

一种新型混沌系统的分析及电路实现

许 † 刘崇新 杨 韬

(西安交通大学电气工程学院, 电力设备电气绝缘国家重点实验室, 西安 710049)

(2009 年 4 月 4 日收到 2009 年 5 月 15 日收到修改稿)

研究了新混沌动力系统的基本动力学行为, 确定了新混沌系统的对称性、平衡点稳定性等相关问题。重点分析了系统参数对整个混沌系统的影响, 给出了混沌系统关于随系统参数变化的 Lyapunov 指数谱、分岔图等。据此得出在系统参数的某一区间的新混沌系统状态。最后根据新混沌系统的数学模型设计具体的实际的电子电路, 给出各种参数值的电路实验相图。

关键词: 混沌, 混沌吸引子, Lyapunov 指数, 电路实验

PACC : 0545

1. 引言

自从 1963 年, Lorenz 在三维自治系统中发现了第一个混沌吸引子以来^[1], 其混沌理论的研究和实际应用得到了极大的关注, 但供研究的系统并不多。1999 年, Chen 等发现了一种与 Lorenz 混沌系统类似, 但具有不同拓扑结构的一种新型混沌系统, 被称为 Chen 混沌系统^[2]。2002 年, Lü 等人发现了从 Lorenz 混沌系统过渡到 Chen 混沌系统的一种过渡混沌系统, 即 Lü 混沌系统^[3], 随后又发现连接 Lorenz 混沌系统、Chen 混沌系统和 Lü 混沌系统的统一混沌系统^[4]。2003 年, 刘文波等人发现了在三维连续自治非线性系统中能产生四涡卷混沌吸引子的混沌系统^[5]。2004 年, Liu 等人发现了含有平方项的三维连续自治混沌系统, 即 Liu 混沌系统^[6,7]。2005 年, Qi 等人发现了四维连续自治混沌系统^[7]。2007 年, 蔡国梁等人提出了一种三维二次的新的混沌系统, 并对该系统的动力学特性进行了充分地研究^[9]。2008 年, 禹思敏通过在三阶 Colpitts 混沌振荡器中的电感两端并联一个电容器, 构造了一种四阶 Colpitts 混沌振荡器, 使该振荡器经过倍周期分岔进入混沌状态^[10]。2009 年, 李春彪等人基于 Colpitts 方程提出了一种恒 Lyapunov 指数的三维混沌系统, 并于同年又提出了一种改进型的恒 Lyapunov 指数的混沌系统^[11,12]。新混沌系统的不断发现和构造, 促进了人们

对混沌现象更深入的研究和认识, 从而为混沌系统在电气电子测量等工程领域的应用进一步奠定了基础。

2. 新混沌系统的动力学分析及数值仿真

2006 年 Liu 提出了一种新的三阶连续自治混沌系统^[13]。由于该系统是一个新的混沌系统, 开展对其动力学特性及电路实验的研究具有重要的理论意义和实际工程应用价值。

新混沌系统的数学模型描述如下:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(z - x) - yz, \\ \frac{dy}{dt} &= by + xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -cz - 4xy.\end{aligned}\quad (1)$$

当 $a = 3.8$, $b = 2.5$, $c = 7$ 时, 有如图 1 所示的状态变量时间序列图, 如图 2 所示的混沌吸引子相图, 如图 3 所示的庞加莱映射, 如图 4 所示的功率谱图。利用 Jacobian 方法计算 Lyapunov 指数得 $\lambda_{L_1} = 0.63683$, $\lambda_{L_2} = 0$, $\lambda_{L_3} = -8.9271$ 。

从状态变量时间序列图、系统的各个相图、庞加莱映射图、功率谱以及系统的 Lyapunov 指数, 可知该系统为混沌系统。

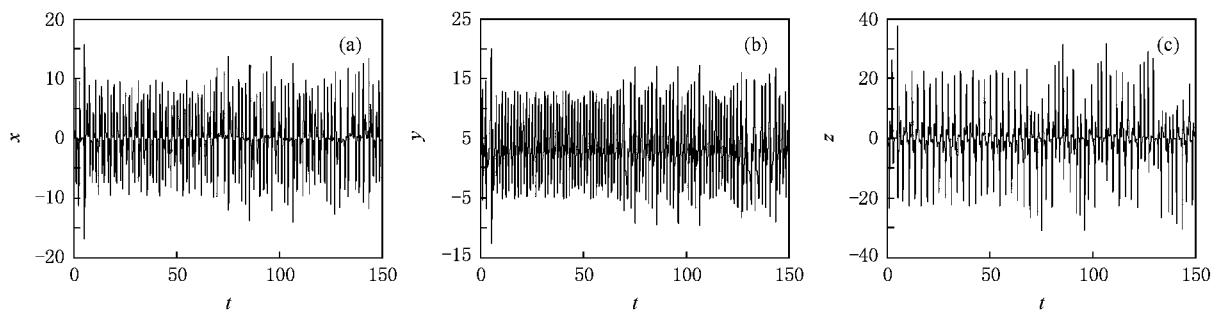
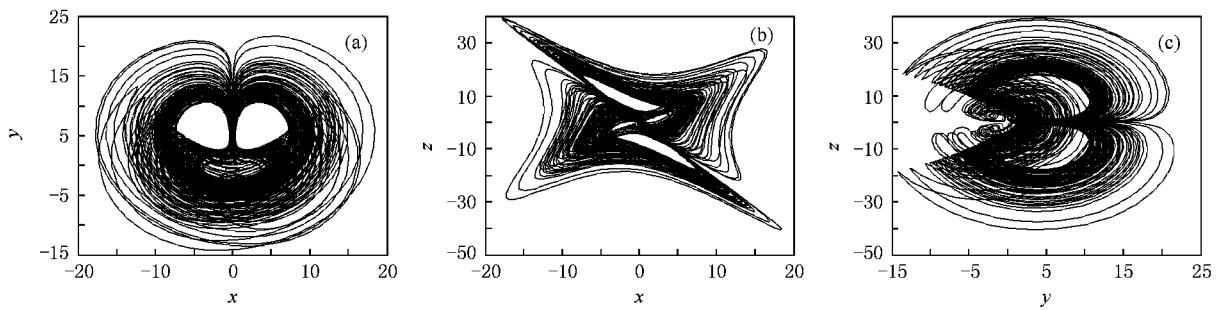
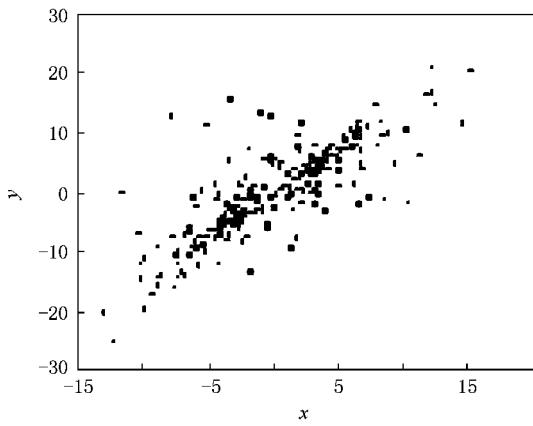
图 1 新混沌系统的状态变量时间序列图 (a) x - t ; (b) y - t ; (c) z - t 图 2 新混沌系统的混沌吸引子相图 (a) x - y ; (b) x - z ; (c) y - z 

图 3 庞加莱映射图

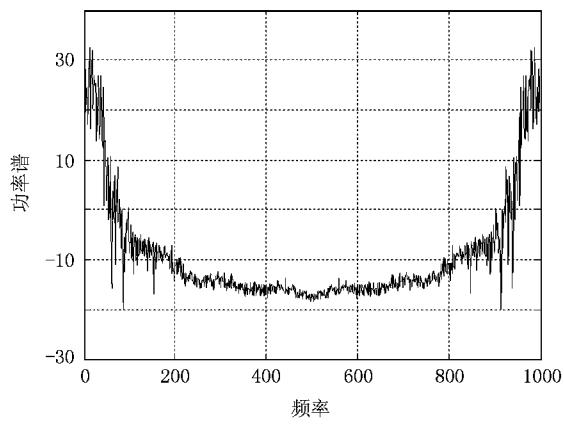


图 4 功率谱

2.1. 基本的动力学分析

2.1.1. 对称性和不变性

由于在变换 $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, -z)$ 下, 系统的方程仍保持不变, 则系统的图像关于 y 轴对称, 且这种对称性对所有的系统参数都保持不变.

2.1.2. 耗散性和吸引子的存在性

由于

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = b - a - c, \quad (2)$$

因为 $a + c > b$ 时, 所以系统(1)是耗散的, 且以指数形式收敛

$$\frac{dV}{dt} = e^{-(a+c-b)t}, \quad (3)$$

即体积元 V_0 在时刻 t 时收缩为体积元 $V_0 e^{-(a+c-b)t}$. 这意味着, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨线的每个体积元以指数率 $b - a - c$ 收缩到零. 因此, 所有系统轨线最终会被限制在一个体积为零的集合上, 且它渐进运动固定在一个吸引子上.

2.1.3. 平衡点及稳定性

令系统(1)的右边等于零,即

$$\begin{aligned} a(z-x)-yz &= 0, \\ by+xz &= 0, \\ -cz-4xy &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $a = 3.8, b = 2.5, c = 7$, 得五个平衡点分别为

$$\begin{aligned} S_0 &= (0, 0, 0); S_1 = (2.092, -1.303, 1.558); \\ S_2 &= (-2.092, -1.303, -1.558); \\ S_3 &= (2.092, 5.103, -6.099); \\ S_4 &= (-2.092, 5.103, 6.099). \end{aligned}$$

把系统(1)在平衡点 S_0 处进行线性化,得其 Jacobian 矩阵为

$$\begin{aligned} J_0 &= \begin{bmatrix} -a & -z_0 & a-y_0 \\ z_0 & b & x_0 \\ -4y_0 & -4x_0 & -c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3.8 & 0 & 3.8 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

其特征方程为

$$|\lambda I - J_0| = 0. \quad (6)$$

故其特征根为

$$\lambda_1 = -3.8, \lambda_2 = 2.5, \lambda_3 = -7.$$

由于 λ_1 和 λ_3 是负实数,而 λ_2 是正实数,故平衡点 S_0 是不稳定的且为三维空间中的一个鞍点.

同理,对于平衡点 S_1 和 S_2 ,其特征根都为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.095 + 3.837i; \\ \lambda_2 &= 1.095 - 3.837i; \\ \lambda_3 &= -10.49. \end{aligned}$$

由于 λ_1 和 λ_2 是实部为正的共轭复数,并且 λ_3 是负数,故平衡点 S_1 和 S_2 均为不稳定的鞍焦点.

对于平衡点 S_3 和 S_4 来说,其特征根都为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.403 + 7.543i; \\ \lambda_2 &= 1.403 - 7.543i; \\ \lambda_3 &= -11.11. \end{aligned}$$

由于 λ_1 和 λ_2 是实部为正的共轭复数,并且 λ_3 是负数,故平衡点 S_3 和 S_4 均为不稳定的鞍焦点.

2.2. 系统参数的影响

在一个混沌系统中,系统参数的变化往往引起系统平衡点的稳定性发生变化,此时系统也将处于不同的状态.下面利用数值仿真分析各个系统参数变化时,系统的变化情况.

2.2.1. 当 b, c 不变, a 改变时

其 Lyapunov 指数图如图 5 所示,分岔图如图 6 所示.

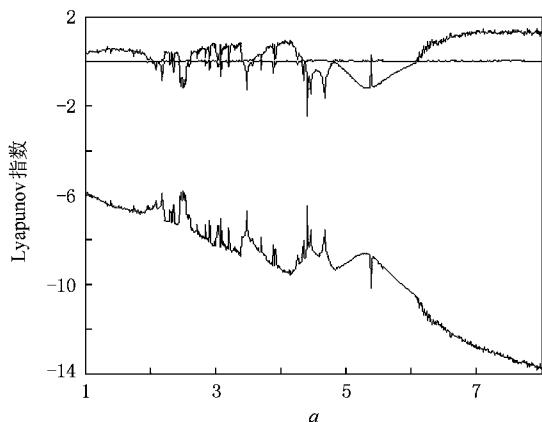


图 5 随 a 变化的 Lyapunov 指数谱

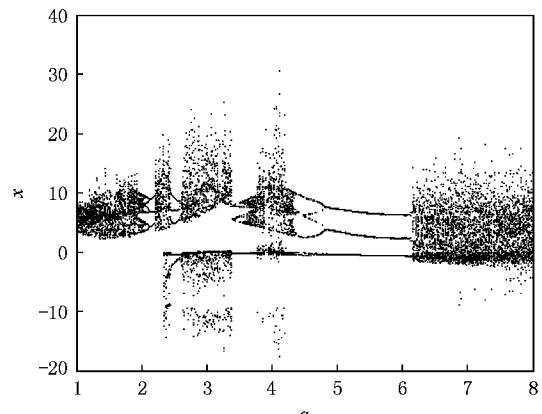


图 6 随 a 变化的分岔图

由图 5 和图 6 可知:当 $1 < a \leq 2.45$ 时,系统为混沌状态,如图 14(a)所示;当 $2.45 < a \leq 2.61$ 时,系统为周期状态,如图 14(b)所示;当 $2.61 < a \leq 3.4$ 时,系统为混沌状态,如图 14(c)所示;当 $3.4 < a \leq 3.59$ 时,系统为周期状态,如图 14(d)所示;当 $3.59 < a \leq 4.33$ 时,系统为混沌状态,如图 14(e)所示;当 $4.33 < a \leq 6.1$ 时,系统为周期状态,如图 14(f)所示;当 $6.1 < a \leq 8$ 时,系统为混沌状态,如图 14(g)所示.

通过对 Lyapunov 指数图和分岔图的分析可知当 b, c 不变, a 变化时,系统处在混沌—周期—混沌的变化中,图 14 是在不同区间中取出标志点进行实验相图研究,可证明以上结论.

2.2.2. 当 a, c 不变, b 改变时

其 Lyapunov 指数谱如图 7 所示,分岔图如图 8

所示.

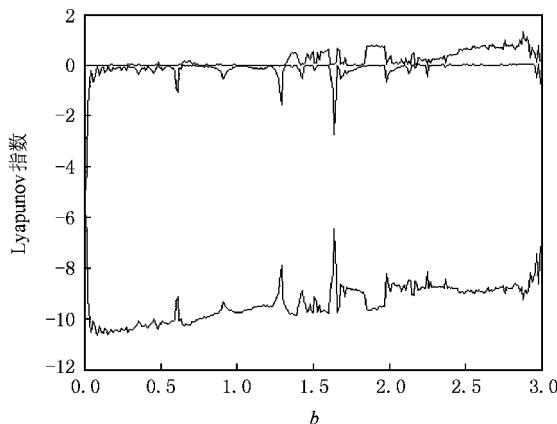


图 7 随 b 变化的 Lyapunov 指数谱

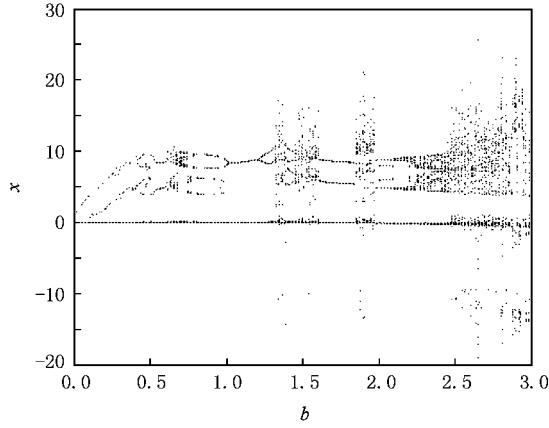


图 8 随 b 变化的分岔图

根据图 7 和图 8 可知:当 $0 < b \leq 1.31$ 时,系统为周期状态,如图 15(a)所示,其中 $b = 0.91$ 时,为倍周期现象,如图 15(e)所示;当 $1.31 \leq b < 1.61$ 时,系统为混沌状态,如图 15(b)所示;当 $1.61 \leq b < 1.83$ 时,系统为周期状态,如图 15(c)所示;当 $1.83 \leq b < 3$ 时,系统为混沌状态,如图 15(d)所示.

同样的,通过对 Lyapunov 指数图和分岔图的分析可知,当 a, c 不变, b 变化时,系统处在混沌—周期—混沌的变化中,其中有倍周期现象.图 15 是在不同区间中取出标志点进行实验相图研究,可证明以上结论.

2.2.3. 当 a, b 不变, c 改变时

其 Lyapunov 指数图如图 9 所示,分岔图如图 10 所示.

由图 9 和图 10 可知:当 $3 < c \leq 3.46$ 时,系统为周期状态,如图 16(a)所示;当 $3.46 < c < 5.15$ 时,系

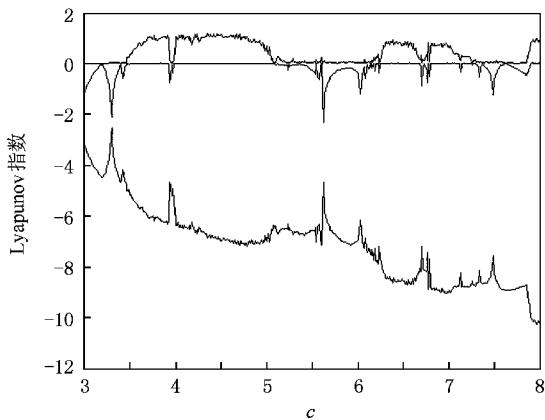


图 9 随 c 变化的 Lyapunov 指数谱

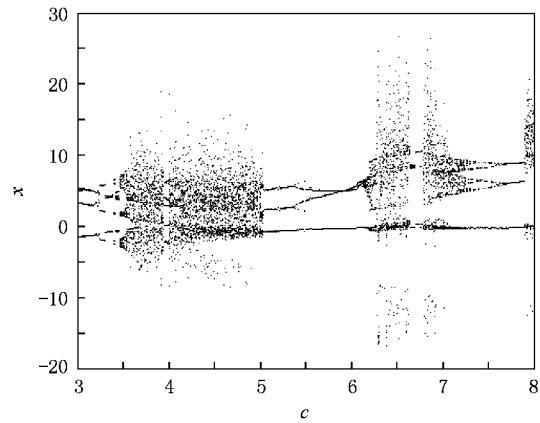


图 10 随 c 变化的分岔图

统为混沌状态,如图 16(b)所示;当 $5.15 \leq c < 6.25$ 时,系统为周期状态,如图 16(c)所示;当 $6.25 \leq c < 7.3$ 时,系统为混沌状态,如图 16(d)所示;当 $7.3 \leq c < 7.89$ 时,系统为周期状态,如图 16(e)所示.

同样的,通过对 Lyapunov 指数图和分岔图的分析可知,当 a, b 不变, c 变化时,系统处在混沌—周期—混沌的变化中,图 16 是在不同区间中取出标志点进行实验相图研究,可证明以上结论.

3. 新混沌系统的电路实验研究

自 1984 年,美籍华人 L. O. Chua 提出著名“蔡氏混沌电路”以来,有关非线性电路中混沌的研究获得了飞速的发展.例如,根据已知混沌动力学的数学模型,采用电路基本元件,设计具体的电路,从示波器中真实的观察到与数值研究一样的混沌波形及混沌相图,证实了该混沌系统在自然界中确实存在,加

深了对混沌现象的理解,推动了非线性学科的发展,拓展了电路学科的应用范围.因此,研究混沌系统的电路实现有非常重要的理论价值和实际意义.

3.1. 电路设计

采用线性电阻、线性电容、运算放大器(LM741)模拟乘法器(AD633)来设计实现新混沌系统的电路,其中运算放大器用来进行电路的加减运算,模拟乘法器用来实现新混沌系统中的非线性项.由于各电子元件容许电压的有限性,因此在电路设

计中需要先将混沌信号减小为原来的1/4.故该系统(1)可变为

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(z - x) - 4yz, \\ \frac{dy}{dt} &= by + 4xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -cz - 16xy,\end{aligned}\quad (7)$$

其中 $a = 3.8$, $b = 2.5$, $c = 7$.

根据(7)式设计的电路原理图如图11所示.

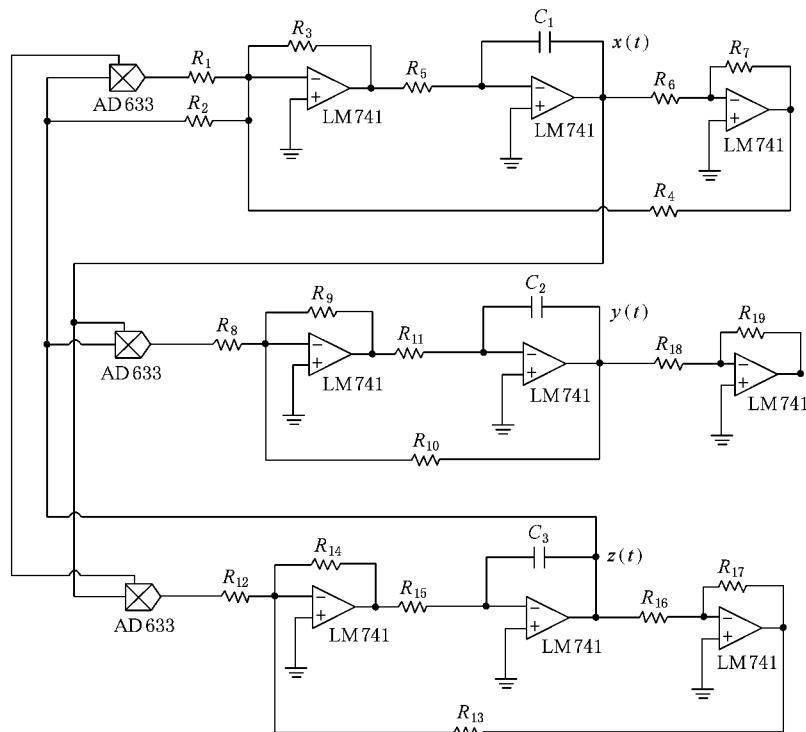


图11 新整数阶混沌系统电路原理图

由电路的基本理论以及各个组件的特性,得其数学方程为

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{R_3}{R_2 R_5 C_1} z - \frac{R_7 R_3}{R_5 R_6 R_4 C_1} x \\ &\quad - \frac{R_{19} R_3}{10 R_5 R_{18} R_1 C_1} yz, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{R_9}{R_{11} R_{10} C_2} y + \frac{R_9}{10 R_{11} R_8 C_2} xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{R_{14} R_{17}}{R_{13} R_{15} R_{16} C_3} z \\ &\quad - \frac{R_4 R_{19}}{10 R_{15} R_{18} R_{12} C_3} xy.\end{aligned}\quad (8)$$

(7)式与(8)式相比较,可得

$$a = \frac{R_3}{R_2 R_5 C_1} = \frac{R_7 R_3}{R_5 R_6 R_4 C_1}, \quad (9)$$

$$b = \frac{R_9}{R_{11} R_{10} C_2}, \quad (10)$$

$$c = \frac{R_{14} R_{17}}{R_{13} R_{15} R_{16} C_3}, \quad (11)$$

$$4 = \frac{R_{19} R_3}{10 R_5 R_{18} R_1 C_1}, \quad (12)$$

$$4 = \frac{R_9}{10 R_{11} R_8 C_2}, \quad (13)$$

$$16 = \frac{R_4 R_{19}}{10 R_{15} R_{18} R_{12} C_3}. \quad (14)$$

令 $C_1 = C_2 = C_3 = C = 1 \mu\text{F}$, $R_1, R_7, R_8, R_{12}, R_6 = 1 \text{k}\Omega$, $R_3, R_{16}, R_{18} = 3.8 \text{k}\Omega$, $R_5, R_{11}, R_{15} = 100 \text{k}\Omega$, $R_9, R_{19} = 4 \text{k}\Omega$, $R_{13} = 40 \text{k}\Omega$, $R_{14} = 15.2 \text{k}\Omega$, $R_{17} = 7 \text{k}\Omega$, 分别代入以上各式得

$$\begin{aligned} a &= \frac{38}{R_2 \times 10^{-3}} = \frac{38}{R_4 \times 10^{-3}}; \\ b &= \frac{40}{R_{10} \times 10^{-3}}; \quad c = \frac{280}{R_{13} \times 10^{-3}}. \end{aligned} \quad (15)$$

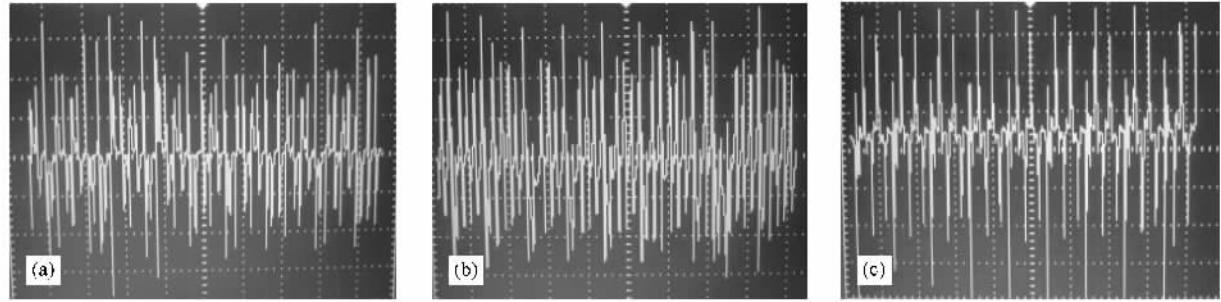


图 12 新混沌系统的状态变量时间序列实验图 (a)t-x ;(b)t-y ;(c)t-z

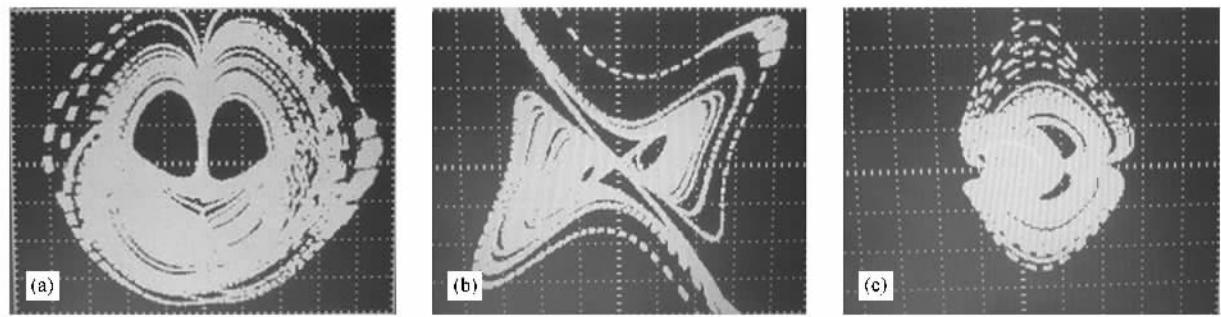


图 13 新混沌系统的混沌吸引子实验相图 (a)x-y ;(b)x-z ;(c)y-z

根据(15)式改变 R_2, R_4 即可改变参数 a , 从而得到随着 R_2, R_4 减小的各个相图, 如图 14 所示. 图 14 是在不同区间中取出标志点进行实验相图研究, 与图 5 和图 6 进行比较, 两者结论一致.

3.2.2. 令 $R_2 = R_4 = 10 \text{k}\Omega$, $R_{13} = 40 \text{k}\Omega$, 改变 R_{10}

根据(15)式改变 R_{10} 即可改变参数 b , 从而得到随着 R_{10} 减小的各个相图, 如图 15 所示. 图 15 是在

3.2. 电路实验结果

当 $R_2, R_4 = 10 \text{k}\Omega$, $R_{10} = 16 \text{k}\Omega$, $R_{13} = 40 \text{k}\Omega$ 时, $a = 3.8$, $b = 2.5$, $c = 7$. 如图 12 的状态变量时间序列实验图与数值仿真图 1 的结果一致. 图 13 的实验相图与数值仿真图 2 的结果一致.

3.2.1. 令 $R_{10} = 16 \text{k}\Omega$, $R_{13} = 40 \text{k}\Omega$, 改变 R_2, R_4

不同区间中取出标志点进行实验相图研究, 与图 7 和图 8 进行比较, 两者结论一致.

3.2.3. 令 $R_2 = R_4 = 10 \text{k}\Omega$, $R_{10} = 16 \text{k}\Omega$, 改变 R_{13}

根据(15)式改变 R_{13} 即可改变参数 c , 从而得到随着 R_{13} 减小的各个相图, 如图 16 所示. 图 16 是在不同区间中取出标志点进行实验相图研究, 与图 9 和图 10 进行比较, 两者结论一致.

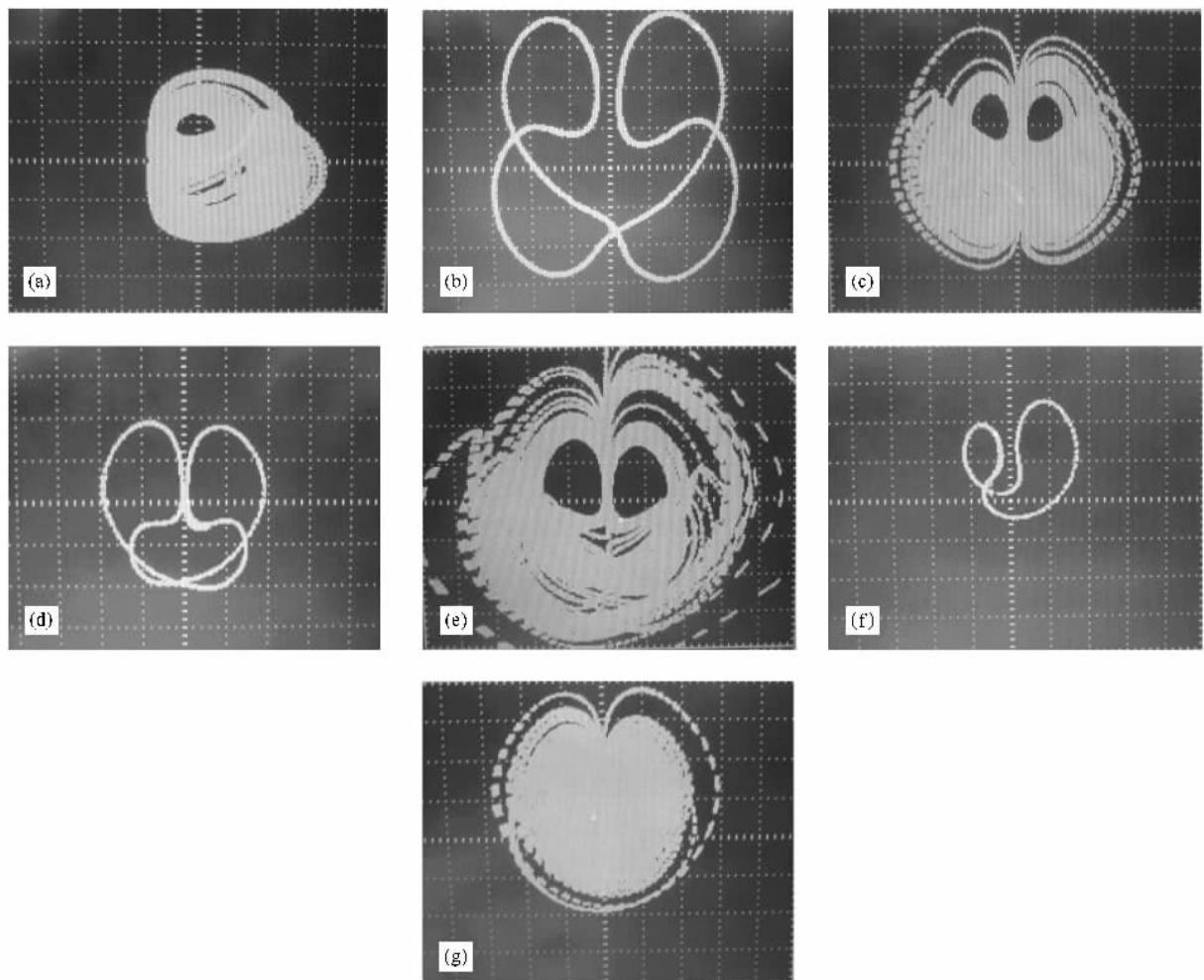


图 14 a 取不同值时的实验相图 (a) $a = 2.33$; (b) $a = 2.52$; (c) $a = 2.95$; (d) $a = 3.48$; (e) $a = 4.12$; (f) $a = 4.67$; (g) $a = 7.1$

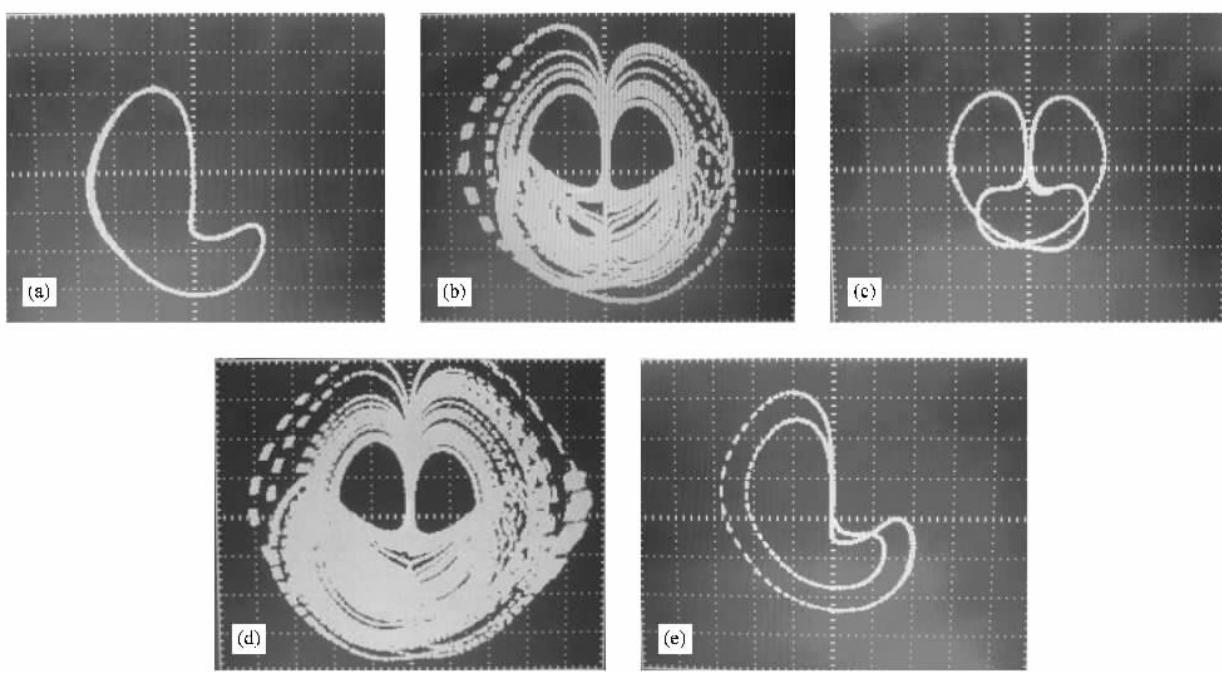


图 15 b 取不同值时的实验相图 (a) $b = 1.10$; (b) $b = 1.37$; (c) $b = 1.76$; (d) $b = 2.5$; (e) $b = 0.91$

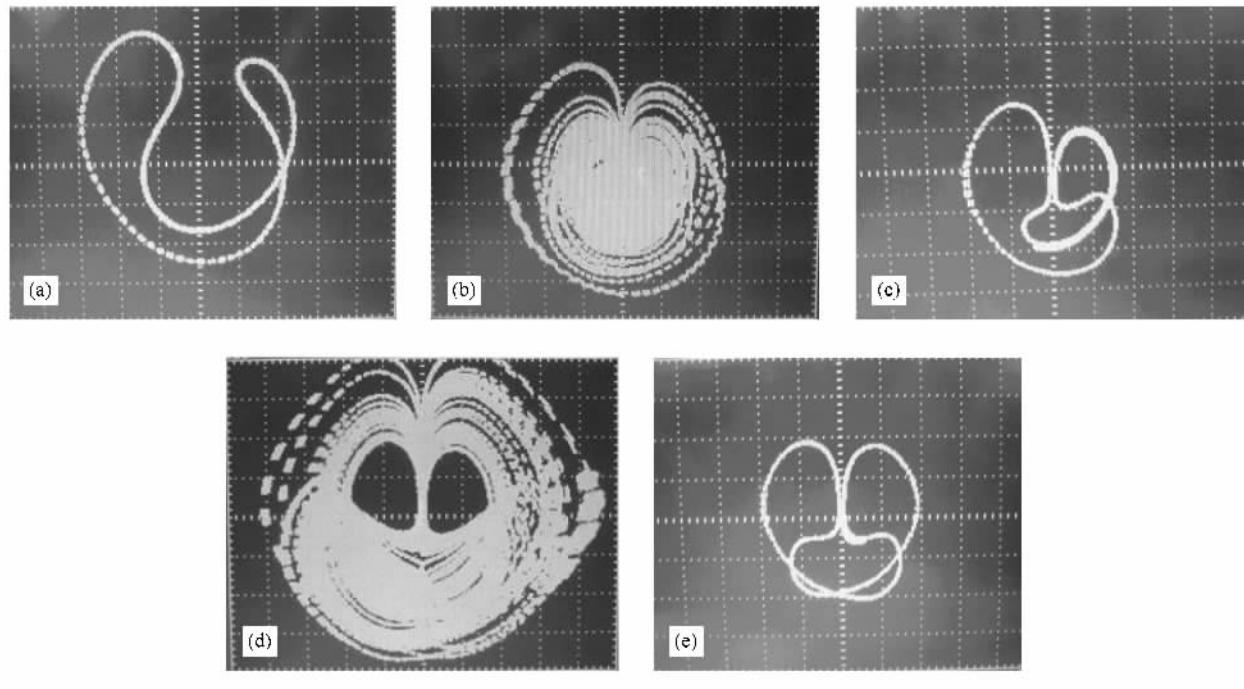


图 16 c 取不同值时的实验相图 (a) $c = 3.2$ (b) $c = 4.45$ (c) $c = 5.63$ (d) $c = 7.0$ (e) $c = 7.61$

4. 结 论

本章仔细研究了新混沌动力学的基本动力学行为,确定了新混沌系统的对称性、平衡点稳定性等相关问题。利用 Matlab 等数值仿真手段重点分析了系统参数对整个混沌系统的影响,给出了混沌系统关于随系统参数变化的 Lyapunov 指数谱、分岔图等。据此得出在系统参数的某一区间的混沌系统状态。最后根据新混沌系统的数学模型设计具体的实

际的电子电路,给出各种参数值的电路实验相图。得出结论如下:

1. 该混沌系统在 $b = 0.91$, 出现倍周期现象。
2. 该混沌系统随一个参数变化时呈现周期状态和混沌状态交替出现的规律。
3. 该混沌系统电子电路实验相图与数值仿真相图保持一致, 证明了该设计电路的正确性, 同时也证明了该混沌系统的存在性以及该混沌系统随系统参数变化时的各种状态的存在性。

-
- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atoms. Sci.* **20** 130
- [2] Chen G ,Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **9** 1465
- [3] Lü J H ,Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 659
- [4] Lü J H ,Chen G R ,Cheng D Z ,Celikovsky S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 2917
- [5] Liu W B ,Chen G R 2003 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **13** 261
- [6] Liu C X ,Liu T ,Liu K ,Liu L 2004 *Chaos ,Solutions and Fractals* **22** 1031
- [7] Wang F Q ,Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5061 (in Chinese)
[王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5061]
- [8] Qi G Y ,Chen G R ,Du S Z 2005 *Chaos ,Solutions and Fractals* **23** 1671
- [9] Cai G L ,Tan Z M ,Zhou W H ,Tu W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6230 (in Chinese)[蔡国梁、谭振梅、周伟怀、涂文桃 2007 物理学报 **56** 6230]
- [10] Yu S M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3374 (in Chinese)[禹思敏 2008 物理学报 **57** 3374]
- [11] Li C B ,Wang D C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 764 (in Chinese)[李春彪、王德纯 2009 物理学报 **58** 764]
- [12] Li C B ,Chen S ,Zhu H Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2255 (in Chinese)[李春彪、陈 谬、朱焕强 2009 物理学报 **58** 2255]
- [13] Liu C X 2006 *Far East J. Dynamical System* **8** 51

Study on a new chaotic system with analysis and circuit experiment

Xu Zhe[†] Liu Chong-Xing Yang Tao

(School of Electrical Engineering ,Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment ,
Xi'an Jiaotong University ,Xi'an 710049 ,China)

(Received 4 April 2009 ; revised manuscript received 15 May 2009)

Abstract

In this paper we study a new chaotic system which is totally different from the Lorenz chaotic system ,Chen chaotic system and Liu chaotic system. Firstly ,the basic dynamical behaviors of new chaotic system are studied. The influence of system parameter on the chaotic system is discussed through Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagram. The results between simulation and experiment are in good agreement ,thereby proving the veracity of analysis.

Keywords : chaos , chaotic attractor , Lyapunov exponent , circuit experiment

PACC : 0545