

椭圆手征波导的传输特性^{*}

徐 进[†] 王文祥 岳玲娜 宫玉彬 魏彦玉

(电子科技大学物理电子学院大功率微波电真空器件技术国防重点实验室 成都 610054)

(2009 年 1 月 1 日收到 2009 年 2 月 18 日收到修改稿)

首先给出了填充手征媒质的一般柱结构中耦合波方程的解耦过程,然后根据完备本征函数展开对椭圆手征波导中的混合模式进行了详细分析,给出具体的场表达式及色散关系.指出在与椭圆结构相关的耦合问题中,不仅存在 TE 与 TM 模式之间的耦合,还存在偶型模与奇型模式的耦合.通过数值计算对椭圆离心率以及手征导纳对色散特性的影响进行了讨论.

关键词:椭圆手征波导,马丢函数,模式分裂

PACC:4270Y,5235H

1. 引言

填充手征媒质的波导在集成光学、定向耦合器及其他微波毫米波器件中有着潜在的应用,使得这类新型波导得到了人们的普遍关注^[1].对横截面为圆和矩形的手征波导人们已经进行了大量的研究^[2-4].圆手征波导的严格求解方法为分离变量法,而对于矩形手征波导则不存在解析解.因而人们采用了各种数值方法:有限差分^[5]、有限元^[6]、耦合波方程^[7]以及并矢格林函数^[8]等进行分析.对于椭圆结构,Cheng 采用矢量波函数推导了椭圆手征波导的特征方程,并对损耗进行了计算^[9].之后董建峰等人对椭圆手征波导及椭圆手征光纤采用分离变量法进行了分析^[10].我们通过对波动方程及边界条件的分析,发现传统椭圆波导中定义的偶型模和奇型模并不能单独满足这里遇到的复杂边界条件,所以有必要做进一步研究.

本文先给出在引入手征导纳参数后的本构关系下的柱结构中各场分量之间的关系,及解耦过程,再对椭圆情况进行详细讨论.当波导中填充手征性质、磁化等离子体或铁氧体等导致电场和磁场耦合的材料,使得椭圆结构中偶型模与奇型模发生耦合,对应

的特征方程具有更复杂的形式.通过数值计算我们对手征参量及椭圆离心率对传输特性的影响进行了讨论,并与圆手征波导进行比较.由于椭圆结构不存在模式简并,所以即使填充了手征媒质仍不存在模式分裂,这一结论也与我们的数值计算结果一致.

2. 理论分析

各向同性手征媒质的本构关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{j} \zeta \mathbf{B}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{j} \zeta \mathbf{E} + \mu^{-1} \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ζ 为手征参量, μ 为磁导率, ϵ 为介电常数.这里假设柱结构中的波沿 z 轴正向传播,所有场分量隐含含有因子 $\exp(\mathbf{j} \beta z - \mathbf{j} \omega t)$,其中 β 为传播常数.根据本构关系与无源空间中 Maxwell 方程组中的两个旋度方程,可以得到

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{j} \omega \mathbf{B} = \mathbf{j} \omega \mu (\mathbf{H} - \mathbf{j} \zeta \mathbf{E}),$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{j} \omega \mathbf{D} = -\mathbf{j} \omega \epsilon \mathbf{E} + \omega \zeta \mu (\mathbf{H} - \mathbf{j} \zeta \mathbf{E}) \quad (2)$$

电、磁场的矢量表达式分别为 $\mathbf{E} = E_{x1} \hat{x}_1 + E_{x2} \hat{x}_2 + E_z \hat{z}$ 和 $\mathbf{H} = H_{x1} \hat{x}_1 + H_{x2} \hat{x}_2 + H_z \hat{z}$,其中 \hat{x}_1 , \hat{x}_2 和 \hat{z} 为柱坐标系下的三个正交单位矢量.将这两表达式代入方程组(2),我们可以得到各场分量之间的对应关系

^{*} 国家自然科学基金重点项目(批准号 60532010),大功率微波电真空器件技术重点实验室基金(批准号 9140C050401070C05)和教育博士点基金(批准号 20070614041)资助的课题.

[†] E-mail: xj@uestc.edu.cn

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial x_2} = j\beta E_{x_2} + \omega\zeta\mu H_{x_1}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial x_1} = j\beta E_{x_1} - \omega\zeta\mu H_{x_2}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 E_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial (h_1 E_{x_1})}{\partial x_2} \right] = j\omega\mu H_z + \omega\zeta\mu E_z, \quad (5)$$

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial x_2} = j\beta H_{x_2} - j\omega(\epsilon + \zeta^2\mu)E_{x_1} + \omega\zeta\mu H_{x_1} \quad (6)$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial x_1} = j\beta H_{x_1} + j\omega(\epsilon + \zeta^2\mu)E_{x_2} - \omega\zeta\mu H_{x_2} \quad (7)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 H_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial (h_1 H_{x_1})}{\partial x_2} \right] = -j\omega(\epsilon + \zeta^2\mu)E_z + \omega\zeta\mu H_z. \quad (8)$$

这里 h_1 和 h_2 为与坐标系选取相关的 Lamé 系数. 通过对 (3) (4) (6) 和 (7) 式同时求解可以将各横向电、磁场分量用纵向场来表示, 采用矩阵的形式来表示, 即

$$\begin{bmatrix} E_{x_1} \\ E_{x_2} \\ H_{x_1} \\ H_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ja & b & c & jd \\ -b & ja & -jd & c \\ e & jf & ja & b \\ -jf & e & -b & ja \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial x_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial x_2} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial x_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= [-\beta^3 + 2\omega^2\zeta^2(\epsilon\mu^2 - \beta^2) + \omega^2\mu\epsilon\beta]/M_1, \\ b &= -\omega\mu\zeta(\beta^2 + \omega^2\epsilon\mu)/M_1, \\ c &= 2\omega^2\zeta\beta\mu^2/M_1, \\ d &= \omega\mu(\omega^2\epsilon\mu - \beta^2)/M_1, \\ e &= -2\omega^2\mu\beta\zeta(\epsilon + \zeta^2\mu)/M_1, \\ f &= [\omega\beta^2(\epsilon + \mu\zeta^2) - \omega^3\zeta^2\epsilon\mu^2 - \omega^3\epsilon^2\mu]/M_1, \\ M_1 &= \beta^4 - 4\omega^2\zeta^2\beta^2\mu^2 - 2\omega^2\beta^2\mu\epsilon + \omega^4\epsilon^2\mu^2. \end{aligned} \quad (10)$$

将 (9) 式中的各横向分量再代入 (5) 和 (8) 式则可以得到纵向电、磁场的表达式

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 E_z + p_1 E_z + jp_2 H_z &= 0, \\ \nabla_1^2 H_z + jp_3 E_z + p_4 H_z &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} p_1 &= -\omega[\alpha(\epsilon + \mu\zeta^2) - \mu\zeta b]/M_2, \\ p_2 &= \omega\mu\alpha(b - d\zeta)/M_2, \\ p_3 &= -\omega[\alpha(\epsilon + \mu\zeta^2) + f\mu\zeta]/M_2, \end{aligned}$$

$$p_4 = \omega\mu\alpha(b\zeta + f)/M_2, \quad M_2 = b^2 + df. \quad (12)$$

这里 ∇_1^2 为横向二维 Laplacian 算符

$$\nabla_1^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]. \quad (13)$$

从 (11) 式中可以看到由于手征导纳的引入导致纵向电场与磁场发生耦合. 若要进行解耦需要引入两新函数 U_+ 和 U_- 来表示纵向电场和磁场, 即

$$\begin{aligned} E_z &= U_+ + U_-, \\ H_z &= (g_+ U_+ + g_- U_-), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 g_+ 和 g_- 为待定系数. 将 (14) 式代入 (11) 式我们可以得到关于 U_+ 和 U_- 去耦后的 Helmholtz 方程

$$\nabla_1^2 U_{\pm} + (S_{\pm})^2 U_{\pm} = 0. \quad (15)$$

相应的系数 S_{\pm} 和 g_{\pm} 表达式为

$$\begin{aligned} (S_{\pm})^2 &= [p_1 + p_4 \pm \sqrt{(p_1 - p_4)^2 - 4p_2 p_3}]/2, \\ g_{\pm} &= [p_1 - (S_{\pm})^2]/p_2. \end{aligned} \quad (16)$$

这样通过分离变量我们就得到了手征柱结构中场的一般表达式. 然后根据具体坐标系的选取便可以确定 Helmholtz 方程 (15) 的解 U_{\pm} 具体表达式. 电磁场问题总的来说是对波动方程在具体的边界条件下进行求解. 对于理想金属壁边界条件

$$E_z|_s = 0, \quad \hat{\tau} \cdot \mathbf{E}|_s = 0, \quad (17)$$

这里 s 为金属边界表面, 假设 \hat{n} 为表面的单位法向量, 单位向量 $\hat{\tau}$ 的定义为 $\hat{\tau} \times \hat{n} = \hat{z}$. 对于坐标系的选取, 为求解方便需尽量使各坐标与结构表面垂直或相切. 这里假设 \hat{x}_2 与金属表面相切, 而 \hat{x}_1 与之垂直. 则 (17) 式的第二个边界条件可表示为

$$\begin{aligned} E_{x_2}|_s &= -\frac{b}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial x_1} + j\frac{a}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial x_2} \\ &\quad - j\frac{d}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial x_1} + \frac{c}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial x_2}|_s = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

由 (17) 式中第一个边界条件知纵向电场在边界表面的切向导数也应为 0, 所以 (18) 式可进一步简化为

$$-\frac{b}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial x_1} - j\frac{d}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial x_1} + \frac{c}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial x_2}|_s = 0. \quad (19)$$

这里我们考虑椭圆波导填充手征媒质的情况, 在椭圆柱坐标系 ($x_1 = \xi, x_2 = \eta, z = z$) 下 Lamé 系数为 $h_1 = h_2 = h\sqrt{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)/2}$, 其中 h 为椭圆半焦距长度. 此时 Helmholtz 方程的完备解为

$$\begin{aligned} U_{\pm} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{en\pm} J e_n(\xi, q_{\pm}) c e_n(\eta, q_{\pm}) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} A_{on\pm} J o_n(\xi, q_{\pm}) s e_n(\eta, q_{\pm}), \end{aligned} \quad (20)$$

这里 J_{en}, J_{on} 分别代表 n 阶径向偶型、奇型马丢函数, ce_n, se_n 分别为 n 阶角向偶型、奇型马丢函数, 参数 $q_{\pm} = h^2(S_{\pm})^2/4$, $A_{en\pm}$ 和 $A_{on\pm}$ 为待定系数. 将上式代入(14)式则可以得到纵向电、磁场的具体表达式:

$$\begin{aligned} E_z = & \sum_{n=0}^{\infty} A_{en+} J_{en}(\xi, q_+) ce_n(\eta, q_+) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} A_{en-} J_{en}(\xi, q_-) ce_n(\eta, q_-) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_{on+} J_{on}(\xi, q_+) se_n(\eta, q_+) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_{on-} J_{on}(\xi, q_-) se_n(\eta, q_-), \\ H_z = & jg_+ \sum_{n=0}^{\infty} A_{en+} J_{en}(\xi, q_+) ce_n(\eta, q_+) \\ & + jg_- \sum_{n=0}^{\infty} A_{en-} J_{en}(\xi, q_-) ce_n(\eta, q_-) \\ & + jg_+ \sum_{n=1}^{\infty} A_{on+} J_{on}(\xi, q_+) se_n(\eta, q_+) \\ & + jg_- \sum_{n=1}^{\infty} A_{on-} J_{on}(\xi, q_-) se_n(\eta, q_-). \end{aligned} \quad (21)$$

假设椭圆手征波导的边界为 $\xi = \xi_0$, 此时边界条件可表示为

$$E_z|_{\xi_0} = 0, -b \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - jd \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + c \frac{\partial H_z}{\partial \eta} \Big|_{\xi_0} = 0. \quad (22)$$

从(11)式可知, 电场和磁场需具有相同的奇偶属性, 虽然纵向场的偶型或奇型分量均能单独满足(22)式中第一个边界条件. 但由于纵向场的耦合, 使得单一奇型或偶型场表达式不能在边界上处处满足(22)中的第二个条件(Neumann 条件). 对于填充磁化等离子体的椭圆波导, 电场与磁场同样存在耦合, Sferides 等对角向马丢函数在 $(0-\pi/2)$ 上进行积分以消去角向分量来近似满足边界条件^[11]. 这里我们利用角向马丢函数的正交性在边界处进行严格匹配处理, 得到特征方程的矩阵表达式:

$$\begin{pmatrix} A & O_1 & B & O_2 \\ O_3 & A_1 & O_4 & B_1 \\ C & D & E & F \\ D_1 & C_1 & F_1 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_e^+ \\ A_o^+ \\ A_e^- \\ A_o^- \end{pmatrix} = 0, \quad (23)$$

其中的元素均为子矩阵, 等式左边列向量中的元素对应(21)式中的各系数组成的子列向量. 先定义两对角矩阵 JE_{\pm}, JO_{\pm} , 其对角元素分别为 $Je_i(\xi, q_{\pm})$

($i = 0, 1, 2, \dots$) 和 $Jo_i(\xi, q_{\pm})$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), 以及由马丢函数正交处理后得到的 4 个矩阵 CC, SS, CS_{\pm} 和 SC_{\pm} , 其中元素表示如下:

$$\begin{aligned} CC_{ij} &= \int_0^{2\pi} ce_i(\eta, q_+) ce_j(\eta, q_-) d\eta, \\ SS_{ij} &= \int_0^{2\pi} se_i(\eta, q_+) se_j(\eta, q_-) d\eta, \\ CS_{\pm ij} &= \int_0^{2\pi} ce_i(\eta, q_+) se'_j(\eta, q_{\pm}) d\eta, \\ SC_{\pm ij} &= \int_0^{2\pi} se_i(\eta, q_+) ce'_j(\eta, q_{\pm}) d\eta. \end{aligned} \quad (24)$$

表达式(23)中的 O_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 为元素为 0 的矩阵, 其他各子矩阵可表示为

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot JE_+, B = CC \cdot JE_-, A_1 = \pi \cdot JO_+, \\ B_1 &= SS \cdot JO_-, C = \pi \cdot (dg_+ - b) \cdot JE'_+, \\ D &= jcg_+ \cdot CS_+ \cdot JO_+, \\ E &= (dg_- - b) \cdot CC \cdot JE'_-, \\ F &= jcg_- \cdot CS_- \cdot JO_-, C_1 = \pi (dg_+ - b) \cdot JO'_+, \\ D_1 &= jcg_+ \cdot SC_+ \cdot JO_+, \\ E_1 &= (dg_- - b) \cdot SS \cdot JO'_-, \\ F_1 &= jcg_- \cdot SC_- \cdot JE_-, \end{aligned} \quad (25)$$

表达式中元素右上角的一撇表示求导.

3. 数值计算

由于手征材料的引入使得电场与磁场发生耦合, 波导中只能激励起耦合模式, 不存在单独的 TE, TM 或 TEM 模. 在普通矩形波导中, 具有相同 m, n 值的 TE_{mn} 与 TM_{mn} ($n > 0$) 模式为简并模式, 所以在手征波导中由于手征特性使得混合模式 HE_{mn} ($n > 0$) 发生分裂. 对于圆波导, 由于其本身的轴对称性, 其中的场分布与角度有关的模式 ($m > 1$) 在旋转 90° 后模式并不发生改变, 所以在手征材料引入后会有分裂现象. 而对于角向对称的模式 ($m = 0$) 虽然在手征圆波导中转变为混合模式, 但不会分裂. 对于椭圆波导, 结构只关于椭圆的长轴和短轴对称, 使得其中不存在简并模, 因而手征材料的引入不会引起模式分裂, 但会使得原来的 TE, TM 和偶型、奇型模这两类模式之间均会发生耦合. 一般情况下手征导纳的值很小, 特征行列式的求解阶数取 3 次计算即可达到较高精度.

椭圆离心率 $ee = 1/\cosh \xi_0$ 趋近于 0 时, 椭圆波导退化为圆波导. 在圆手征波导分裂模式的计算中,

根据 Bessel 函数阶数的正负来区别分裂模式. 由于马丢函数的阶数 n 对应马丢方程中特征值的第 n 个解, 所以不存在 n 小于 0 的情况. 在数值求解时, 离心率趋于 0 的特征方程第一和第二个根对应圆手征波导的分裂模式对. 图 1 中的曲线为手征导纳 $\zeta = 0.001\text{S}$ 时, 根据 Bessel 函数计算的圆手征波导色散结果, 而离散点为根据(23)式离心率等于 0 的计算结果, 与采用 FEM 法得到的结果一致^[6]. 在计算时采用了归一化参数, k_0 为自由空间波数, R 为椭圆长轴长度的一半. 当离心率不等于 0 时, 原分裂模式对的截止频率不再相等, 为完全独立的两个模式, 图 2(a) 为离心率等于 0.5 的色散曲线图. 图 2(b) 为椭圆长短轴比等于 2. ($ee = 0.9$) 时最低几个模式的色散曲线, 随着离心率的增加, 主模 $c\text{HE}_{11}$ 截止频率略有增加, 而高次模式的截止频率迅速上升, 使得主模的工作带宽得以拓展, 且在截止频率附近的返波现象也得到抑制. 若手征导纳 ζ 为 0 (1) 式本构关

系中的电磁场将不再发生耦合, 特征方程(23)将退化为普通椭圆波导特征方程表达式. 增加 ζ 值将导致主模的截止频率下降. 如图 3 所示, 其他高次模式也有这一现象, 这一结果与矩形和圆手征波导的结论一致.

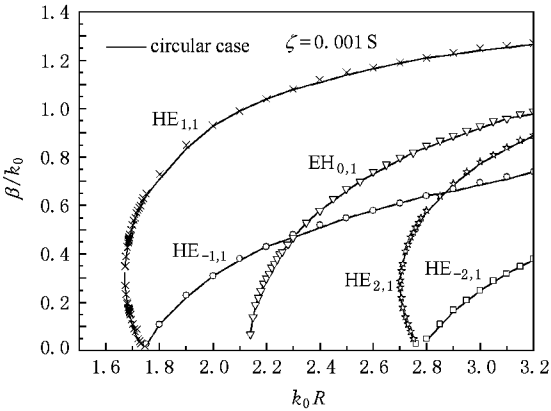


图 1 离心率等于 0 时随椭圆手征波导色散图

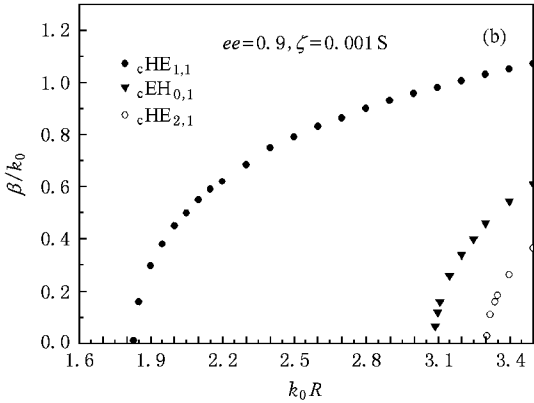
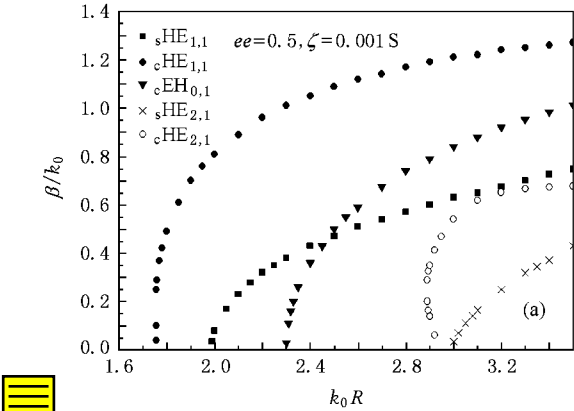


图 2 (a) 离心率等于 0.5 时的色散关系 (b) 离心率等于 0.9 时的色散关系

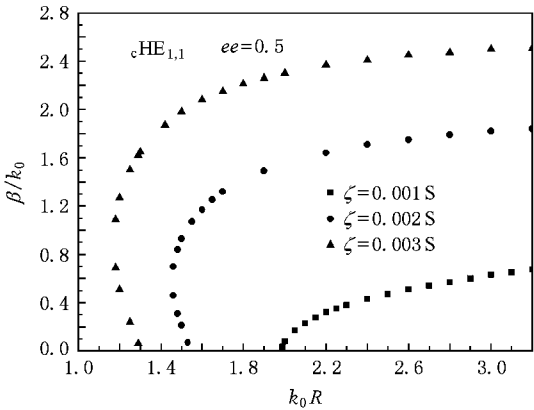


图 3 手征导纳对色散的影响

4. 结 论

本文采用分离变量给出了手征柱结构的通用解耦过程, 利用本征函数的完备表达式来对椭圆手征波导进行分析. 根据边界条件及角向马丢函数的正交关系得到了特征方程. 由于边界条件的限制使得椭圆手征波导中不仅只存在混合模, 并且单一的偶型模和奇型模不再满足金属边界条件, 需同时考虑偶、奇型分量的影响. 由于具有确定的极化方向, 普通椭圆波导中不存在简并模, 这样在填充手征媒质后原先的模式仍是各自独立的模式, 不会发生模式

分裂.通过数值计算我们分析了椭圆手征波导退化为圆手征波导的情况.随着离心率的增加,主模带宽得以增加,在截止频率附近的返波特性也会逐渐消失.在整个工作频段内只存在前向波.最后计算分析了手征导纳变化对色散的影响,与其他结构的手征波导一样,手征导纳的增加会导致模式截止频率下降.

[1] Mariotte F , Pelet P , Engheta N 1994 *Progress in Electromag . Research* **9** 311

[2] Busse G , Jacob A F 1993 *Electron . Lett .* **29** 711

[3] Kamenetskii E O 1996 *IEEE Trans . Micro . Theory Tech .* **44** 465

[4] Gerald B , Jacob A F 1995 *IEEE Trans . Micro . Theory Tech .* **43** 1182

[5] Abhay R S , Whites K W 1995 *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* **5** 144

[6] Svedin J A M 1990 *Trans . Micro . Theory Tech .* **38** 1488

[7] Xu Y S , Renato G B 1996 *Microwave and Optical Tech . Letters* **12** 279

[8] Cheng D 1997 *Physical Review E* **55** 1950

[9] Cheng D J 1994 *Microwave and Optical Tech . Letters* **7** 26

[10] Dong J F , Tao W D , Bai G R 2002 *J . of Electro . and Info . Tech .* **24** 976 (in Chinese) [董建峰、陶卫东、白贵儒 2002 电子与信息学报 **24** 976]

[11] Sferides A D , Kriezis E E 1983 *IEEE Trans . On Plasma Sci .* **11** 57

[12] Wei Y Y , Wang W X , Gong Y B , Zhou P 2000 *Acta Phys . Sin .* **49** 949 (in Chinese) [魏彦玉、王文祥、宫玉彬、周 鹏 2000 物理学报 **49** 949]

[13] Zheng Q , Zhao X P , Fu Q H 2005 *Acta Phys . Sin .* **54** 5684 (in Chinese) [郑 晴、赵晓鹏、付全红 2005 物理学报 **54** 5684]

Propagation characteristics of an elliptical chirowaveguide *

Xu Jin[†] Wang Wen-Xiang Yue Ling-Na Gong Yu-Bin Wei Yan-Yu
(Vacuum Electronics National Laboratory , College of Physical Electronics , University
of Electronic Science and Technology of China , Chengdu 610054 , China)
(Received 1 January 2009 ; revised manuscript received 18 February 2009)

Abstract

The coupled Helmholtz-type differential equations for a general cylindrical structure containing chiral material were transformed into a pair of decoupled equations , and this new set was solved to find expressions for E_z and H_z with the expansion of the complete eigen functions in elliptical chiralwaveguide. There are no pure TE(TM) or even-type(odd-type) modes existing individually in the elliptical structure if E_z and H_z are coupled with each other. The influences of eccentricity and chiral admittance on dispersion of modes are discussed in this paper.

Keywords : elliptical chirowaveguide , Mathieu function , mode bifurcation

PACC : 4270Y , 5235H

* Project supported by the State Key Program of National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60532010), the Fund of Vacuum Electronics National Laboratory (Grant No. 9140C050401070C05), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (Grant No. 20070614041).

[†] E-mail : alionxj@uestc.edu.cn