_k f_k^{(0)}(z_k)}] \\ &= - \sum_{k=1}^3 [C_k z_k + \overline{C_k z_k}], \end{aligned} \quad (38)$$

其中  $z_k$  取椭圆孔  $L$  的边界值, 上划线表示复共轭. 作保角映射

$$\begin{aligned} z_k = g_k(\zeta_k) &= \frac{a - i\mu_k b}{2} \zeta_k + \frac{a + i\mu_k b}{2} \frac{1}{\zeta_k}, \\ &(k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (39)$$

则  $z_k$  平面内的区域  $\Omega_k$  被映到  $\zeta_k$  平面内的单位圆的外部(单位圆的边界记为  $\gamma$ ). 进一步取  $\zeta_k = \sigma = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 则  $\Omega_k$  上的三个点被映到单位圆上的一个点. 用  $F_k^{(0)}(z_k)$  表示  $f_k^{(0)}(z_k)$  经过映射后的函数, 则条件(36)–(38)式可改写为

$$\sum_{k=1}^3 [ F_k^{(0)}(\sigma) + \overline{F_k^{(0)}(\sigma)} ] = \overline{l_1} \sigma + l_1 \sigma^{-1} , \quad (40)$$

$$\sum_{k=1}^3 [ \mu_k F_k^{(0)}(\sigma) + \overline{\mu_k F_k^{(0)}(\sigma)} ] = \overline{l_2} \sigma + l_2 \sigma^{-1} \quad (41)$$

$$\sum_{k=1}^3 [ \eta_k F_k^{(0)}(\sigma) + \overline{\eta_k F_k^{(0)}(\sigma)} ] = \overline{l_3} \sigma + l_3 \sigma^{-1} \quad (42)$$

其中

$$l_1 = \sum_{k=1}^3 \frac{a(C_k + \overline{C_k}) + i b(C_k \mu_k + \overline{C_k} \mu_k)}{2} ,$$

$$l_2 = \sum_{k=1}^3 \frac{a(C_k \mu_k + \overline{C_k} \mu_k) + i b(C_k \mu_k^2 + \overline{C_k} \mu_k^2)}{2} ,$$

$$l_3 = \sum_{k=1}^3 \frac{a(C_k \eta_k + \overline{C_k} \eta_k) + i b(C_k \mu_k \eta_k + \overline{C_k} \mu_k \eta_k)}{2} .$$

方程(40)–(42)两边同时乘以  $\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$  , 其中  $\zeta$  是单位圆外的任意一点, 然后沿边界  $\gamma$  积分.

首先由 Chauchy 积分定理得

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{F_k^{(0)}(\sigma)}{\sigma - \zeta_k} &= -2\pi i F_k^{(0)}(\zeta_k) , \\ \int_{\gamma} \frac{F_k^{(0)}(\overline{\sigma})}{\sigma - \zeta_k} &= 0 , \\ \int_{\gamma} \frac{\sigma}{\sigma - \zeta} &= 0 , \\ \int_{\gamma} \frac{1}{a(\sigma - \zeta)} &= -2\pi i \frac{1}{\zeta} . \end{aligned} \quad (43)$$

进而可解得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 F_k^{(0)} &= \frac{l_1}{\zeta} , \\ \sum_{k=1}^3 \mu_k F_k^{(0)} &= \frac{l_2}{\zeta} , \\ \sum_{k=1}^3 \eta_k F_k^{(0)} &= \frac{l_3}{\zeta} . \end{aligned} \quad (44)$$

当  $k$  取 1, 2, 3 时,  $\zeta$  分别对应于  $\zeta_k$  , 因此, 上述解进一步可表示为

$$F_k^{(0)} = \frac{l_1}{\zeta_k} \sum_{j=1}^3 A_{kj} l_j \quad (k = 1, 2, 3) , \quad (45)$$

其中

$$[A_{kj}] = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} \mu_2 \eta_3 - \mu_3 \eta_2 & \eta_2 - \eta_3 & \mu_2 - \mu_3 \\ \mu_3 \eta_1 - \mu_1 \eta_3 & \eta_3 - \eta_1 & \mu_1 - \mu_3 \\ \mu_1 \eta_2 - \mu_2 \eta_1 & \eta_1 - \eta_2 & \mu_2 - \mu_1 \end{pmatrix} ,$$

$$B = (\eta_2 - \eta_3) \mu_1 + (\eta_3 - \eta_1) \mu_2 + (\eta_1 - \eta_2) \mu_3 .$$

由方程(31)和(39)得

$$f_k(z_k) = C_k z_k - \frac{z_k - \sqrt{z_k^2 - (a^2 + \mu_k^2 b^2)}}{a + i \mu_k b} \sum_{j=1}^3 A_{kj} l_j \quad (k = 1, 2, 3) \quad (46)$$

和

$$f'_k(z_k) = C_k - \frac{1}{a + i \mu_k b} \left( 1 - \frac{z_k}{\sqrt{z_k^2 - (a^2 + \mu_k^2 b^2)}} \right) \times \sum_{j=1}^3 A_{kj} l_j \quad (k = 1, 2, 3) . \quad (47)$$

将(47)式代入(18)式, 便得到准晶弹性场的所有应力分量.

特别是当  $b \rightarrow 0$  时, 有

$$f'_k(z_k) = C_k - \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{z_k}{\sqrt{z_k^2 - a^2}} \right) \times \sum_{j=1}^3 A_{kj} l_j \quad (k = 1, 2, 3) . \quad (48)$$

将(48)式代入(22)式, 可得裂纹问题的解. 同时不难发现裂尖  $z = \pm a$  应力仍具有  $-\frac{1}{2}$  阶的奇异性.

## 5. 结 论

建立了点群  $6mm$  一维六方准晶非周期平面内的平面应变理论, 给出了弹性问题的控制方程和基本解. 作为应用, 借助于复变函数中的广义保角变换, 研究了该准晶中的无限长穿透性椭圆孔口问题, 给出了弹性场的解析解. 在极限情况下, 给出裂纹问题的解. 结果表明, 裂尖  $z = \pm a$  应力仍具有  $-\frac{1}{2}$  阶的奇异性, 这一点与传统晶体相一致; 但应力场又与相位子场弹性常数有关, 这一点又不同于传统晶体相.

[1] Shechtman D, Blech I, Gratias D, Cahn J W 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1951

[2] Zhang Z, Ye H Q, Kuo K H 1985 *Phil. Mag.* **A 52** L49

[3] Ronchetti M 1987 *Phil. Mag.* **56** 237

[4] Goldman A I, Kelton R F 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 213

[5] Socolar J E S, Lubensky T C, Steinhardt P J 1986 *Phys. Rev. B* **34** 3345

[6] Ding D H, Yang W G, Hu C Z, Wang R H 1993 *Phys. Rev. B* **48** 7003

[7] Fan T Y, Mai Y W 2004 *Appl. Mech. Rev.* **57** 325

- [ 8 ] Fan T Y 1999 *The Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Applications* ( Beijing : Beijing Institute of Technology Press 刘 in Chinese ) 范天佑 1999 准晶数学弹性理论及其应用 ( 北京 北京理工大学出版社 )
- [ 9 ] Liu Y Y , Fu X J , Dong X Q 1997 *Prog . Phys .* **17** 1 ( in Chinese ) [ 刘有延、傅秀军、董秀清 1997 物理学进展 **17** 1 ]
- [ 10 ] Dong C 1998 *Quasicrystals Material* ( Beijing : National Defence Industry Press ) p158 ( in Chinese ) 董 闯 1998 准晶材料 ( 北京 : 国防工业出版社 ) 第 158 页 ]
- [ 11 ] Wang R H , Yang W G , Hu C Z , Ding D H 1997 *J . Phys : Condens . Matter* **9** 2411
- [ 12 ] Li X F , Fan T Y 1999 *Phys . Stat . Sol . B* **12** 19
- [ 13 ] Liu G T , Guo R P , Fan T H 2003 *Chin . Phys .* **12** 1149
- [ 14 ] Peng Y Z , Fan T Y 2000 *J . Phys . Condens . Matter* **12** 9381
- [ 15 ] Peng Y Z , Fan T Y 2001 *Eur . Phys . J . B* **21** 39
- [ 16 ] Gao Y , Xu S P , Zhao B S 2007 *J . Elasticity* **86** 221
- [ 17 ] Guo J H , Liu G T 2008 *Appl . Math . Mech .* **29** 421
- [ 18 ] Zhang Z , Urban K 1989 *Phil . Mag . Lett .* **60** 97
- [ 19 ] Meng X M , Tong B Y , Wu Y K 1994 *Acta Metall . Sin .* **30** 61 ( in Chinese ) [ 孟祥敏、佟百运、吴玉琨 1994 金属学报 **30** 61 ]
- [ 20 ] Sosa H 1991 *Int . J . Solids Struct .* **28** 491

# The plane strain theory for one-dimensional hexagonal quasicrystals in aperiodical plane \*

Liu Guan-Ting<sup>1)†</sup> He Qing-Long<sup>1)✉</sup> Guo Rui-Ping<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> College of Mathematics Science , Inner Mongolia Normal University , Huhhot 010022 , China )

<sup>2)</sup> Depatment of Mathematics , College of Xin'an Professional Technology , Wulanhot 137400 , China )

<sup>3)</sup> Department of Fundamental Courses , Academy of Equipment Command and Technology , Beijing 101416 , China )

( Received 28 December 2008 ; revised manuscript received 30 January 2009 )

## Abstract

Considering the plane elastic problem of one-dimensional hexagonal quasicrystals with point group  $6mm$  , the theory about plane strain parallel to aperiodic direction is proposed and established . As an application of this theory , the analytic solutions of elastic fields of the quasicrystals with an elliptical cavity perpendicular to quasi-periodical direction are given in the form of general complex variable . In the limit case , our solutions degenerate into the ones of crack problems .

**Keywords :** one-dimensional hexagonal quasicrystals , elliptical cavity , general analytic function

**PACC :** 6140M , 6220M

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10761005 ) .

† E-mail : guantingliu@imnu . edu . cn