

受拉扭弹性细杆超螺旋形态的定性分析^{*}

刘延柱^{1)†} 薛 纭²⁾

1) 上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

2) 上海应用技术学院机械与自动化学院, 上海 200233)

(2008 年 10 月 19 日收到, 2008 年 11 月 30 日收到修改稿)

基于弹性杆的 Kirchhoff 模型讨论受拉扭弹性细杆的超螺旋形态. 导出细长螺旋杆的等效抗弯和抗扭刚度. 分析受拉扭弹性细杆的稳定性和分岔, 且利用等效刚度概念将弹性杆的稳定性条件应用于对细长螺旋杆稳定性的判断. 在扭矩不变条件下增加拉力至极限值时, 直杆平衡状态失稳转为螺旋杆状态. 继续增加拉力, 直螺旋杆平衡状态失稳卷绕为超螺旋杆. 从而对 Thompson/Champney 实验中受拉扭弹性细杆形成超螺旋形态的多次卷绕现象作出定性的理论解释.

关键词: 弹性细杆, Kirchhoff 动力学比拟, 等效刚度, 超螺旋形态

PACC: 0320, 4630C, 4630L

1. 引言

利用弹性细杆作为 DNA 等生物大分子的力学模型以计算其几何形态的研究, 已形成力学与分子生物学的交叉学科^[1,2]. 染色体中的 DNA 以超螺旋形式存在. 2 nm 直径的 DNA 卷绕成 11 nm 直径的螺旋, 再卷绕成 30 nm 直径的超螺旋进入染色体. Thompson 和 Champney 等于 1996 和 2002 年进行了物理模拟实验再现类似的过程^[2,3]. 他们将直径 3 mm, 长度 18 cm 的硅橡胶细杆两端固定, 施加轴向拉力和扭矩. 可观察到随着拉力的增加, 受扭转直杆的中部出现局部弯曲, 逐渐形成局部回环, 并发展形成螺旋线的现象. 继续增加载荷, 螺旋杆的中轴线可由直线卷绕为螺旋线, 形成二级乃至更高级超螺旋杆(见图 1). 虽然弹性杆的简单物理实验不可能等同于复杂的分子生物学现象, 但可定性地证明螺旋杆多次卷绕现象的存在. Kirchhoff 动力学比拟是分析 DNA 弹性杆模型的理论基础^[4,5]. 1990 年 Coyne 利用 Kirchhoff 方程的解析积分, 对受拉扭细杆的失稳过程给出严格的理论证明^[6]. van der Heijden, Travers, Thompson 等以 DNA 为具体背景, 对失稳过程作了更深入分析^[2,7,8]. 本文基于弹性杆的 Kirchhoff 模型, 利用细长螺旋杆的等效刚度概念和螺旋杆的稳定性概

念分析弹性杆多次卷绕转变为超螺旋杆的力学过程. 对上述超螺旋杆的实验现象给出定性的理论解释.

2. 螺旋杆的等效抗扭刚度

设圆截面弹性细杆满足 Kirchhoff 理论的规定条件: 截面刚性且与中心线正交、均匀各向同性、线弹性、无分布力. 设杆的两端以球铰固定, 固定处不影响截面的转动. 以端点 P_0 为原点 O , 建立固定参考坐标系 $(O-XYZ)$, 且沿中心线建立弧坐标 s , 以确定中心线上任意点 P 的位置. 将 $(O-XYZ)$ 平移至 P 点, 令 $(P-XYZ)$ 绕 Z 轴转过 ψ 角后的位置为 $(P-x_0y_0z_0)$, 绕 x_0 轴转过 ϑ 角后的位置为 $(P-xyz)$, 绕 z 轴转过 ϕ 角后的位置与截面坐标系 $(P-x_sy_sz_s)$ 重合, z 和 z_s 轴均沿杆中心线的切线. $(P-xyz)$ 为圆截面的主轴坐标系, 但不参与截面绕切线轴的扭转. ψ, ϑ, ϕ 为确定截面姿态的欧拉角(见图 2). 设弹性杆在松弛状态下为螺旋杆, 其几何形态以欧拉角描述为

$$\vartheta = \vartheta_0, \psi' = \psi'_0, \phi' = \phi'_0, \quad (1)$$

其中 $\psi'_0 = \sin\vartheta_0/R_0$, R_0 为螺旋线半径, $\alpha = \pi/2 - \vartheta_0$ 为螺旋线倾角.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10472067)资助的课题.

[†] E-mail: liuyzhe@online.sh.cn

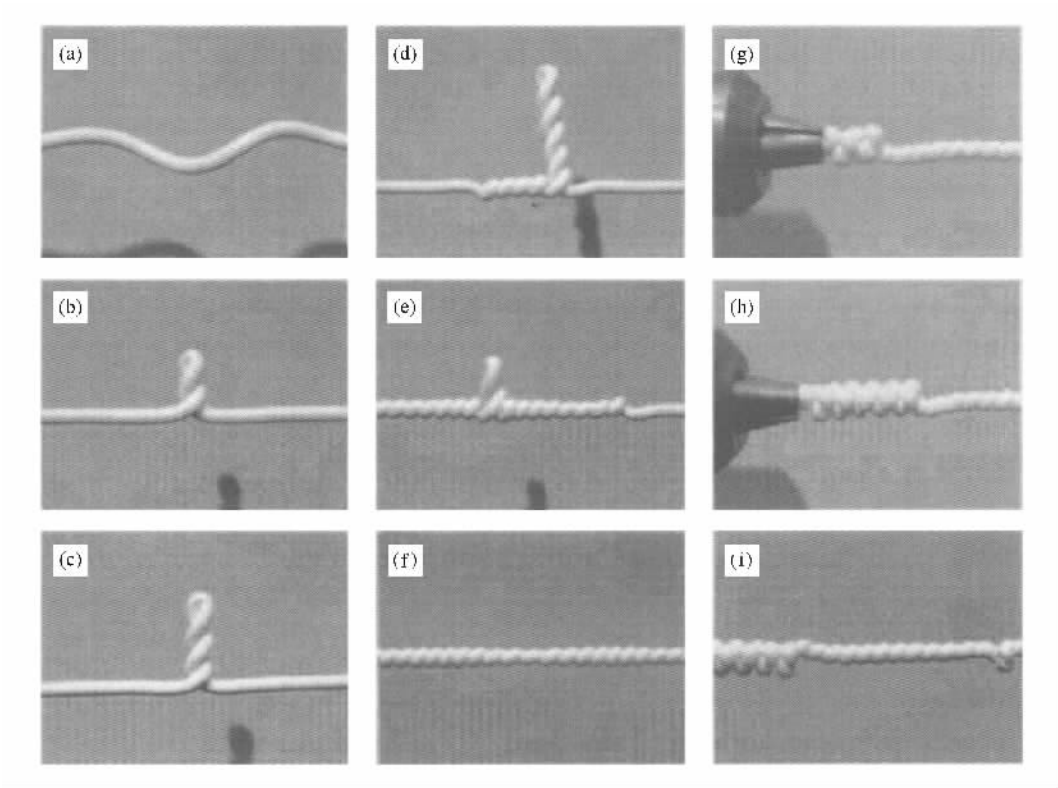


图1 Thompson/Champney 实验(引自文献[2])

在螺旋细杆两端施加绕 Z 轴的扭矩 M_Z 和 $-M_Z$, M_Z 在 $(P-xyz)$ 中的投影式为

$$M_Z = M_Z Z^0 = M_Z (\sin \vartheta j + \cos \vartheta k), \quad (2)$$

其中 X^0, Y^0, Z^0 和 i, j, k 分别为 $(P-XYZ)$ 和 $(P-xyz)$ 的基矢量. 螺旋杆在扭矩作用下绕 Z 轴作整体扭转(图3). 设整体扭转不影响截面的相对扭率 φ'_0 , 但引起转角 ψ 和常值倾角 ϑ 的变化. ψ 对 Z 轴的变化率 $\psi'_Z = d\psi/dZ$ 可利用 $dZ/ds = \cos \vartheta_0$ 变换为对弧坐标 s 的变化率 ψ' :

$$\psi' = d\psi/ds = \psi'_Z \cos \vartheta, \quad (3)$$

则整体扭转使杆产生的弯扭度 ω 为

$$\omega = \psi' Z^0 + \varphi'_0 k = \psi' \sin \vartheta j + \omega_z k, \quad (4)$$

其中 ω_z 为整体扭转后杆的扭率, 即

$$\omega_z = \psi' \cos \vartheta + \varphi'_0. \quad (5)$$

设 $A = EI, C = GI_0$ 为杆的抗弯和抗扭刚度, E, G 分别为杆的杨氏模量和剪切模量, I, I_0 分别为截面的惯性矩和极惯性矩. ω 的存在引起 P 点处杆的弯矩和扭矩, 其合力矩与扭矩 M_Z 平衡

$$M_Z = A(\psi' \sin \vartheta - \psi'_0 \sin \vartheta_0) j + C(\omega_z - \omega_{z0}) k, \quad (6)$$

其中 $\omega_{z0} = \psi'_0 \cos \vartheta_0 + \varphi'_0$. 令上式各项与(2)式相

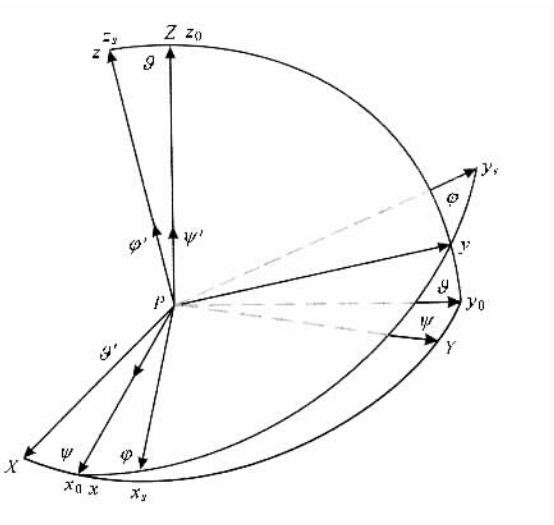


图2 确定截面姿态的欧拉角

等, 将 $\vartheta = \vartheta_0 + \Delta \vartheta$ 代入, 仅保留 $\Delta \vartheta$ 的一次项, 解出

$$\psi' - \psi'_0 = M_Z \left(\frac{\sin^2 \vartheta_0}{A} + \frac{\cos^2 \vartheta_0}{C} \right). \quad (7)$$

将 M_Z 与 $(\psi'_Z - \psi'_{Z0})$ 之商定义为与螺旋杆等效的直杆的抗扭刚度, 称为螺旋杆的等效抗扭刚度, 记作 $\tilde{C} = M_Z / (\psi'_Z - \psi'_{Z0})$. 得到

$$\tilde{C} = C \cos \vartheta_0 [1 + (\lambda - 1) \sin^2 \vartheta_0]^{-1}, \quad (8)$$

其中 $\lambda = C/A$ 为弹性杆的抗扭和抗弯刚度之比. 图

4 为螺旋杆的等效抗扭刚度 \tilde{C} 随 ϑ_0 的变化曲线.

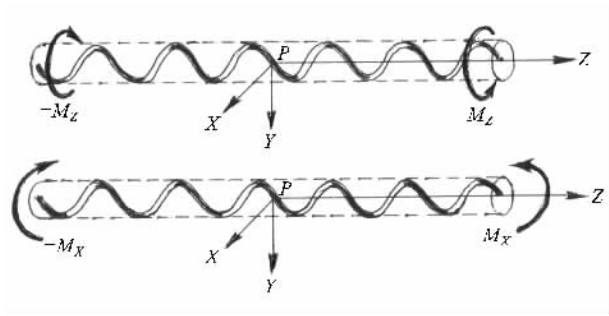


图 3 受扭和受弯的细长螺旋杆

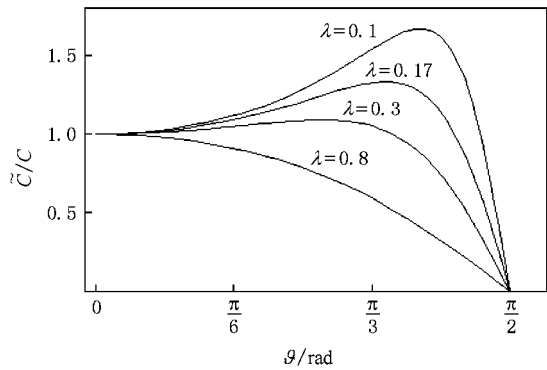


图 4 等效抗扭刚度 \tilde{C} 随 ϑ_0 的变化曲线

3. 螺旋杆的等效抗弯刚度

在螺旋细杆两端施加绕 X 轴的力矩 M_X 和 $-M_X$, M_X 在 $(P-xyz)$ 中的投影式为

$$M_X = M_X X^0 = M_X [\cos\varphi i - \sin\varphi (\cos\vartheta j - \sin\vartheta k)] \quad (9)$$

在此力矩作用下螺旋杆绕 X 轴作整体弯曲(图 3). 弯曲变形引起的绕 X 轴的转角记作 ϕ , 其相对 Z 轴的变化率 $\phi'_Z = d\phi/dZ$ 可变换为对弧坐标的变化率 ϕ' , 即

$$\phi' = d\phi/ds = \phi'_Z \cos\vartheta. \quad (10)$$

弯曲变形使倾角 ϑ 不再为常值, 螺旋杆变形后的弯扭度 ω 为

$$\begin{aligned} \omega &= \vartheta' i + \phi' X^0 + \phi' Z^0 = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k, \\ \omega_x &= \vartheta' + \phi' \cos\varphi, \\ \omega_y &= \phi' \sin\vartheta - \phi' \cos\vartheta \sin\varphi, \\ \omega_z &= \phi' \cos\vartheta + \phi' \sin\vartheta \sin\varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

在松弛状态下 ϕ' 和 ϑ' 均为零值. 利用上式计算 P 点处杆的内力矩 M_X , 令其与(9)式各项相等, 得到

$$A(\vartheta' + \phi' \cos\varphi) = M_X \cos\varphi, \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} &A[(\phi' \sin\vartheta - \phi'_0 \sin\vartheta_0) - \phi' \cos\vartheta \sin\varphi] \\ &= -M_X \cos\vartheta \sin\varphi, \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} &C[(\phi' \cos\vartheta - \phi'_0 \cos\vartheta_0) + \phi' \sin\vartheta \sin\varphi] \\ &= M_X \sin\vartheta \sin\varphi. \end{aligned} \quad (12c)$$

将 $\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta$ 代入(12a)式, 计算 $\Delta\vartheta'$ 对 ϕ 的积分, 忽略 ϕ' 在积分中的微小改变, 得到

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{\phi'} \left(\frac{M_X}{A} - \phi' \right) \sin\varphi, \quad (13)$$

则 M_X/A 或 ϕ' 与 ϕ' 之比为 $\Delta\vartheta$ 的同阶小量. 仅保留其一次项, 从(12b)(12c)式解出

$$\phi' = \phi' \left\{ \frac{\Delta\vartheta}{\sin\varphi} + \frac{M_X}{A\phi'} \left[1 + \left(\frac{A}{C} - 1 \right) \sin^2\vartheta_0 \right] \right\}. \quad (14)$$

将(13)式代入后导出

$$\phi' = \frac{M_X}{A} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{C} - 1 \right) \sin^2\vartheta_0 \right]. \quad (15)$$

将 M_X 与 ϕ'_Z 之商定义为与螺旋杆等效的直杆抗弯刚度, 即螺旋杆的等效抗弯刚度, 记作 $\tilde{A} = M_X/\phi'_Z$. 得到

$$\tilde{A} = A \cos\vartheta_0 \left[1 + \frac{(1-\lambda)}{2\lambda} \sin^2\vartheta_0 \right]^{-1}. \quad (16)$$

等效抗扭刚度 \tilde{A} 为 ϑ_0 的减函数, 变化曲线如图 5 所示.

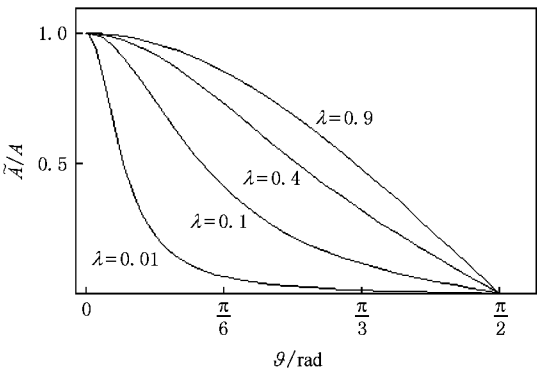


图 5 等效抗弯刚度 \tilde{A} 随 ϑ_0 的变化曲线

4. 受拉扭细长弹性杆的平衡形态

讨论受轴向力 F_0 和扭矩 M_0 作用的带原始扭率 ω_z^0 的圆截面杆, 两端的球铰约束不影响杆端的弯曲和扭转变形. 在 Kirchhoff 理论框架内, 其平衡方程可利用截面的欧拉角表示为^[3]

$$\begin{aligned} &A[\vartheta'' - (\phi')^2 \cos\vartheta \sin\vartheta] \\ &+ C(\omega_z - \omega_z^0) \phi' \sin\vartheta - F_0 \sin\vartheta = 0, \end{aligned} \quad (17a)$$

$$A(\psi''\sin\vartheta + 2\psi'\vartheta'\cos\vartheta) - C(\omega_z - \omega_z^0)\vartheta' = 0, \tag{17b}$$

$$C(\omega_z - \omega_z^0)' = 0. \tag{17c}$$

方程(17c)存在初积分 $\omega_z = \omega_{z0}$. 引入参数 $m = \lambda(\omega_{z0} - \omega_z^0)$, 写作

$$\omega_z - \omega_z^0 = m/\lambda. \tag{18}$$

将上式代入方程(17c), 各项乘以 $\sin\vartheta$, 导出另一初积分

$$\psi'\sin^2\vartheta + m\cos\vartheta = l, \tag{19}$$

其物理意义为杆截面上作用力对截面中心的主矩沿 Z 轴的投影守恒. 积分常数 $l = M_0/A$, M_0 为主矩的 Z 轴投影, 等于杆端作用的扭矩 M_0 的模. 杆的初始状态为直杆时, M_0 与截面内力绕 z 轴的扭矩平衡

$$M_0 = C(\omega_{z0} - \omega_z^0), \tag{20}$$

即 $l = m$. 如外加扭矩 M_0 始终保持常值, 则参数 l 与 m 恒保持相等. (19) 式化作

$$\psi'\sin^2\vartheta - l(1 - \cos\vartheta) = 0. \tag{21}$$

利用(18)(21)式消去方程(17a)中的变量 ψ' 和 $\omega_z - \omega_z^0$, 引入 $p = 2F_0/A$, 得到变量 ϑ 的解耦的微分方程

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} + Q(\vartheta) = 0, \tag{22}$$

函数 $Q(\vartheta)$ 定义为

$$Q(\vartheta) = \frac{l^2\sin\vartheta}{4}\left[\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{-4} - \frac{2p}{l^2}\right]. \tag{23}$$

方程(22)的常值特解 ϑ_0 , 即 $Q(\vartheta_0) = 0$ 的解对应于杆的平衡状态. 其中 $\vartheta_0 = 0$ 或 π 为平凡解, 对应于受拉扭或压扭的直杆状态. ϑ_0 的非平凡解为

$$\vartheta_0 = 2\arccos\left(\sqrt[4]{\frac{l^2}{2p}}\right), \tag{24}$$

与杆的螺旋线平衡状态相对应, 以 ϑ_0 为螺旋线相对中轴线的倾角, 其存在条件为

$$2p/l^2 > 1. \tag{25}$$

方程(17a)提供了与 ϑ_0 对应的 $\psi' = \omega_0$ 应满足的条件

$$2\omega_0(\omega_0\cos\vartheta_0 - l) + p = 0. \tag{26}$$

可从中确定螺旋线半径 $R = \sin\vartheta_0/\omega_0$ 与轴向拉力 F_0 之间的关系. 其与扭矩 M_0 的关系由(20)式确定. 螺旋线倾角 ϑ_0 随参数 $2p/l^2$ 的增大而增大, 当 $2p/l^2$ 向 4 趋近时, 非平凡解 ϑ_0 趋近 90° (图 6). 此时螺距趋近于零, 螺旋线接近由多个叠放的平面圆环连成的曲线. 但实际上此极限状态不可能发生. 对于具有

一定粗细的实体杆, 在 ϑ_0 到达 90° 以前螺圈之间必相互接触, 此后 ϑ_0 即保持不变. 而接触力的出现将使 Kirchhoff 模型失去依据.

5. 平衡状态的稳定性与分岔

为判断平衡状态的稳定性, 引入扰动量 $x = \vartheta - \vartheta_0$, 只保留 x 的一次项, 从方程(22)导出平衡状态 ϑ_0 附近的线性化扰动方程

$$\frac{d^2x}{ds^2} + cx = 0, \tag{27}$$

其中常数 $c = (dQ/d\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_0}$ 展开为

$$c = \frac{l^2}{4}\left\{\left[\left(\cos\frac{\vartheta_0}{2}\right)^{-4} - \frac{2p}{l^2}\right]\cos\vartheta_0 - \sin^2\vartheta_0\right\}. \tag{28}$$

稳态解 ϑ_0 的一次近似 Lyapunov 稳定性取决于参数 c 的符号,

$$c \begin{cases} > 0 \text{ 稳定,} \\ < 0 \text{ 不稳定.} \end{cases} \tag{29}$$

对于 $\vartheta_0 = 0$ 的平凡解, 其稳定性条件即周知的 Greenhill 公式^[6]

$$2p/l^2 \begin{cases} < 1, \text{ 或 } F_0 < F_{0cr} \text{ 稳定,} \\ > 1, \text{ 或 } F_0 > F_{0cr} \text{ 不稳定,} \end{cases} \tag{30}$$

其中 $F_{0cr} = M_0^2/4A$. 对于 $\vartheta_0 = 2\arccos(\sqrt[4]{l^2/2p})$ 的非平凡解, 满足 $2p/l^2 > 1$ 的存在条件即同时满足稳定性条件. 从而证明, $2p/l^2$ 是判断螺旋线平衡状态存在性的重要参数, 以 $2p/l^2 = 1$ 为分岔点. $2p/l^2 < 1$ 时存在唯一的稳定直杆平衡状态, $2p/l^2 > 1$ 时, 直杆状态转为不稳定, 出现稳定的螺旋杆状态. 图 6 为 ϑ_0 的稳态值随 $2p/l^2$ 变化的分岔图, 分别以实心和空心曲线表示稳定和不稳定平衡状态. 但仅适用于螺圈之间尚未接触情形.

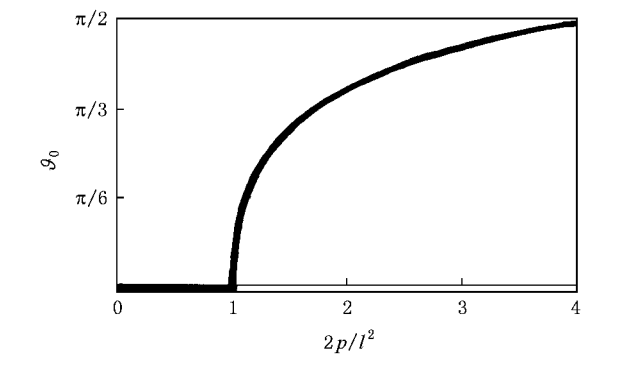


图 6 ϑ_0 的稳态值随 $2p/l^2$ 变化的分岔图

6. 受拉扭弹性杆形成超螺旋形态的定性分析

讨论带原始扭率 ω_z^0 的圆截面杆在轴向拉力 F_0 和扭矩 M_0 作用下的平衡状态. 设初始时拉力 F_0 和扭矩 M_0 满足 $2p/l^2 < 1$ 条件, 处于稳定的直杆平衡状态. 在 M_0 保持不变的条件下增大拉力 F_0 , 则 $2p/l^2$ 单调增大, 直杆状态保持到分岔值 $2p/l^2 = 1$ 时结束. 随后在 $2p/l^2 > 1$ 条件下, 转变为稳定的螺旋杆状态. 随着拉力 F_0 的增大, ϑ_0 角从零开始随 $2p/l^2$ 的增大而增大, 螺距随之缩小. 对于给定的扭矩 l 和倾角 ϑ_0 , 螺旋线半径 R 由(21)式确定:

$$R = \frac{\sin^3 \vartheta_0}{l(1 - \cos \vartheta_0)}. \quad (31)$$

将上式对 ϑ_0 求导, 得到

$$\frac{dR}{d\vartheta_0} = \frac{\sin^2 \vartheta_0 (2 \cos \vartheta_0 - 1)}{l(1 - \cos \vartheta_0)}. \quad (32)$$

导数 $dR/d\vartheta_0$ 的符号随 ϑ_0 角改变:

$$\frac{dR}{d\vartheta_0} \begin{cases} > 0, & 0 < \vartheta_0 < 60^\circ, \\ < 0, & 60^\circ < \vartheta_0 < 90^\circ. \end{cases} \quad (33)$$

表明螺旋线半径 R 从零开始随 ϑ_0 角的增大而增大, 至 $\vartheta_0 = 60^\circ$ 时到达最大值, 然后转为随 ϑ_0 角增大而逐渐减小.

根据上节的分析, 螺旋线状态在 $2p/l^2 > 1$ 条件下为稳定的平衡状态. 但极端细长的直螺旋杆却有可能整体失稳. 其稳定性可利用与螺旋杆等效的直杆抗弯刚度 \tilde{A} 和抗扭刚度 \tilde{C} 判断. 引入与等效直杆对应的参数

$$\tilde{l} = M_0/\tilde{A}, \tilde{p} = 2F_0/\tilde{A}, 2\tilde{p}/\tilde{l}^2 = 4\tilde{A}F_0/M_0^2, \quad (34)$$

其中 \tilde{A}, \tilde{C} 为螺旋线倾角 ϑ_0 的函数. 如(8)(16)式所示. 由于等效抗弯刚度 \tilde{A} 随 ϑ_0 的增大而减小, 参数 $2\tilde{p}/\tilde{l}^2 < 2p/l^2$. 因此当 $2p/l^2 > 1$ 时, 仍可能满足 $2\tilde{p}/\tilde{l}^2 < 1$ 条件, 使螺旋杆的中轴线保持为稳定的直线. 继续增大拉力 F_0 , 使 $2\tilde{p}/\tilde{l}^2$ 增大到 $2\tilde{p}/\tilde{l}^2 = 1$ 的分岔值时, 根据等效直杆的稳定性条件, 与螺旋杆等效的稳定直杆状态结束. 随后在 $2\tilde{p}/\tilde{l}^2 > 1$ 条

件下, 中轴线转变为螺旋线. 对应的细长螺旋杆再次卷绕, 形成超螺旋形态. 用同样方法分析再次卷绕的超螺旋, 引入参数

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{l}} &= M_0/\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{p}} = 2F_0/\tilde{\tilde{A}}, \\ 2\tilde{\tilde{p}}/\tilde{\tilde{l}}^2 &= 4\tilde{\tilde{A}}F_0/M_0^2, \end{aligned} \quad (35)$$

其中的等效抗弯刚度 $\tilde{\tilde{A}}$ 和抗扭刚度 $\tilde{\tilde{C}}$ 定义为

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A} \cos \tilde{\vartheta}_0 \left[1 + \frac{(1 - \tilde{\lambda})}{2\tilde{\lambda}} \sin^2 \tilde{\vartheta}_0 \right]^{-1}, \quad (36)$$

$$\tilde{\tilde{C}} = \tilde{C} \cos \tilde{\vartheta}_0 \left[1 + (\tilde{\lambda} - 1) \sin^2 \tilde{\vartheta}_0 \right]^{-1},$$

其中 $\tilde{\vartheta}_0$ 为超螺旋的倾角, $\tilde{\lambda} = \tilde{C}/\tilde{A}$. 随着拉力 F_0 的

继续增大, 当 $2\tilde{\tilde{p}}/\tilde{\tilde{l}}^2 = 1$ 条件满足时, 超螺旋的等效直杆状态结束, 直中轴线转变为螺旋线, 形成更高级次的超螺旋.

若将最初形成的螺旋杆称为零级超螺旋, 再次卷绕形成的状态称为一次超螺旋. 继续此过程, 形成二次、三次、乃至更高级次的超螺旋. 上述 Thompson/Champney 实验现象的力学过程可由此得到定性的理论解释.

7. 结 论

文中基于弹性杆的 Kirchhoff 模型导出细长螺旋杆的等效抗弯和抗扭刚度. 利用此等效刚度概念, 以及弹性直杆和螺旋杆的平衡稳定性条件, 可以对 Thompson/Champney 实验显示的受拉扭弹性细杆形成超螺旋形态的多次卷绕现象作定性解释. 由于 Kirchhoff 模型的无分布力假设条件的局限性, 文中的分析不适用于卷绕过程中螺旋杆的螺圈之间出现接触的情形. 此外, 定性的稳定性分析虽能解释超螺旋形态的形成, 但不能描述直杆失稳后转变为螺旋杆的变形过程. 对于实验中观察到的直杆失稳后在中端产生突变式屈曲的复杂过程, 可参阅 Coyne, Thompson 和 van der Heijden 的工作^[6-8].

- [1] Bouchiat C, Mezard M M 2000 *Euro. Phys. Journ. E* **2** 377
- [2] Travers A A, Thompson M T 2004 *Phil. Trans. Royal Society London* **362** 1265
- [3] Thompson J M T, Champney A R 1996 *Proc. Roy. Soc. A* **452** 117

- [4] Liu Y Z 2006 *Nonlinear Mechanics of Thin Elastic Rod* (Beijing: Tsinghua University Press and Springer) (in Chinese) [刘延柱 2006 弹性细杆的非线性力学 (北京: 清华大学/斯普林格出版社)]
- [5] Liu Y Z, Sheng L W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2305 (in Chinese) [刘延柱、盛立伟 2007 物理学报 **56** 2305]

- [6] Coyne J 1990 *IEEE J. of Oceanic Engng.* **15** 72
- [7] van der Heijden G H M , Thomson J M T 2000 *Nonlin. Dynamics* **21** 71
- [8] Thompson J M T , van der Heijden G H M , Neukirch S 2002 *Proc. Roy. Soc. London A* **458** 959

Qualitative analysis of supercoiling configuration of a thin elastic rod under tension and twist^{*}

Liu Yan-Zhu^{1†} Xue Yun²⁾

¹ *Dept. Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China*

² *School of Mechanical and Automation Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200233, China*

(Received 19 October 2008 ; revised manuscript received 30 November 2008)

Abstract

The supercoiling configuration of a thin elastic rod is discussed on the basis of Kirchhoff's model. The equivalent twisting stiffness and bending stiffness of a thin helical rod are derived. The stability and bifurcation of a thin elastic rod under tension and twist are analyzed, and the results can be applied to determine the stability of a thin helical rod by use of the equivalent stiffness. In the case when the rod is under constant twist and increasing tension force the straight equilibrium can be unstable and transfers to helical equilibrium. When the tension force increases further the straight thin helical rod can be unstable and twins to a supercoiling state. Therefore the forming process of supercoiling configuration of a rod under tension and twist observed in Thompson/Champney experiment can be explained qualitatively.

Keywords : thin elastic rod , Kirchhoff's kinetic analogy , equivalent stiffness , supercoiling configuration

PACC : 0320 , 4630C , 4630L

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.10472067).

[†] E-mail : liuyzhe@online.sh.cn