

Couette 流能量的演变*

张 亮^{1)2)†} 付伟基³⁾ 张立凤¹⁾ 吴海燕⁴⁾ 黄 泓¹⁾

1) (解放军理工大学气象学院地球物理研究室, 南京 211101)

2) (96165 部队, 乐平 333300)

3) (96251 部队, 洛阳 471003)

4) (94855 部队, 衢州 324001)

(2009 年 5 月 12 日收到; 2009 年 7 月 9 日收到修改稿)

利用 Green 函数法解析求得 Couette 流流函数的精确解, 通过定义 Couette 能量、相对能量和能量增长率讨论了初始场结构对 Couette 流能量演变的影响、能量达到最大值时对应的时间与初始场的关系、最有利于 Couette 流能量在有限时段快速增长的初始场结构, 并对 Farrell 的研究结果进行了补充和完善. 在此基础上, 进一步探讨了初值扰动对 Couette 流能量演变的影响.

关键词: Couette 流, Green 函数法, 标准模, 初值问题

PACC: 0340G, 0420J, 1140

1. 引 言

我们知道大气 Rossby 波在大气环流和中、长期天气预报中占有重要地位, 一方面它是天气尺度系统活动的背景, 另一方面它又将大尺度运动的特点以及大气环流形式的变化清晰地表现出来. 它使我们从复杂的大气现象中掌握主要环节, 从而对复杂的大气运动建立起简单的理论模式, 以便研究大气动力学的本质. 而控制大气 Rossby 波运动的是准地转正压(斜压)位势涡度方程, 若不考虑地球的旋转、不考虑非线性 Jacobian 项并假设基流是线性情形时, 准地转正压(斜压)位势涡度方程即可化为著名的平无黏 Couette 流(简称 Couette 流), 所以对 Couette 流的深入、细致地研究不仅具有理论意义, 还具有实际意义.

早在 1907 年 Orr^[1] 就指出 Couette 流不存在标准模(正规模)^[2] 形式的解, 并且它的能量在有限时段内存在快速增长的现象. 到上世纪 60 年代, Eliassen^[3], Holland^[4] 和 Case^[5] 从数学上更加严格地研究了一些流体力学方程解的完备性问题, 他们得出: 标准模只是流体运动中可能存在的离散谱部

分, 只有补充上连续谱才能构成描述所有可能的完备系统. Pedlosky^[6] 指出 Eady 模式中的标准模是不完备的, 必须补充上包括位势涡度狄拉克函数的连续谱之后才能用来描述任意的初值问题. Burger^[7] 指出连续谱是导致有限时间内 Couette 流能量发展的重要原因. 正由于标准模方法有其固有的局限性, 所以研究 Couette 流时, 应该将它看为初值问题. 尽管研究和讨论 Couette 流性质的文献很多^[8-12], 但是给出 Couette 流流函数解析表达式的文献相对较少. Rosen^[13] 得到了 Couette 流的一个一般形式的解, 并对 Couette 流能量的增长进行了简单的研究. Farrell^[14] 采用 Green 函数法解析求得了一个特殊初值情形下的 Couette 流流函数的解析表达式, 发现 Couette 流的能量在开始的一段时间内是快速增长的, 能量达到最大值后随着时间的增加又开始出现迅速的衰减现象, 并且当时间趋向无穷时, 能量趋向于零.

本文在 Farrell 研究的基础上, 通过定义 Couette 流能量、相对能量和能量增长率, 研究了初始场结构对 Couette 流能量演变的影响、能量达到最大值时对应的时间与初始场的关系、最有利于 Couette 流能量在有限时段快速增长的初始场结构, 对 Farrell 得

* 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2007CB411800, 2004CB418304)和中国气象局上海台风所台风基金(批准号: 2008ST06)资助的课题.

† E-mail: zl_0617@163.com

到的结论进行了补充和完善,并初步探讨了初值扰动对 Couette 流能量演变的影响.

2. Couette 流数学模型及其精确解

平面无黏 Couette 流的数学模型为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + y \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta \psi = 0, \quad (1)$$

它满足的初边值条件如下:初值条件

$$\psi(x, y, 0) = A \sin(m\pi y) \cos(kx); \quad (2)$$

南北方向固壁边界条件

$$\psi(x, 0, t) = \psi(x, 1, t) = 0; \quad (3)$$

东西方向周期边界条件

$$\psi(x, y, t) = \psi\left(x + \frac{2\pi}{k}, y, t\right). \quad (4)$$

其中 A 为流函数 ψ 的振幅, $m\pi$ 为流函数在南北方向波数, k 为流函数在东西方向波数,且假设 m, k 为自然数.

由文献[1—14]知,应用标准模方法 $\psi(x, y, t) = \varphi(y)e^{ik(x-ct)}$ (c 为波的传播速度)求解方程(1)是不完备的,因为方程(1)的本征值 c 是连续的实数.下面应用 Green 函数方法求解,则(1)满足

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^2} - k^2\right)G(y, y_0) = \delta(y - y_0), \quad (5)$$

其中 $\delta(y - y_0)$ 是狄拉克函数, $y_0 = c$, 解(5)可得

$$G(y, y_0) = -\frac{\sinh(ky_<) \sinh(k(1 - y_>))}{k \sinh k}, \quad (6)$$

其中 $y_< = \begin{cases} y, & y < y_0 \\ y_0, & y \geq y_0 \end{cases}$, $y_> = \begin{cases} y, & y > y_0 \\ y_0, & y \leq y_0 \end{cases}$, 具体的求解过程参见文献[14].

由 $\psi(x, y, 0) = \varphi(y) \exp(ikx)$ 知, $\varphi(y) = A \sin(m\pi y)$, 故 Couette 流流函数的解析表达式为

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \operatorname{Re} \int_0^1 G(y, c) e^{ik(x-ct)} \\ &\times \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial c^2} - k^2 \right) \varphi(c) \right] dc \\ &= \frac{A(k^2 + m^2 \pi^2)}{2 \sinh k} \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 + (m\pi - kt)^2} [\sin(k(x - yt)) \right. \\ &+ m\pi y \sinh k - \sinh(ky) \\ &\times \sin(k(x - t) + m\pi) \\ &\left. - \sin(kx) \sinh(k(1 - y))] \right] \\ &- \frac{1}{k^2 + (m\pi + kt)^2} [\sin(k(x - yt)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- m\pi y \sinh k \\ &- \sinh(ky) \sin(k(x - t) - m\pi) \\ &\left. - \sinh(k(1 - y)) \sin(kx) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

可验证(7)式就是方程(1)的解,且(7)式满足初边值条件(2), (3), (4).

若定义 Couette 流的能量为

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (\psi_x^2 + \psi_y^2) dx dy, \quad (8)$$

则方程(1)在初始时刻的能量为

$$E(0) = \frac{A^2 \pi (k^2 + m^2 \pi^2)}{4k}. \quad (9)$$

由(9)式可知,不同的初始场结构,即不同的参数 k, m, A , 对应着不同的初始能量,为了寻找在有限时段最有利于 Couette 流能量发展的初始场结构,可定义相对能量和能量增长率两个概念.令相对能量为

$$R(t) = \frac{E(t)}{E(0)}, \quad (10)$$

能量增长率为

$$\sigma(t) = \frac{1}{E(t)} \frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}, \quad (11)$$

则由(7), (8)式可得 Couette 流能量 $E(t)$ 的解析表达式为

$$\begin{aligned} E(t) &= 2\pi/k \cdot A^2 (k^2 + m^2 \pi^2)^2 [(-1 + e^{2k})m^6 \pi^6 \\ &- 16(1 + e^{2k})k^3 m^2 \pi^2 t^2 \\ &- (-1 + e^{2k})k^2 m^4 \pi^4 (-3 + t^2) \\ &+ (-1 + e^{2k})k^6 (1 + t^2)^3 \\ &- (-1 + e^{2k})k^4 m^2 \pi^2 (-3 - 2t^2 + t^4) \\ &+ 32(-1)^m e^k k^3 m^2 t^2 \cos(kt)] \\ &/ [8(-1 + e^{2k})(m^4 \pi^4 - 2k^2 m^2 \pi^2 (-1 + t^2) \\ &+ k^4 (1 + t^2)^2)^2]. \quad (12) \end{aligned}$$

由(9), (10)和(12)式式可得 Couette 流相对能量 $R(t)$ 的解析表达式为

$$\begin{aligned} R(t) &= (k^2 + m^2 \pi^2) [(-1 + e^{2k})m^6 \pi^6 \\ &- 16(1 + e^{2k})k^3 m^2 \pi^2 t^2 \\ &- (-1 + e^{2k})k^2 m^4 \pi^4 (-3 + t^2) \\ &+ (-1 + e^{2k})k^6 (1 + t^2)^3 \\ &- (-1 + e^{2k})k^4 m^2 \pi^2 (-3 - 2t^2 + t^4) \\ &+ 32(-1)^m e^k k^3 m^2 \pi^2 t^2 \cos(kt)] \\ &/ [(-1 + e^{2k})(m^4 \pi^4 - 2k^2 m^2 \pi^2 (-1 + t^2) \\ &+ k^4 (1 + t^2)^2)^2]. \quad (13) \end{aligned}$$

由于 $\sigma(t)$ 的表达式很复杂,此处不再给出.

3. 不同初值时 Couette 流动能的演变

图 1—图 4 分别显示了不同的初始场结构情形下 Couette 流相对能量随时间的变化,图 5—图 8 分别显示了不同的初始场结构情形下 Couette 流能量增长率随时间的变化. 图 1—图 8 的横坐标为时间, 纵坐标为 Couette 流相对能量和能量增长率的无量纲数值.

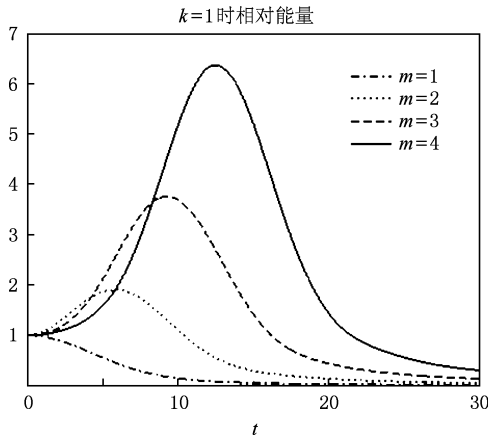


图 1 $k = 1$ 时, $R(t)$ 随 t 的变化

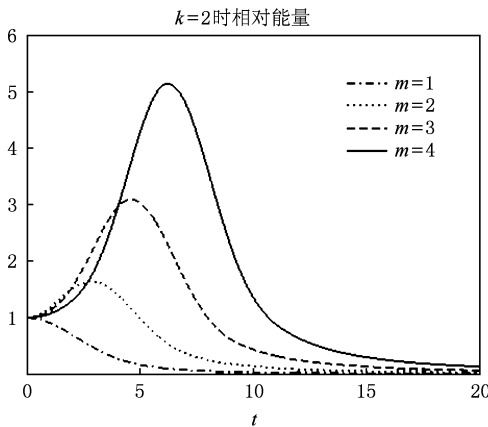


图 2 $k = 2$ 时, $R(t)$ 随 t 的变化

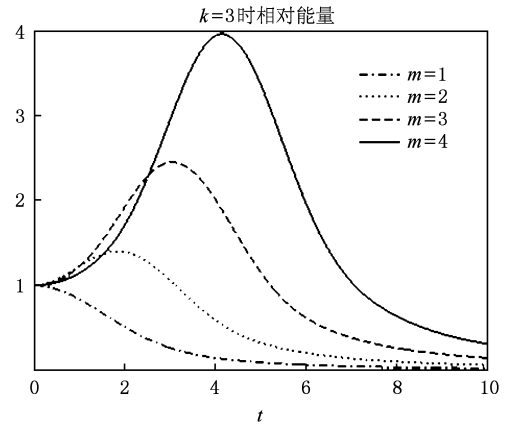


图 3 $k = 3$ 时, $R(t)$ 随 t 的变化

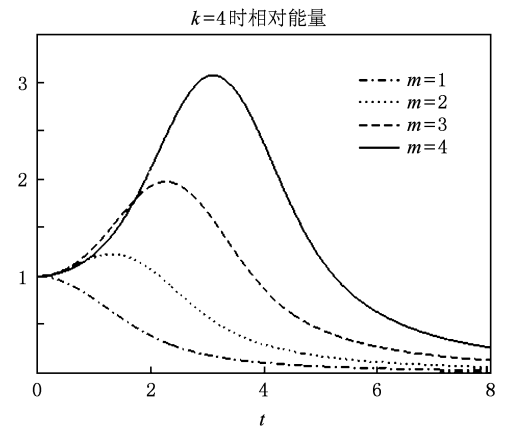


图 4 $k = 4$ 时, $R(t)$ 随 t 的变化

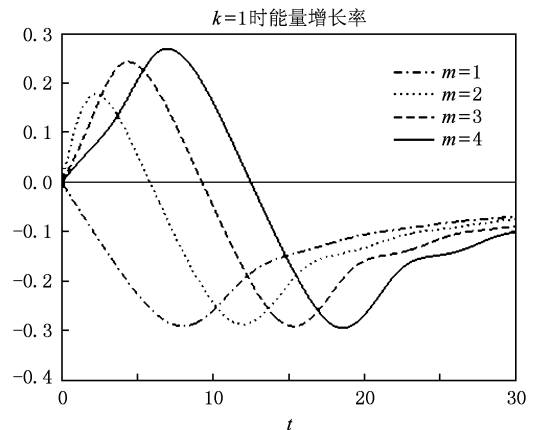


图 5 $k = 1$ 时, $\sigma(t)$ 随 t 的变化

由图 1—图 8 可看出,初始场的结构决定了 Couette 流能量能否在有限时段内快速增长,不同的初始场结构对应的 Couette 流能量的增长方式是不一样的. 当 $m = 1$ 时,Couette 流的能量都是随时间严格单调递减的,此时不会出现 Couette 流能量随时间增长现象;而当 $m > 1$ 时,Couette 流的相对能量随 m 的增加严格单调递增,随 k 的增加严格单调递减,此时 Couette 流相对能量会在开始的一段时间内快速增

长,当相对能量达到最大值后又严格单调递减,随着时间趋向无穷,相对能量趋向于零,因为此时的 Couette 流能量增长率曲线 $\sigma(t)$ 满足:存在一个正

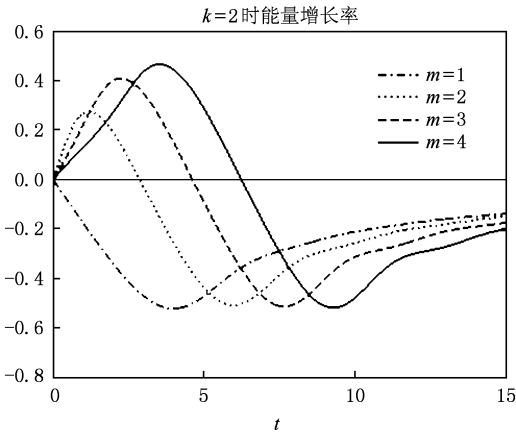


图 6 $k = 2$ 时, $\sigma(t)$ 随 t 的变化

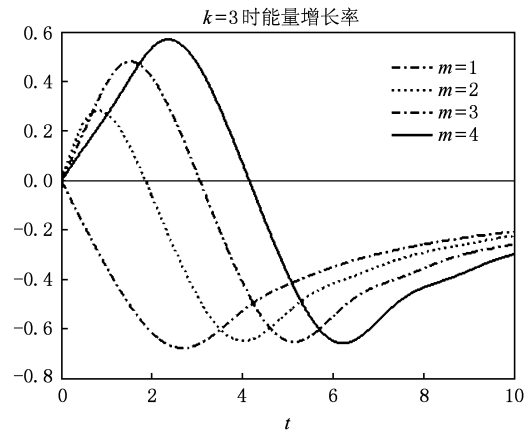


图 7 $k = 3$ 时, $\sigma(t)$ 随 t 的变化

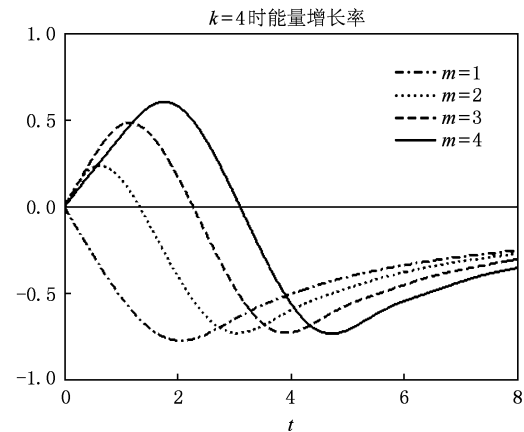


图 8 $k = 4$ 时, $\sigma(t)$ 随 t 的变化

到最小值. Farrell^[14]认为当 Couette 流相对能量达到最大值时,对应的时间为 $t = m\pi/k$. 这就是说,若定义一个新的时间变量

$$\tau = \frac{kt}{m\pi}, \tag{14}$$

当能量达到最大值时 ($\sigma(t) = 0$), 对应的新的时间变量应为 $\tau = 1$, 这个结论是否准确呢? 图 9—图 12 分别显示了不同的初始场结构情形下 Couette 流相对能量随 τ 的变化, 图 13—图 16 分别显示了不同的初始场结构情形下 Couette 流能量增长率随 τ 的变化. 图 9—图 16 的横坐标为新的时间变量 τ , 纵坐标为 Couette 流相对能量和能量增长率的无量纲数值.

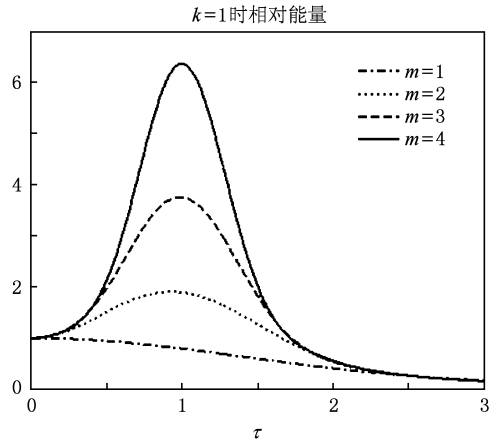


图 9 $k = 1$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

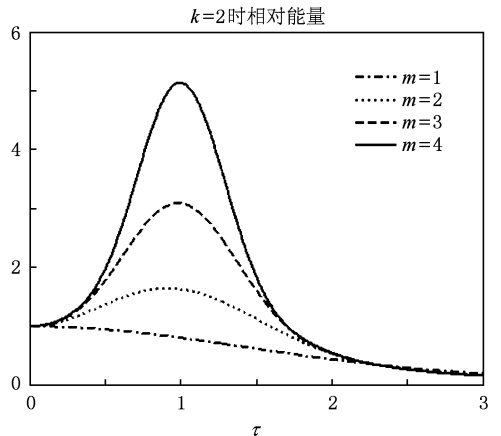


图 10 $k = 2$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

常数 t^* , 当 $t \leq t^*$ 时, $\sigma(t) \geq 0$, 而当 $t > t^*$ 时, $\sigma(t) < 0$, 且 $t \rightarrow \infty$ 时, $\sigma(t) \rightarrow 0$.

由(7)式知, 当 k, m 固定, $t = m\pi/k$ 时, 分母达

尽管从图 9—图 12 不能明显地看出 Couette 流相对能量达到最大值时对应的新的时间变量 τ 的数值, 但从图 13—图 16 可以看出, 并不是所有的初始

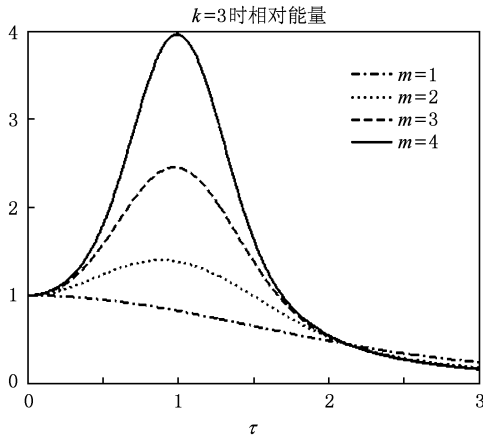


图 11 $k = 3$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

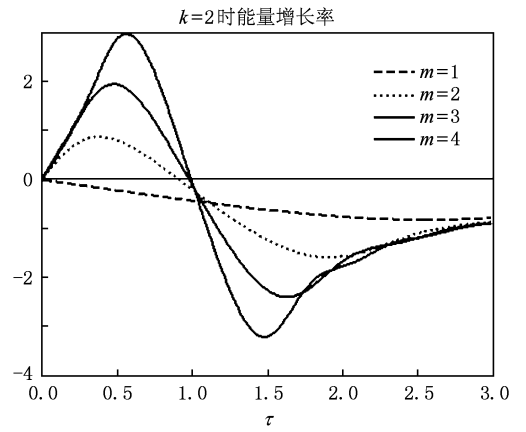


图 14 $k = 2$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

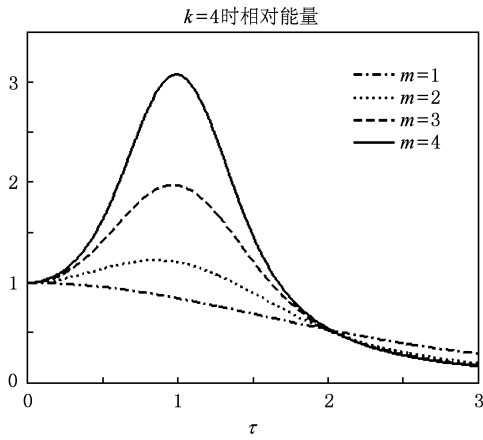


图 12 $k = 4$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

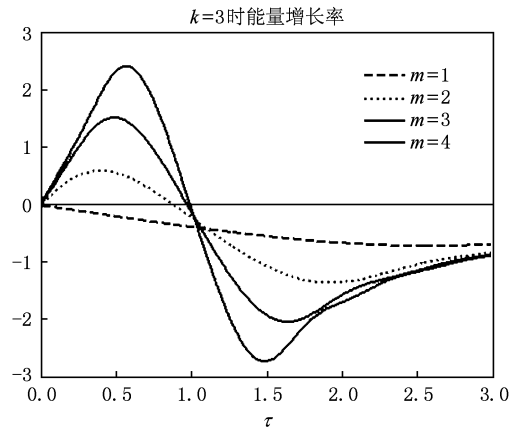


图 15 $k = 3$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

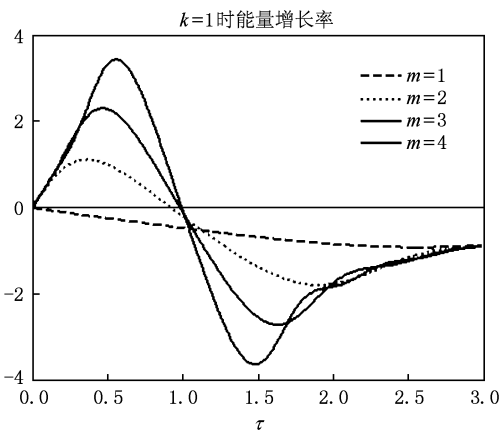


图 13 $k = 1$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

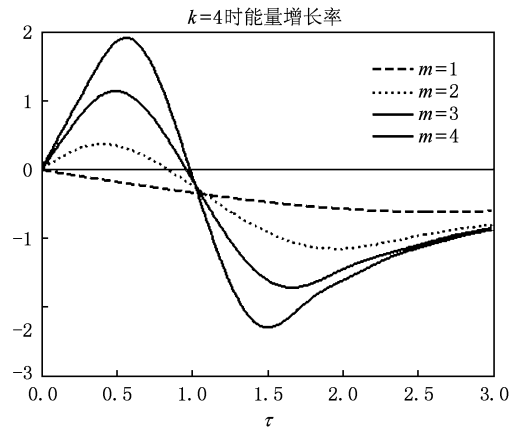


图 16 $k = 4$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

场结构 ($m > 1$) 对应的 Couette 流相对能量达到最大值的时间都是 $\tau = 1$, 例如 $m = 2$ 时的 Couette 流能量增长率曲线与 $\sigma(t) \equiv 0$ 的曲线交点与 $m = 3$

和 $m = 4$ 相比, 明显偏左. 表 1 给出了当 $\tau = 1$ 是, 不同初始场结构的 Couette 流相对能量的数值, 表 2 和表 3 分别给出了不同初始场结构的 Couette 流相对能量的最大值及其对应的 τ 的数值.

表 1 当 $\tau = 1$ 时,不同初始场结构的 Couette 流相对能量数值 R_1

R_1 $k \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	0.792	1.896	5.762	6.378	9.743	15.855
2	0.805	1.633	5.092	5.146	7.791	11.026
3	0.824	1.384	5.450	5.964	5.917	8.307
4	0.845	1.205	1.972	5.078	4.510	6.264
5	0.865	1.087	1.642	5.462	5.529	4.839
6	0.884	1.013	1.420	5.039	5.853	5.855

表 2 不同初始场结构的 Couette 流相对能量的最大值 R^*

R^* $k \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1.0	1.908	5.764	6.379	9.743	15.855
2	1.0	1.646	5.094	5.147	7.792	11.026
3	1.0	1.400	5.453	5.965	5.918	8.307
4	1.0	1.225	1.976	5.079	4.510	6.264
5	1.0	1.114	1.648	5.464	5.530	4.839
6	1.0	1.048	1.427	5.042	5.854	5.855

表 3 不同初始场结构的 Couette 流相对能量达到最大值时对应的 τ

τ $k \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	0	0.928	0.984	0.995	0.998	0.999
2	0	0.914	0.981	0.994	0.997	0.999
3	0	0.888	0.975	0.991	0.996	0.998
4	0	0.846	0.965	0.988	0.995	0.997
5	0	0.784	0.950	0.983	0.993	0.996
6	0	0.692	0.930	0.975	0.989	0.995

表 1—表 3 表明不同初始场结构的 Couette 流相对能量的最大值及其对应的时间是不同的. 由表 3 可清晰地看出,当 k 相同时,Couette 流相对能量达到最大值时对应的时间随 m 的增加呈现严格单调递增的趋势;当 m 相同时,Couette 流相对能量达到最大值时对应的时间随 k 的增加呈现严格单调递减的趋势;但不论是哪一种初始场结构,Couette 流相对能量达到最大值时对应的时间都满足 $\tau \leq 1$, 即 $t \leq m\pi/k$. 所以, Farrell^[14] 认为 Couette 流相对能量达到最大值时对应的时间是 $t = m\pi/k$ 的这个结论是不全面的.

为了寻找最有利于 Couette 流能量快速增长的初始场结构, Farrell^[14] 还研究了 Couette 流能量增长

率的最大值,指出:对任意的 m , 当 $k = 3$ 时的初始场结构最有利于 Couette 流能量在有限时段内快速发展, 即当 $k = 3$ 时, Couette 流的能量增长率在有限时段内的最大值是最大的. 此结论是否也需要补充和完善呢? 我们将不同初始场结构的 k 和 m 的数值代入 Couette 流能量增长率的解析表达式 $\sigma(t)$ 中, 并将 $\sigma(t)$ 对时间 t 进行求导, 利用 Mathematica5.0 数学软件数值计算出当 $\frac{d\sigma(t)}{dt} = 0$ 时对应的时间 t^* 和 Couette 流能量增长率的最大值 $\sigma(t^*)$. 表 4 显示了不同初始场结构情形下, Couette 流能量增长率的最大值 $\sigma(t^*)$.

表 4 不同初始场结构的 Couette 流能量增长率的最大值 $\sigma(t^*)$

$\sigma(t^*)$ $k \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	0	0.178	0.243	0.270	0.283	0.290
2	0	0.276	0.409	0.466	0.493	0.507
3	0	0.285	0.482	0.570	0.614	0.695
4	0	0.238	0.484	0.605	0.666	0.699
5	0	0.170	0.445	0.596	0.676	0.721
6	0	0.101	0.384	0.561	0.661	0.719

表 4 中黑体数值是每列 Couette 流能量增长率的最大值. 由表 4 可看出, 当 k 相同时, $\sigma(t^*)$ 随 m 的增加严格单调递增; 但当 m 相同时, $\sigma(t^*)$ 并不是随 k 的增加单调递减或单调递增的, 而是呈现出先单调递增在单调递减的趋势, 也就是说, 对于任一个 $m (m > 1)$, 都存在一个 $k(m)$, 此初始场结构对应的 Couette 流能量在有限时段内增长的最快. 由表 4 还可看出, 最有利于 Couette 流能量在有限时段快速增长的初始场结构所对应的东西波数呈现出随着南北波数的增加而单调递增的趋势.

4. 初值扰动对 Couette 流能量演变的影响

如果在 Couette 流的初值 (2) 式的基础上再叠加一个小扰动, 那么 Couette 流的能量又是如何演变的呢? 下面讨论如下三种不同情形的初值扰动对 Couette 流能量演变的影响, 这三种初值小扰动都叠加在南北方向上.

情形 1

$$\psi(x, y, 0) = A[\sin(m\pi y) + \varepsilon y(1 - y)] \cos(kx);$$

情形 2

$$\psi(x, y, 0) = A[\sin(m\pi y) + \varepsilon y(1 - y)(0.5 - y)] \cos(kx);$$

情形 3

$$\psi(x, y, 0) = A[\sin(m\pi y) + \varepsilon \sin(am\pi y)] \cos(kx).$$

其中 ε 为小扰动流函数的振幅, 设 ε, a 均为常数, 同时为了满足南北方向固壁边界条件(4)式, 只要满足 a 与 m 的乘积为整数即可.

利用 Green 函数法和 Mathematica5.0 数学软件, 解析求解出对应于上述三种不同初值的 Couette 流函数的解析表达式, 并进一步得到对应于每种情形的 Couette 流相对能量和能量增长率的表达式. 由于这些表达式很复杂, 本文不再给出.

数值试验发现, 对于前两种情形, ε 的变化对 Couette 流相对能量随时间的演变几乎没有影响; 而对于第三种情形, 不同的 ε 与不同的整数 am 对 Couette 流相对能量随时间演变的影响比较明显. 下面分析第三种初值扰动情形下, Couette 流能量的演变.

以 $k = 1$ 为例, 分别研究了当 $m = 1, m = 2, m = 4$ 时, 参数 ε 与 a 对 Couette 流相对能量和能量增长率的影响. 图 17—图 24 分别显示了当 $m = 1, a$ 分别为 2, 3, 4, 5 时, 不同的初始扰动振幅 ε 对应的 Couette 流相对能量和能量增长率随时间 τ 的演变.

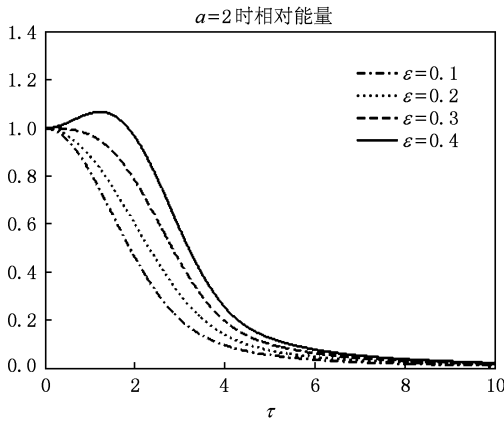


图 17 $a = 2$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

对 $k = 1, m = 1$ 的初始场, 由图 9 和图 13 知, 若初始场未受扰动, 则 Couette 流相对能量随时间是严格单调下降的, 但图 18—图 20 表明, 若初始场受到扰动, 则相对能量不再是随时间严格单调下降的了, 而是会出现能量先减少, 然后单调增加, 达到最大值后再单调下降的现象, 最终随着时间趋向无

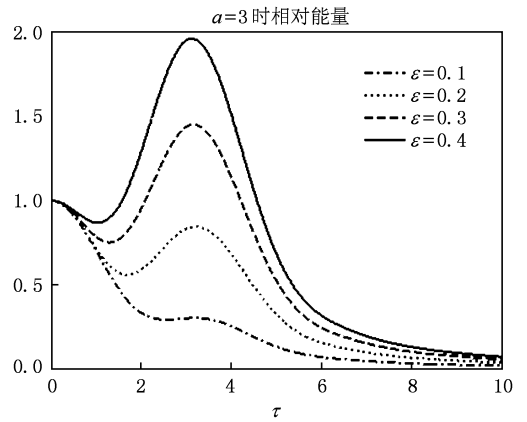


图 18 $a = 3$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

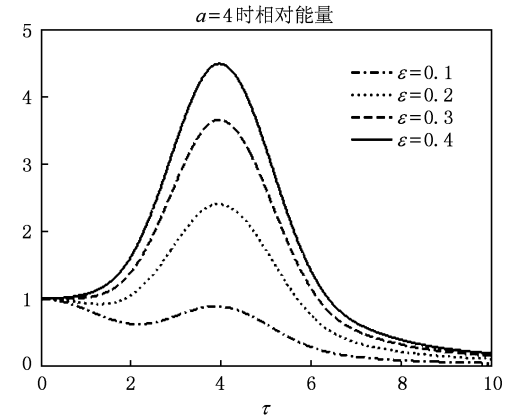


图 19 $a = 4$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

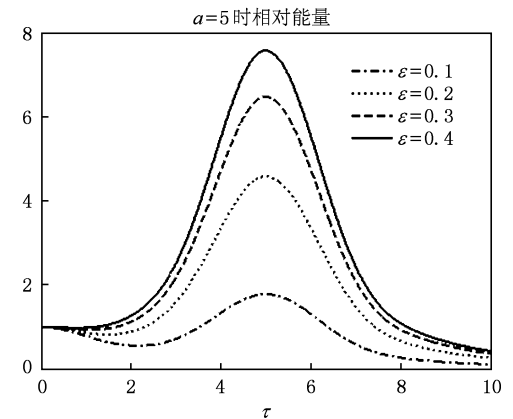


图 20 $a = 5$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

穷, 能量趋向于零. 图 18—图 20 还告诉我们, 随着南北方向扰动波数的增加, 相对能量的最大值和相对能量达到最大值时对应的时间都在严格单调增加; 若南北方向扰动波数一定, 则扰动振幅越大对

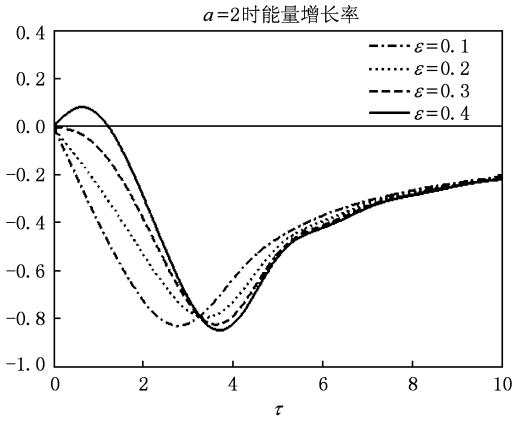


图 21 $a = 2$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

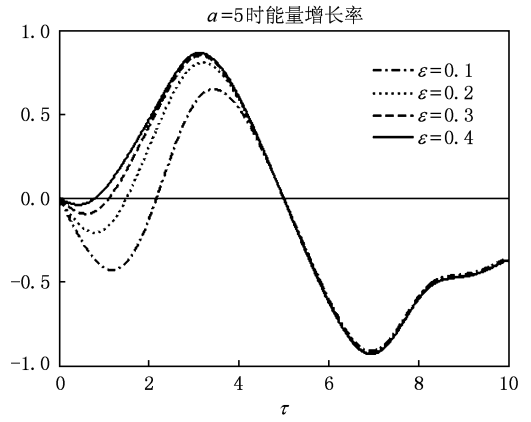


图 24 $a = 5$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

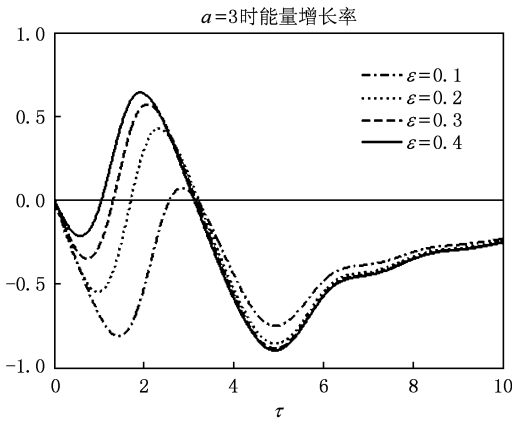


图 22 $a = 3$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

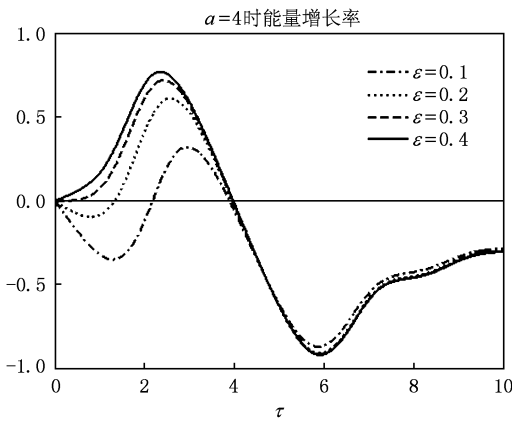


图 23 $a = 4$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

对能量随时间演变过程中一直呈现出单调衰减的现象,而有的则呈现出先单调增加再单调衰减的现象.图 21—图 24 说明,当扰动振幅相同时,Couette 流能量增长率随着南北方向扰动波数的增加单调递增;当南北方向扰动波数相同时,Couette 流能量增长率随扰动振幅的增加也单调递增.

图 25—图 32 分别显示了当 $m = 2, a$ 分别为 1.5, 2, 2.5, 3 时,不同的初始扰动振幅 ε 对应的 Couette 流相对能量和能量增长率随时间 τ 的演变.

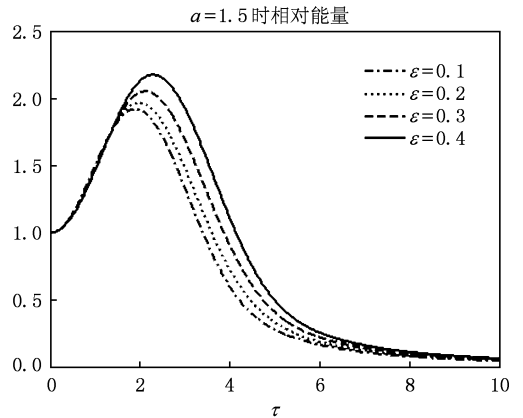


图 25 $a = 1.5$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

从图 25—图 32 可看出,当 $a = 1.5$ 时,不论是哪一种初始振幅的扰动,Couette 流相对能量都是先单调递增,然后单调递减的,不会出现能量振荡型增加或衰减的现象,此时相对能量随扰动振幅的增加而增大;而对于其他情形,能量呈现出二次增长的现象,当它第一次达到极大值时,小振幅扰动对应的相对能量要大于大振幅扰动对应的相对能量,当它第二次增长达到极大值时,小振幅扰动对应的

应的相对能量越大.图 17 和图 21 说明,初始扰动振幅 ε 的大小可能也是决定能量能否发展的一个原因,因为尽管初始扰动在经向波数相同,但不同的扰动振幅对应着不同的相对能量演变曲线,有的相

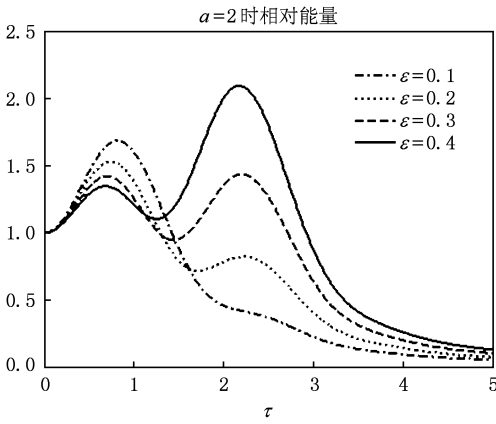


图 26 $a = 2$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

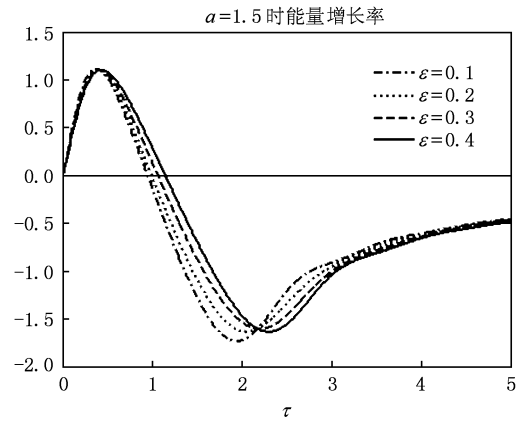


图 29 $a = 1.5$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

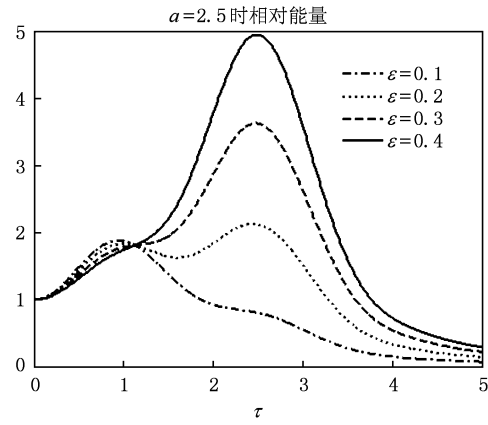


图 27 $a = 2.5$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

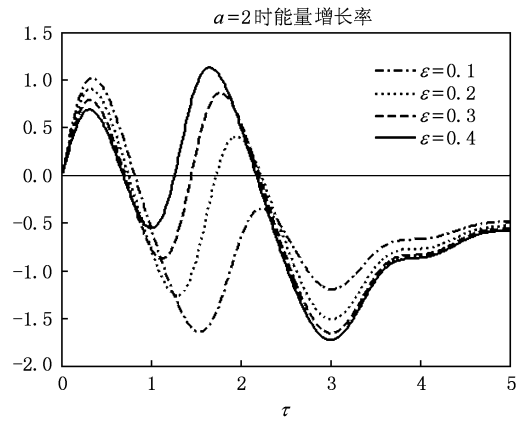


图 30 $a = 2$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

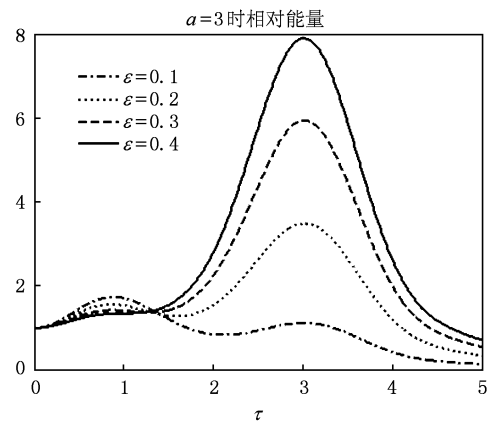


图 28 $a = 3$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

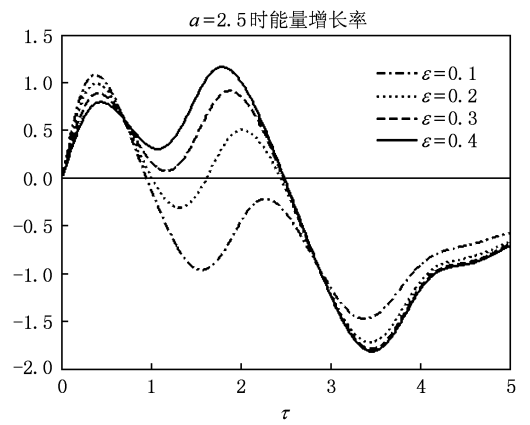


图 31 $a = 2.5$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

相对能量要小于大振幅扰动对应的相对能量,而后,相对能量将会随着时间单调衰减,直到趋向于零.初始扰动波数的不同,决定了能量的两个极值大小关系,一般而言,扰动波数越大,相对能量的第

二个极大值就越大.对于相同的扰动波数,同样满足扰动振幅越大,相对能量第一次达到的极大值越小,而第二次达到的极大值越大,且达到第二次极大值的时间也越长.

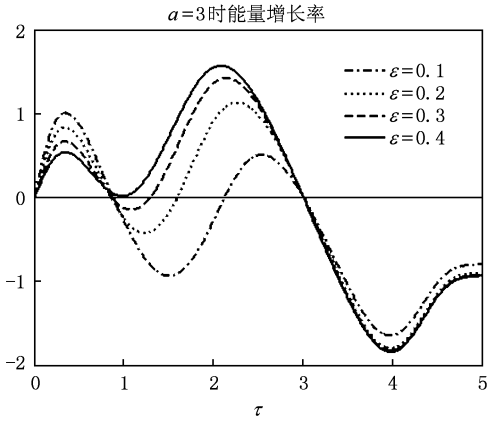


图 32 $a = 3$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

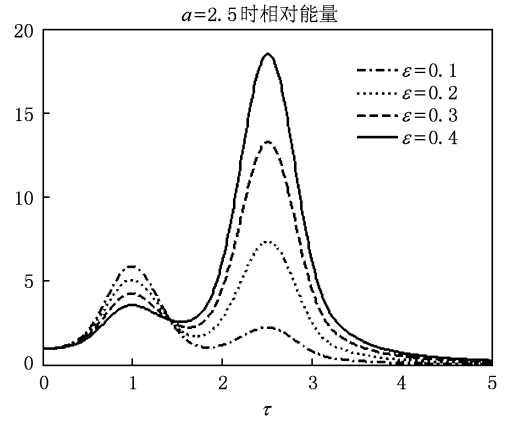


图 35 $a = 2.5$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

图 33—图 40 分别显示了当 $m = 4, a$ 分别为 1.5, 2, 2.5, 3 时, 不同的初始扰动振幅 ε 对应的 Couette 流相对能量和能量增长率随时间 τ 的演变.

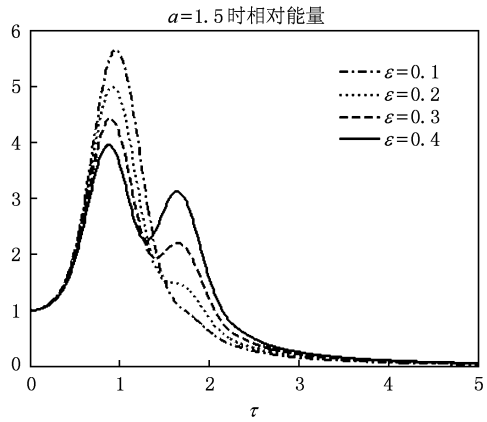


图 33 $a = 1.5$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

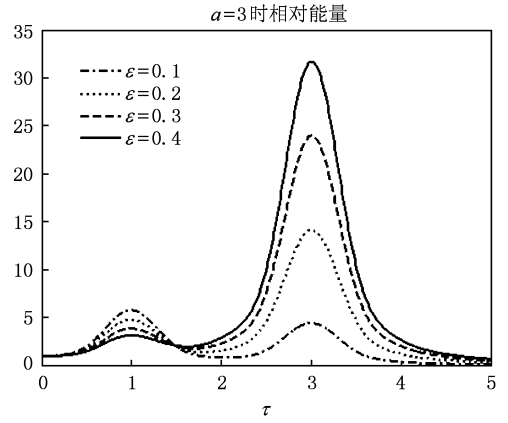


图 36 $a = 3$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

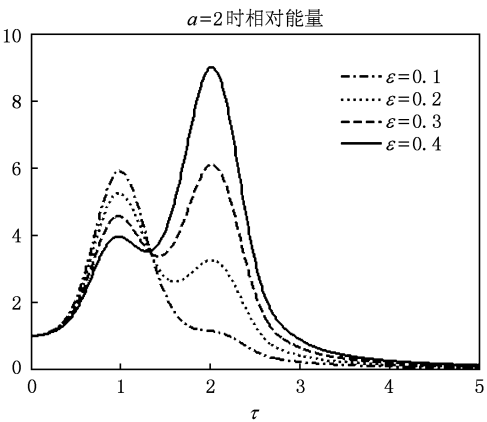


图 34 $a = 2$ 时, $R(t)$ 随 τ 的变化

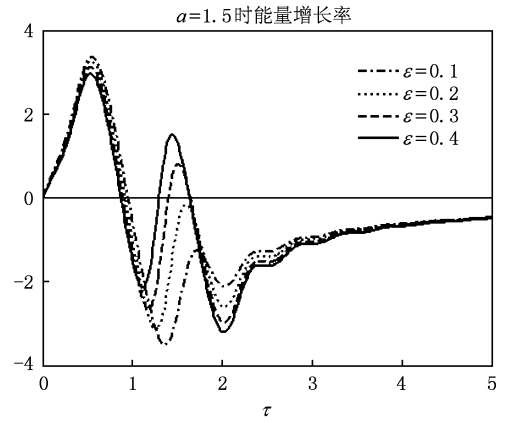
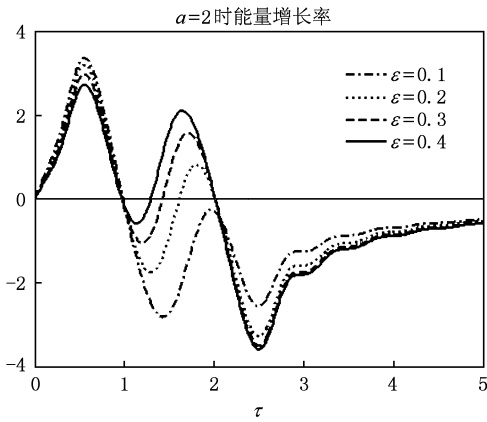
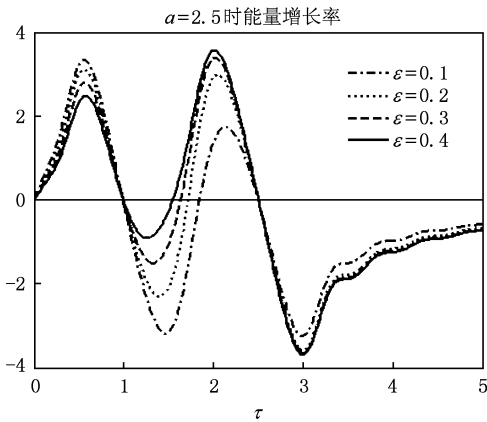
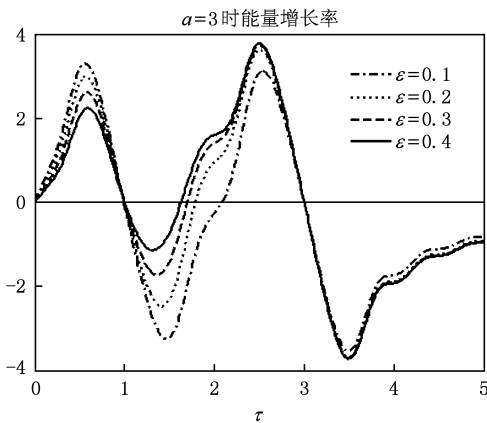


图 37 $a = 1.5$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

幅为 0.1 的 Couette 流相对能量呈现出单调衰减的现象, 而其他扰动振幅对应的相对能量会出现能量的二次增长现象, 但相对能量第二次达到的极大值要小于第一次达到的极大值, 这是与 $m = 2, a = 1.5$

图 33 说明, 当 $m = 4, a = 1.5$ 时, 初值扰动振

图 38 $a = 2$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化图 39 $a = 2.5$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化图 40 $a = 3$ 时, $\sigma(t)$ 随 τ 的变化

总之,初值叠加小扰动后会改变 Couette 流在有限时间内能量的演变特征,小扰动流函数的振幅和结构对 Couette 流能量能否出现极大值、极大值的大小和极大值对应的时间都有影响,这说明虽然描述 Couette 流的方程是线性的,但在有限时段内,初值扰动对 Couette 流能量的演变特征还是有影响的,但当时间趋于无穷时,随着能量的减小,初值小扰动的这种作用也相应减小,当大于某一时间时,能量的演变对初始场就不再敏感了.

5. 结 论

利用 Green 函数法,解析求得平面无黏 Couette 流流函数的精确解. 通过定义能量、相对能量和能量增长率,研究了 Couette 流相对能量在有限时段内的演变特征,发现:

1. Couette 流相对能量能否在有限时段内快速增长、相对能量的最大值及相对能量达到最大值时对应的时间都与初始场的结构有关.

2. Couette 流相对能量随东西方向波数的增加单调递减,随南北方向波数的增加单调递增,当时间趋向无穷时,Couette 流相对能量趋向于零.

3. 不同初始场结构的 Couette 流相对能量达到最大值时对应的时间 t 均满足 $t \leq m\pi/k$.

4. 最有利于 Couette 流相对能量在有限时段快速增长的初始场结构所对应的东西波数呈现出随着南北波数的增加而单调递增的趋势. 结论 3 和 4 是对 Farrell^[14] 研究结果的补充和完善.

5. 若在初值上叠加一个南北方向的小扰动,在有些情形下(文中情形三),不同的初值扰动结构和振幅会在有限时段内引起 Couette 流相对能量随时间变化特征的改变. 初值扰动后,Couette 流相对能量会出现二次增长现象,当它第一次达到极大值时,小振幅扰动对应的相对能量要大于大振幅扰动对应的相对能量,当它第二次增长达到极大值时,小振幅扰动对应的相对能量要小于大振幅扰动对应的相对能量,而后,相对能量将随着时间严格单调递减,直到趋向于零. 不同的南北方向扰动波数,决定了相对能量两个极值的大小关系,一般而言,扰动波数越大,能量的第二个极值就越大. 对于相同的南北方向扰动波数,同样满足扰动振幅越大,相对能量第一次达到的极大值越小,而第二次达到的极大值越大,且达到第二次极大值的时间也越长.

情形一个主要不同的地方. 当 a 分别为 2, 2.5, 3 时, $m = 4$ 对应的 Couette 流相对能量变化趋势与 $m = 2$ 对应的相对能量变化趋势几乎一致,唯一不同的地方在于相对能量增长的振幅不同.

本文研究的 Couette 流能量演变问题实际上是连续谱的演变问题. 虽然随着时间的增长, 连续谱能量最终被基流吸收, 即连续谱最终滋养了西风, 但在有限时段内, 连续谱依赖于初值是可以增长的. 在实际大气中, 急流南侧的涡旋的演变可近似的简

化成这种情形, 在涡旋发展的初期, 虽然从标准模的思想看, 大气是正压稳定的, 扰动是不会发展的, 但由于此时存在连续谱, 所以在有限时段内急流南侧的涡旋也可以得到发展, 这就是连续谱在环流演变中的作用.

- [1] Orr W M 1907 *Proc. R. Irish Acad. A* **27** 69
- [2] Lin C C 1955 *The theory of hydrodynamic instability* (Cambridge Univ. Press) 155
- [3] Eliassen A E 1953 *Inst. Weather Climate Res.* 1
- [4] Holland E 1953 *Geophys. Publ.* **18** 1
- [5] Case K M 1960 *Phys. Fluids* **3** 43
- [6] Pedlosky J 1964 *Tellus* **16** 12
- [7] Burger A P 1966 *J. Atmos. Sci.* **23** 272
- [8] Zeng Q C 1983 *J. Atmos. Sci.* **40** 73
- [9] Yamagata T 1980 *J. Meteorol. Soc. Japan* **58** 160
- [10] Tung K K 1983 *J. Fluid Mech.* **133** 443
- [11] O'Brien E 1992 *J. Atmos. Sci.* **49** 1557
- [12] Boyd J P 2002 *J. Phys., Oceanogr.* **32** 2589
- [13] Rosen G 1971 *Phys. Fluids* **14** 2767
- [14] Farrell B F 1982 *J. Atmos. Sci.* **39** 1663

On the evolution of Couette flow energy^{*}

Zhang Liang^{1)2)†} Fu Wei-Ji³⁾ Zhang Li-Feng¹⁾ Wu Hai-Yan⁴⁾ Huang Hong¹⁾

1) (Laboratory for Applied Geophysics, Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)

2) (No. 96165 Troops of PLA, Leping 333300, China)

3) (No. 96251 Troops of PLA, Luoyang 471003, China)

4) (No. 94855 Troops of PLA, Quzhou 324001, China)

(Received 12 May 2009; revised manuscript received 9 July 2009)

Abstract

In this paper, the Green function method is used to obtain the exact solution of Couette flow. By defining the Couette flow energy, the relative energy and the energy increase ratio, we discuss the relations between the structure of initial field and the evolution of Couette flow energy, the relations between the time corresponding to Couette flow energy attaining to its maximum and the structure of initial field together with the structure of initial field which can optimal excited Couette flow energy increasing within a finite time interval. We further investigate the relations between the perturbed initial field and the evolution of Couette flow energy. The conclusions of this paper are supplementary to Farrell's conclusions.

Keywords: Couette flow, Green function method, normal mode, initial value problem

PACC: 0340G, 0420J, 1140

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2007CB411800, 2004CB418304) and the China Meteorological Administration Shanghai Typhoon Institute Typhoon Research Fund (Grant No. 2008ST06).

† E-mail: zl_0617@163.com