第 59 卷 第 1 期 2010 年 1 月
1000-3290/2010/59(01)/0011-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.59,No.1,January,2010
©2010 Chin.Phys.Soc.

动力学系统 Noether 对称性的几何表示*

刘 畅[1)†] 赵永红[2)] 陈向炜[3)]

1)(北京理工大学应用力学系,北京 100081)

2)(商丘师范学院物理与信息工程系,商丘 476000)

3)(商丘师范学院教务处,商丘 476000)

(2009 年 2 月 3 日收到;2009 年 3 月 26 日收到修改稿)

利用现代微分几何方法研究了 Lagrange 系统、Hamilton 系统和 Birkhoff 系统的 Noether 对称性,并导出系统相应的 Noether 守恒量,最后给出了应用算例.

关键词:动力学系统,几何表示,Noether 对称性,Noether 守恒量

PACC:0320

1. 引 言

通过讨论动力学系统的对称性来简化系统变量的个数是研究动力学系统的一个重要主题[1—4].自 Noether1918 年发表不变变分问题[5]以来,Noether 理论的研究引起了力学物理学和数学工作者的高度重视,并已经取得了一系列重要成果[3,6—17].文献[6]指出'Noether 的结论既简单又深刻,Noether 定理之完美在于它不依赖于作用量的细节,它是人类只会对自然的自信.Noether 定理给数理科学带来一片光明.'近年来,国际上十分重视利用微分几何的方法来研究动力学系统的对称性与守恒量[1,18,19].利用现代微分几何理论来描述力学系统的对称性与守恒量,不仅从数学观点上提供了更为严格、简洁、优美的表达形式,而且可以直观的从全局上把握动力学系统的物理本质.

本文就是利用微分几何的方法研究了 Lagrange 系统、Hamilton 系统和 Birkhoff 系统的 Noether 对称性,并导出相应的守恒量,最后给出了应用举例.

2. Lagrange 系统的 Noether 对称性

2.1. Lagrange 方程的几何形式

定义 1 Lagrange 动力学系统的状态空间为切丛流形 TQ,且 Lagrange 函数为 $L:TQ\mapsto R$,在切丛流形 TQ 上的动力学向量场为

$$D_L \doteq \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\ddot{q}^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i},$$

切丛流形 TQ 上的 1-形式为

$$\theta_L \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\mathrm{d}q^i,$$

则 Lagrange 系统动力学方程的几何形式为

$$L_{D_L}\theta_L = \mathrm{d}L. \tag{1}$$

显然可证(1)式等价于通常形式的 Euler-Lagrange 方程[19].

2.2. Lagrange 系统的 Noether 定理

如果 Lagrange 动力学系统在流 ψ_ε 作用下满足

$$L\circ\psi_\varepsilon = L(q^i+\varepsilon X^i,\dot{q}^i+\varepsilon Y^i) = L,$$

因为

$$\begin{aligned}&L(q^i+\varepsilon X^i,\dot{q}^i+\varepsilon Y^i)\\&=L(q^i,\dot{q}^i)+\varepsilon\left(X^i\frac{\partial L}{\partial q^i}+Y^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right),\end{aligned}$$

其中 $Y^i=\sum_j\frac{\partial X^i}{\partial q^j}\dot{q}^j$,则 Lagrange 系统是 Noether 对称的.也就是说,如果向量场 X 是 Lagrange 系统的 Noether 对称性向量场,则

$$\sum_i X^i\frac{\partial L}{\partial q^i}+\sum_i Y^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}=0. \tag{2}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10972127,10872084)和河南省自然科学基金(0311010900)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:liuchang101618@126.com

同时由 Lagrange 系统的 Noether 对称性可以得到相应的 Noether 守恒量.

若向量场 $X = X^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i}$ 是位形空间 Q 上的向量场,其切丛提升 $\bar{X} \in TQ$ 定义为

$$\bar{X} = X^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X^i(q))\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$
$$= X^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial X^i(q)}{\partial q^j}\dot{q}^j\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i},$$

如果向量场 X 是 Lagrange 系统的 Noether 对称性向量场,即

$$L_{\bar{X}}L(q,\dot{q}) = 0, \tag{3}$$

则

$$L_{D_L}\langle \bar{X};\theta_L\rangle = 0, \tag{4}$$

其中 $P_X = \langle \bar{X};\theta_L\rangle$ 为 Noether 守恒量.

3. Hamilton 系统的 Noether 对称性

3.1. Hamilton 方程的几何形式

定义 2 Hamilton 动力学系统的状态空间为余切丛流形 T^*Q,且 Hamilton 函数 $H:T^*Q \mapsto R$,余切丛上的动力学向量场为

$$D_H := \dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i\frac{\partial}{\partial p_i},$$

余切空间 T^*Q 上的 1-形式为 $\theta_H := p_i\mathrm{d}q^i$. 则 Hamilton 系统的动力学方程可表示为

$$i_{D_H}\omega_H = \mathrm{d}H, \tag{5}$$

其中 $\omega_H = -\mathrm{d}\theta_H = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$.

3.2. Hamilton 系统的 Noether 定理

若向量场 X 是 Hamilton 动力学系统 (T^*Q,ω,H) 的对称性向量场,则局部存在 $X = X_f$,并且 f 沿 Hami-ltonian 流是运动不变的. 反之,如果 $f:T^*Q \mapsto R$ 是运动不变的,则 X_f 是 Hamilton 系统的对称性向量场,即

$$L_{X_f}H = 0 \Leftrightarrow D_H(f) = 0. \tag{6}$$

由(6)式知:

1) Hamilton 系统的对称性向量场保辛结构;

2) Hamilton 系统的对称性向量场保 Hamilton 函数不变.

4. Birkhoff 系统的 Noether 对称性

4.1. 自治 Birkhoff 系统的 Noether 对称性

自治 Birkhoff 系统动力学方程的几何表示为[20,21]

$$i_X\Omega = -\mathrm{d}B, \tag{7}$$

其中 $\Omega = \mathrm{d}R(a) = \mathrm{d}(R_\mu(a)\mathrm{d}a^\mu)$.

自治 Birkhoff 系统的 Noether 定理:若向量场 Y 是自治 Birkhoff 系统的 Noether 对称性向量场,则有

$$L_Y\Omega = L_Y\mathrm{d}R = 0, \tag{8}$$

其中,$Y = \xi_\mu(a,\dot{a})\frac{\partial}{\partial a^\mu}$. 则由 poincaré 逆引理可知,存在规范函数 G_N 满足

$$i_Y\mathrm{d}R = \mathrm{d}G_N. \tag{9}$$

同样由(8)式可知存在函数 I 满足

$$L_YR = i_Y\mathrm{d}R + \mathrm{d}i_YR = \mathrm{d}I. \tag{10}$$

所以由(9)和(10)式可得

$$\mathrm{d}G_N + \mathrm{d}i_YR = \mathrm{d}I. \tag{11}$$

即得自治 Birkhoff 系统的 Noether 守量为

$$I = G_N - i_YR = G_N + \xi_\mu R_\mu. \tag{12}$$

4.2. 非自治 Birkhoff 系统的 Noether 对称性

非自治 Birkhoff 系统动力学方程的几何表示为[20,21]

$$i_X\hat{\Omega} = 0,$$
$$\mathrm{d}t(X) = 1, \tag{13}$$

其中,$\hat{\Omega} = \mathrm{d}\hat{R} = \mathrm{d}(R_\mu(t,a)\mathrm{d}a^\mu - B(t,a)\mathrm{d}t)$.

非自治 Birkhoff 系统的 Noether 定理:若向量场 Y 是非自治 Birkhoff 系统的 Noether 对称性向量场,则有

$$L_Y\hat{\Omega} = \lim\frac{1}{t}(\phi_t^*\hat{\Omega} - \hat{\Omega}) = 0, \tag{14}$$

其中,$Y = \xi_0(t,a,\dot{a})\frac{\partial}{\partial t} + \xi_\mu(t,a,\dot{a})\frac{\partial}{\partial a^\mu}$.

因为

$$L_Y\hat{\Omega} = L_Y\mathrm{d}\hat{R} = i_Y\mathrm{d}\mathrm{d}\hat{R} + \mathrm{d}i_Y\mathrm{d}\hat{R} = 0, \tag{15}$$

所以由 Poincaré 逆引理可知,存在规范函数 G_N 满足

$$i_Y\mathrm{d}\hat{R} = \mathrm{d}G_N. \tag{16}$$

同样由(15)式知,一定存在函数 I 满足

$$L_Y\hat{R} = i_Y\mathrm{d}\hat{R} + \mathrm{d}i_Y\hat{R} = \mathrm{d}I. \tag{17}$$

所以由(16)和(17)式可得

$$\mathrm{d}G_N + \mathrm{d}i_Y\hat{R} = \mathrm{d}I. \tag{18}$$

即得非自治 Birkhoff 系统的 Noether 守恒量

$$I = G_N + i_Y\hat{R} = G_N + \xi_\mu R_\mu - \xi_0 B. \tag{19}$$

5. 应用举例

例 1　对于四阶自治 Birkhoff 系统

$$R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0,$$

$$B = a^2 + \frac{1}{2}[(a^3)^2 + (a^4)^2],$$

当系统的对称性群 G 的无限小生成元

$$\xi_0 = \xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = 0, \xi_2 = -t,$$

则此 Birkhoff 系统存在对称性向量场

$$Y = \xi_\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} = -t\frac{\partial}{\partial a^2},$$

并且存在规范函数

$$G_N = a^2 - \frac{1}{2}t^2,$$

则系统存在 Noether 守恒量

$$I = G_N + \xi_\mu R_\mu - \xi_0 B = a^2 - ta^4 - \frac{1}{2}t^2.$$

例 2　对于二阶非自治 Birkhoff 系统

$$R_1 = 0, R_2 = ta^1,$$

$$B = \frac{1}{2}[(ta^1)^2 + (a^2)^2],$$

当系统的对称性群 G 的无限小生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = -\frac{a^2}{t}, \xi_2 = ta^1.$$

则此 Birkhoff 系统存在对称性向量场

$$Y = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_\mu\frac{\partial}{\partial a^\mu} = -\frac{a^2}{t}\frac{\partial}{\partial a^1} + ta^1\frac{\partial}{\partial a^2},$$

并且存在规范函数

$$G_N = \frac{1}{2}(a^2)^2 - \frac{1}{2}(ta^1)^2,$$

则系统存在 Noether 守恒量

$$I = G_N + \xi_\mu R_\mu - \xi_0 B = \frac{1}{2}[(a^2)^2 + (ta^1)^2].$$

6. 结　　论

因此利用微分几何的方法同样可以研究了 Lagrange 系统，Hamilton 系统和 Birkhoff 系统的 Noether 对称性，并得到了相应的守恒量，形式更为简洁，而且物理意义更为明显. 并且还可以

1. 利用动量映射的方法研究动力学系统的 Noether 定理，即只要存在动力学系统的对称性群，就可以构造出 Lagrange 系统、Hamilton 系统和 Birkhoff 系统的动量映射，可以证明这个动量映射函数就是系统的守恒量；

2. 构造出动力学系统的动量映射以后，还可以进一步研究动力学系统的对称约化问题.

[1] Marsden J E，Ratiu T S 1999 *Introduction to Mechanics and Symmetry*（New York：Springer）2nd Edition

[2] Olver P J 2000 *Applications of Lie Groups to Differential Equations*（New York：Springer）2nd Edition

[3] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties*）（Beijing：Beijing Polytechnic University Press）（in Chinese）[李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京 北京工业大学出版社]

[4] Mei F X 1993 Scien. Chin. A **23** 709（in Chinese）[梅凤翔 1993 中国科学（A 辑）**23** 709]

[5] Noether E 1918 *Invariance Variationsproblem*. *Nachr*. *Akad*. *Wiss*. *Göttingen*. *Math*. *Phys*. **1** 235

[6] Zhao Y Y，Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems*（Beijing：Science Press）p128-163（in Chinese）[赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 北京：科学出版社 第 128—163 页]

[7] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems*（Beijing：Beijing Institute of Technology Press）（in Chinese）[梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 北京 北京理工大学出版社]

[8] Chen X W，Li Y M 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 936

[9] Chen X W，Wang X M，Wang M Q 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 2003

[10] Chen X W，Li Y M 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 663

[11] Mei F X，Wu H B，Zhang Y F 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 1932

[12] Zhang Y 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 1935

[13] Shang M，Chen X W 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 2788

[14] Liu R W，Zhang H B，Chen L Q 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 249

[15] Xu X J，Mei F X，Zhang Y F 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 19

[16] Shang M，Guo Y X，Mei F X 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 292

[17] Liu H J，Fu J L，Tang Y F 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 599

[18] Arnold V I 1989 *Mathematical Methods of Classical Mechanics*（New York：Springer）2nd Edition

[19] José J，Saletan E 1998 *Classical Dynamics*：*A Contemporary Approach*（Cambridge University Press）

[20] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* Vol. Ⅱ

(Springer2Verlag, New York) 267
[21] Chen X W 2002 *Global Analysis of Birkhoffian System* (Henan: Henan University Press) (in Chinese) [陈向炜 2002 Birkhoff 系统的全局分析 (河南大学出版社)]

Geometric representation of Noether symmetry for dynamical systems*

Liu Chang[1)†] Zhao Yong-Hong[2)] Chen Xiang-Wei[3)]

1) (*Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

2) (*Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Normal College, Shangqiu* 476000, *China*)

3) (*Academic Affairs Office, Shangqiu Normal College, Shangqiu* 476000, *China*)

(Received 3 February 2009; revised manuscript received 26 March 2009)

Abstract

In this article Noether symmetry of Lagrange systems, Hamilton systems and Birkhoff systems are discussed by geometric methods. And the corresponding Noether conserved quantities are deduced.

Keywords: dynamical systems, geometric representation, Noether symmetry, Noether conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972127, 10872084), and the Natural Science Foundation of Henan Provience (Grant No. 0311010900).

† Corresponding author. E-mail: liuchang101618@126.com