

激发介质中螺旋波失稳的微观机理研究^{*}

邓敏艺[†] 唐国宁 孔令江 刘慕仁

(广西师范大学物理科学与技术学院, 桂林 541004)

(2009 年 6 月 24 日收到; 2009 年 8 月 4 日收到修改稿)

采用晶格 Boltzmann 方法研究了激发介质中螺旋波的失稳, 计算机数值模拟给出了激发介质中螺旋波失稳前后的速度场分布, 并结合斑图和波头轨迹进行讨论发现, 稳定螺旋波的速度场分布表现为螺旋波旋转中心处的速度做周期突变; 在螺旋波开始失稳时, 速度场分布表现为该位置粒子速度突变加快最后变得无规律, 使速度集团分解无规律, 导致速度场分布越来越混乱, 并最终使系统进入时空混沌态.

关键词: 晶格 Boltzmann 方法, 激发介质, 螺旋波, 时空混沌

PACC: 0547

1. 引言

医学研究表明, 心肌电信号出现时空混沌态是导致心脏纤维性颤动的原因, 而心脏纤维性颤动能在短时间导致生物体死亡, 因此对时空混沌态的产生及控制研究已经成为非线性科学的研究热点之一^[1,2]. 激发介质中螺旋波失稳导致的时空混沌尤其受到人们关注, 因为其中的螺旋波失稳机理有可能解释心脏纤维性颤动产生的原因. 欧阳颀的实验结果表明^[3] 激发介质中螺旋波失稳属于 Doppler 失稳, 其特点是螺旋波失稳首先发生在波头附近, 产生失稳的原因是稳定螺旋波经 Hopf 分岔变得不稳定, 螺旋波开始漫游, 由于 Doppler 效应使相邻的波相互作用, 螺旋波波头运动方向前面的行波被压缩而后面的行波被伸长, 局部区域的螺旋波变得不稳定而不断产生新的缺陷点, 最后使系统进入时空混沌态. 杨俊忠等^[4] 的数值模拟研究还发现, 在激发介质中螺旋波可以发生异常失稳, 这时螺旋波在距离波头几个波长的地方断裂, 断裂处之内为螺旋波, 外围则形成靶波. 研究者还分别从激发性降低的起因^[5]、不同边界条件的影响^[6] 以及小世界网络^[7] 等方面研究了螺旋波失稳现象, 并得到了一些有意义的结果.

晶格 Boltzmann 方法 (LBM) 是一种简单有效的

数值方法, 具有程序设计简单、运行速度快、完全并行等特点, 自从上世纪 90 年代初由 Qian 等^[8] 和 Chen 等^[9] 提出单弛豫时间近似代替碰撞项以来获得了广泛的应用, 在很多领域取得了成功^[10-14]. 我们已经建立了反应扩散系统的五速正方晶格 Boltzmann 模型, 并对激发介质中螺旋波演化行为以及螺旋波的动力学性质进行了初步研究^[15,16]. 本文用 LBM 研究 Selkov 反应扩散系统中螺旋波失稳前后系统粒子的速度分布变化, 并结合斑图和螺旋波波头轨迹进行分析, 探讨螺旋波失稳的微观机理.

2. 系统与模型

本文的系统以及所使用的模型在文献 [15] 已做详细研究, 下面做简略介绍.

2.1. Selkov 反应

Selkov 反应是一个典型的反应扩散系统, 最早是用来模拟新陈代谢过程中的糖酵解反应的. 进行无量纲化处理后 Selkov 反应扩散系统的动力学方程为^[17]

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = (\alpha - \chi \rho_1 - \rho_1 \rho_2^2 + \kappa \rho_2^3) + D_1 \nabla^2 \rho_1, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = (\beta - \rho_2 + \rho_1 \rho_2^2 - \kappa \rho_2^3) + D_2 \nabla^2 \rho_2, \quad (1b)$$

其中浓度 ρ_1 是慢变量, 浓度 ρ_2 是快变量. 本文选择系统参数为 $\alpha = 0.77064$, $\beta = 0.0208$, $\chi = 0.1$, $\kappa =$

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 10562001, 10765002) 资助的课题.

[†] E-mail: dengminyi97@tom.com

5.0, 在这个参数下 Selkov 系统为激发系统^[18], 系统的平衡态为 $\rho_1 = 7.65978, \rho_2 = 0.02582$.

2.2. 五速正方晶格 Boltzmann 模型

采用五速正方格子来划分空间, 粒子分布在网格交点上. 以 $\mathbf{e}_i$ 表示粒子速度, 其中 i 表示速度方向: $i = 0$ 表示粒子静止; $i = 1, 2, 3, 4$ 分别表示右、上、左、下四个速度方向, 粒子速度大小均为 1. 用分布函数 $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{e}_i, t)$ 表示第 s 种粒子 ($s = 1, 2$) t 时刻在格点 $\mathbf{r}$ 处具有速度 $\mathbf{e}_i$ 的概率, 简写为 f_{si} ; 用 $f_s^{\text{eq}}(\mathbf{r}, \mathbf{e}_i, t)$ 表示局域平衡分布函数, 简写为 f_{si}^{eq} . 第 s 种粒子的浓度 ρ_s 与 $f_{si}^{\text{eq}}, f_{si}$ 的关系为

$$\rho_s = \sum_{i=0}^4 f_{si}^{\text{eq}} = \sum_{i=0}^4 f_{si}.$$

f_{si} 的演化方程为

$$\begin{aligned} & f_s(\mathbf{r} + \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, t + 1) - f_s(\mathbf{r}, \mathbf{e}_i, t) \\ &= -\frac{1}{\tau_s} [f_s(\mathbf{r}, \mathbf{e}_i, t) - f_s^{\text{eq}}(\mathbf{r}, \mathbf{e}_i, t)] + R_{si}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $R_{si}(\mathbf{r}, t)$ 代表 t 时刻在格点 $\mathbf{r}$ 处由于反应而导致第 s 种粒子浓度 ρ_s 沿 $\mathbf{e}_i$ 方向的变化. 采用多尺度

方法与 Taylor 展开等数学手段处理后^[15], 可由 (2) 式得到 (1a) 和 (1b) 式, 故可通过演化 (2) 式得到 (1a), (1b) 式的数值解.

3. 计算机模拟结果

将系统划分为 100×100 个五速正方格子, 使用零流边界条件. 系统参数为 $\alpha = 0.77064, \beta = 0.0208, \chi = 0.1, \kappa = 5.0$. 初始时在系统底部施加 10 行大小为 $\rho_1 = 6.5, \rho_2 = 0.8$ 的扰动, 其他位置处于均匀稳定态值 $\rho_1 = 7.65978, \rho_2 = 0.02582$. 扰动将使系统产生行波, 行波经 147 个时间步后传播到系统中间, 将之截断, 在截断处制造了一个缺陷点, 这个缺陷点就是螺旋波波头. 系统在这个缺陷点的带动下形成螺旋波, 见图 1. 图 1 中所示时间为从截断行波开始计时, 下同. 从图 1 可以看出, 在所选参数下, 所产生的螺旋波在 27750 步前是稳定的, 28563 步时已发生了 Doppler 失稳, 29000 步时失稳区扩大. 进一步的计算机模拟结果表明, 到 32000 步系统进入了时空混沌态.

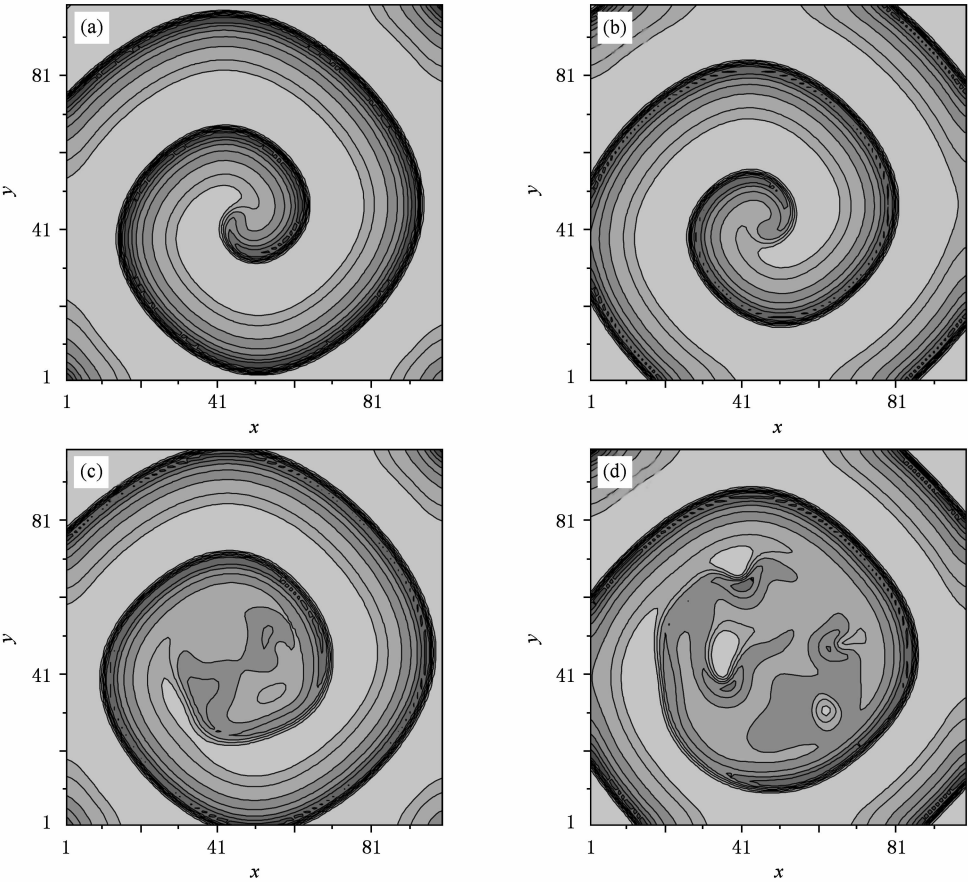


图 1 螺旋波及其失稳过程 (a) 25000 步, (b) 27750 步, (c) 28563 步, (d) 29000 步

时空混沌态是相对于螺旋波态更无序的状态,系统从螺旋波失稳进入时空混沌,必然伴随着微观粒子运动的更混乱.下面通过系统粒子运动速度分布来探讨这个混乱化的过程.由于模型中以分布函数代表粒子具有各个速度的概率,所以可以近似认为任意时刻在任意格点处的粒子速度方向由该时刻该位置 5 个分布函数中取值最大者决定.例如,某时刻某位置取值最大的分布函数为 $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{e}_s, t)$, 则该时刻该位置的 s 粒子的速度为 $\mathbf{e}_s$, 即大小为 1 方向为水平向左的速度.如遇两个以上方向取值相同且为最大,则随机选择其中一个为该时刻该位置的粒子速度.为了从微观角度探讨螺旋波失稳机理,计算机数值模拟螺旋波失稳前后各个时刻快变量 ρ_2 对应的粒子速度分布.

图 2 给出了计算机数值模拟得到的螺旋波失稳前各个时刻快变量 ρ_2 对应的粒子的速度分布 (为清楚起见,只显示波头附近的粒子速度分布,下同).从图 2 可以看出,系统处于稳定螺旋波态时速度场

被分成若干个区域,形成不同的速度集团,同一速度集团内粒子朝同一方向运动,各速度集团边界清晰且连续.存在两种速度场边界线,粒子分别朝向和背离场边界线运动.这两种场分界线整体上都有螺旋形式.由于以带箭头的线段代表粒子速度,故在粒子运动速度相背离的位置表现为空白.图 2 中空白处还出现箭头方向的不同改变,这是一种涨落现象,不足以影响问题的实质.图 2(a)显示在位置 (47,43) 处粒子速度方向发生突变,由于该粒子处于速度集团内,所以此变化使该位置所在的速度集团分解;图 2(b)和(c)可看出速度集团分解产生的场分界线逐渐靠近螺旋式场分界线,并最终与之连接,螺旋式的场分界线并没断裂,速度集团分解达到稳定;图 2(d)则表明,在螺旋式的场分界线清晰且连续后(即速度集团分解达到稳定),在位置 (47,43) 处又发生一次粒子速度方向改变,又导致一次速度集团分解,如此以来反复进行,维持着稳定的螺旋波态.

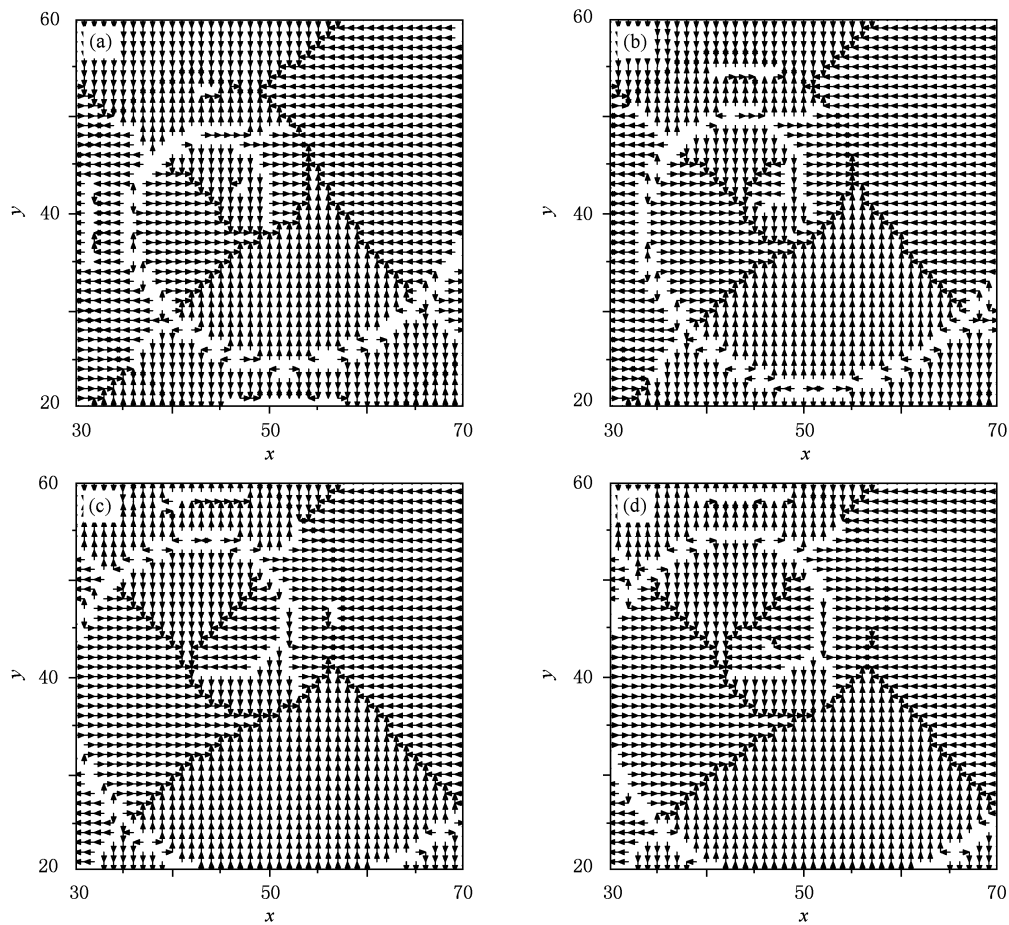


图 2 稳定螺旋波的速度分布 (a) 20062 步,在 (47,43) 位置上观察到粒子速度方向的突变,由向下变成向左; (b) 20072 步,原来一个速度集团分解成 3 个速度集团; (c) 20092 步,清晰的场边界线形成; (d) 20094 步,在 (47,43) 位置上观察到粒子速度方向的新突变,由向左变成向上

鉴于图 2 中体现出来的螺旋波稳定时 (47,43) 处粒子速度以恒定周期来突变的特点,可以推测,螺旋波失稳后,该位置的粒子速度突变周期将无规化. 计算机数值模拟螺旋波失稳前后 (47,43) 位置的粒子速度突变周期见图 3,其中 t 是指粒子完成该次速度突变所对应的时间. 图 3 表明,从 27750 步开始 (47,43) 处粒子速度突变周期从 32 时步迅速减少到 26,随后做振幅较大的无规变化. 而图 1 的斑图表明,27750 步前螺旋波是稳定的,之后发生 Doppler 失稳. 结合图 1,验证了我们推测的正确性.

为探讨螺旋波失稳时具体的微观变化过程,计算机数值模拟了螺旋波失稳后的粒子速度分布. 数值模拟结果表明,随着 (47,43) 位置粒子速度突变周期的缩短,出现上一次速度集团分解未稳定时就开始下一次速度集团分解的情况. 即没有达到图 2 (c) 的状态,就开始下一次速度集团的分解,见图 4 (a). 而这种情况随时间发展越来越明显,见图 4 (b). 这无疑使速度场分布越来越混乱,28189 步时

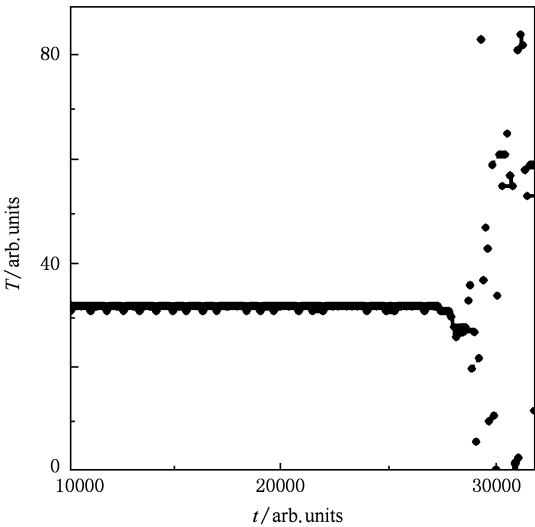


图 3 (47,43) 位置的粒子速度变化周期随时间的变化

在 (43,37) 的位置首次出现了粒子从四个方向朝一个位置运动的拥堵现象,见图 4 (c),而拥堵现象正

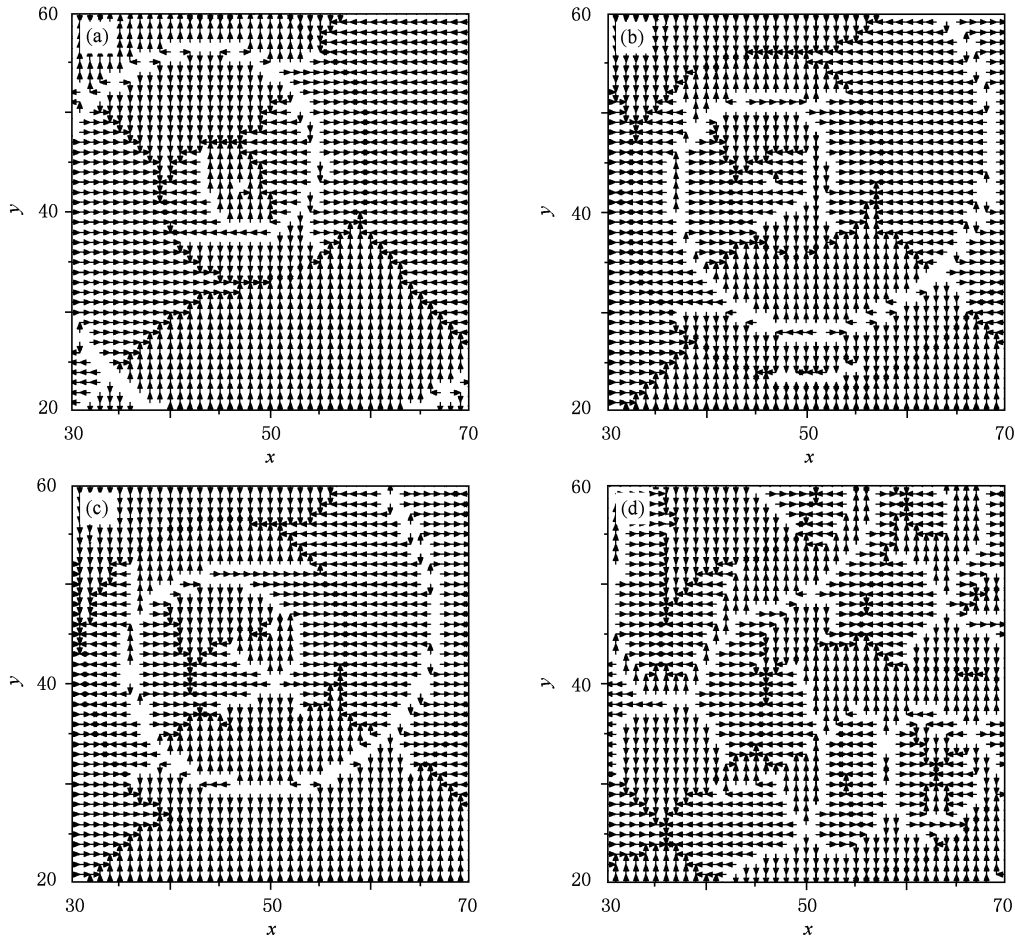


图 4 螺旋波失稳后速度分布图 (a)27884 步,(b) 28076 步,(c)28189 步,(d)29000 步

是粒子运动混乱的表现. 拥堵现象随时间增长而增加,图 4(d)显示 29000 步时已有多个位置出现拥堵,所显示的区域已没有螺旋式场分界线,该区域进入了时空混沌态. 进一步的模拟结果表明,在 32000 步时整个系统粒子速度分布的螺旋式场分界线完全被破坏,系统由很多的无规分布的小速度集团组成,表明系统粒子运动非常混乱,系统进入了时空混沌态.

从图 2—4 可以看出,(47,43)位置的粒子速度突变周期的稳定性直接决定了螺旋波的稳定性,而螺旋波波头是个缺陷点,波头的稳定性决定着螺旋波的稳定性^[3]. 那么,(47,43)这个位置与螺旋波波头有何关系? 为寻求两者间的关系,我们用计算机数值模拟跟踪了螺旋波稳定时的波头轨迹,结果见图 5.

从图 5 可以看出,所选参数下稳定螺旋波的波头近似做半径很小的圆周运动,属于简单螺旋波^[3]. 图 5 的结果经简单处理后发现,稳定螺旋波的波头轨迹中心正好就是(47,43)位置,故可认为(47,43)位置就是螺旋波的旋转中心. 所以可以得到结论:稳定的螺旋波是由旋转中心处粒子速度的周期突变来维持的. 随着这个位置的粒子速度突变成为无规律,螺旋波波核的速度集团分解无规律,螺旋波波头位置首先失稳,失稳区域逐渐向外传播,系统最后进入时空混沌态.

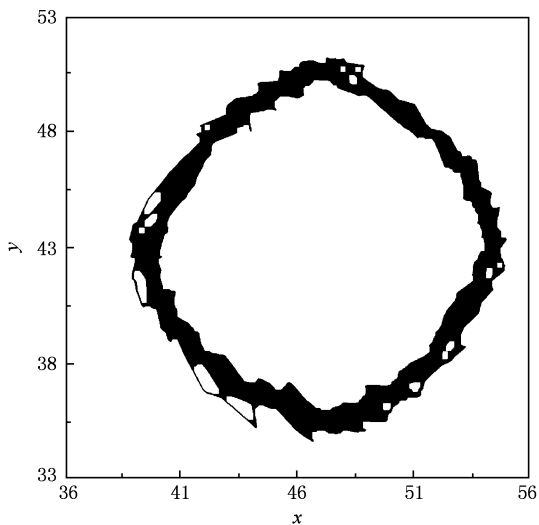


图 5 截止到 27750 步波头轨迹

4. 结 论

以 LBM 为数值工具,借助计算机模拟计算,研究激发介质中螺旋波失稳的微观机理. 发现当螺旋波稳定时,螺旋波旋转中心处的粒子速度以恒定的周期发生突变;随着螺旋波的失稳,该位置粒子速度方向发生突变的周期变小然后无规化. 周期变小导致上次分解的速度集团还没完全稳定时就开始下一次分解的情况出现;周期无规使速度集团分解无规律. 于是速度场分布越来越混乱,系统最终从螺旋波状态进入到时空混沌态.

[1] Zhang H, Hu B, Hu G 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026134

[2] Wu Y B, Qiao C, Ouyang Q, Wang H L 2008 *Phys. Rev. E* **77** 036226

[3] Ouyang Q 2001 *Physics* **30** 30 (in Chinese)[欧阳 颀 2001 物理 **30** 30]

[4] Yang J Z, Xie F G, Qu Z L, Garfinkel A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 148302

[5] Dai Y, Tang G N 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1491 (in Chinese) [戴 瑜,唐国宁 2009 物理学报 **58** 1491]

[6] Zhao Y K, Wang G R, Chen S G 2007 *Chin. Phys.* **16** 1159

[7] Gan Z N, Ma J, Zhang G Y, Chen Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4047

[8] Qian Y H, D'Humières D, Lallemand P 1992 *Euro. Phys. Lett.* **17** 479

[9] Chen S Y, Chen H D, Martnez D, Matthaeus W 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 3776

[10] Kang X Y, Ji Y B, Zhang H H, Liu D H, Jin Y J 2007 *J. Beijing Norm. Univ. (Nat. Sci.)* **48** 508 (in Chinese) [康秀英、吉玉斌、张焕焕、刘大禾、金永娟 2007 北京师范大学学报(自然科学版) **48** 508]

[11] Li H B, Fang H P, Lin Z F, Xu S X, Chen S Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 031919

[12] Li Q, Zheng C G, Wang N C 2001 *Comm. Nonl. Sci. Num. Simu.* **6** 68

[13] Yi H H, Yang X F, Wang C F, Li H B 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2878

[14] Kang X Y, Ji Y P, Liu D H, Jin Y J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1041

[15] Deng M Y, Shi J, Li H B, Kong L J, Liu M R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 168 (in Chinese) [邓敏艺、施 娟、李华兵、孔令江、刘慕仁 2007 物理学报 **56** 168]

[16] Deng M Y, Shi Juan, Chen R X, Kong L J, Liu M R 2007 *Coummun. Theor. Phys.* **48** 725

[17] Dutt A K 2005 *J. Phys. Chem. B* **109** 17679

[18] Deng M Y, Shi Juan, Li H B, Kong L J, Liu M R 2007 *J.*

GuangXi Norm. Univ. (Nat. Sci.) **25** 10 (in Chinese)[邓敏艺、施娟、李华兵、孔令江、刘慕仁 2007 广西师范大学学报(自然科学版) **25** 10]

Microcosmic mechanism of spiral wave’s instability in excitable medium^{*}

Deng Min-Yi[†] Tang Guo-Ning Kong Ling-Jiang Liu Mu-Ren
 (College of Physics and Technology, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)
 (Received 24 June 2009; revised manuscript received 4 August 2009)

Abstract

The instability of the spiral wave in an excitable medium is investigated by using the lattice Boltzmann method. The velocity distribution of the system are obtained by computer simulation, and discussed in connection with the pattern and the tip trajectory of the spiral wave. We find that the velocity of the particle at the rotating center of spiral wave changes periodically, while the change of this particle’s velocity is quickened and then becomes random when the spiral wave becomes unstable, which leads to the random decomposition of the velocity group and random distribution of velocity. The system falls into the spatiotemporal chaos finally.

Keywords: lattice Boltzmann method, excitable medium, spiral wave, spatiotemporal chaos
PACC: 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10562001, 10765002).
[†] E-mail: dengminy97@tom.com