

一种气象观测数据求导的新方法^{*}

王业桂¹⁾ 蔡其发^{1)†} 黄思训²⁾

1) (中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

2) (解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

(2009 年 8 月 16 日收到; 2009 年 9 月 25 日收到修改稿)

气象观测数据不可避免地带有观测误差, 而对带有误差的离散数据求导是一个不适定的反问题. 为了解决这一长期困扰气象工作者的问题, 利用吉洪诺夫正则化思想, 提出了矩形区域内观测数据的二维一阶偏导数重构算法. 通过系列模拟观测数据试验检验了该算法的性能, 表明该算法有效且计算精度高. 另外, 应用该算法对气象观测资料进行客观分析, 结果表明: 该算法作为一种新的客观分析方法是可行的, 并且还能提高小尺度天气系统的识别能力.

关键词: 数值微分, 吉洪诺夫正则化, 客观分析

PACC: 9260, 9260X, 0270

1. 引言

观测数据求导是天气分析和预报中常遇到的一个基本问题. Richardson 在首次数值预报失败后就指出: 风矢量的散度是导致天气变化的重要因子, 但散度不能精确地测量得到^[1]. 散度不是一个直接观测量, 根据散度的定义 $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, 风矢量的水平散度是由水平风速(直接观测量)的偏导数运算得到. 在现代天气诊断分析中, 位涡、螺旋度和锋生函数等重要物理量均是由温度、气压(或高度)、湿度、风等四个基本观测量求偏导运算得到.

导数是数学分析中的一个基本概念. 对于一个具体的函数, 计算其导数不是一件难事. 而对于具体的工程问题, 如通过在离散点上的观测值来求取观测物理量的近似导数, 则并非易事. 气象工作者一般都是采用差分方法来计算离散点上观测量的近似导数, 但由于观测网密度不够或观测仪器精度太低均可能导致近似导数的计算误差很大. 廖洞贤^[2]在设计数值预报模式过程中发现: 当模式的分辨率提高时差分代替微分的截断误差减少, 这只在截断误差是计算误差的唯一来源时才成立; 如果用作计算的资料有误差时, 则这个结论就需要修正,

即模式的分辨率提高是有一定限度的. 这一研究结论说明, 对差分方法而言, 在观测误差客观存在的条件下, 不能单纯地依靠加大观测密度来提高观测资料(偏)导数的计算精度. 因此, 气象工作者开始寻找其他的高精度算法, 如周玉淑、曹洁、高守亭^[3,4]等利用调和-余弦方法计算有限区域离散格点的涡度、散度, 获得了较高的精度.

在应用数学领域, 通过离散点上的观测值来求取观测量的近似(偏)导数问题称为数值微分问题. 数值微分是一个典型的反问题, 往往是不适定的, 如果用差分代替微分进行数值计算, 则观测数据中的微小误差可能会造成计算结果的巨大误差. 最早用来解决反问题的方法是最小二乘法, 但最小二乘法不能解决解的唯一性问题. 后来, 又有学者基于变分原理提出极小模解的方法, 数值微分问题可转变为单边变分或等周变分问题, 但这类变分问题解决起来仍然棘手. 直到 20 世纪 60 年代, 前苏联科学院院士吉洪诺夫提出了正则化方法, 单边变分、等周变分问题就可转化为无约束的泛函极值问题, 并有学者提出了利用正则化方法求解一维数值微分的方法^[5-14]. 但在气象领域的应用中, 往往是求二维或三维气象观测数据的偏导数, 因此, 本文提出利用矩形区域内二维一阶的数值微分问题的正则

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 40775023)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: caiqfa@yahoo.com.cn

化求解方法来计算二维气象观测数据的一阶偏导数.

2. 二维观测数据一阶偏导数的正则化求解

2.1. 数学模型及其主要结果

在气象观测中,所观测的物理量大多是二维以上的.矩形区域内二维气象观测数据求导问题可以表述为数值微分问题.

设 $\Omega = [0, L_a] \times [0, L_b] \in R^2$ 是一个单连通的有界的矩形区域,其中 L_a, L_b 分别为矩形区域的长和宽.同时,设 N 是一个自然数, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ 是 Ω 区域中的一组观测点, Ω 被分成 N 份,即 $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$, 记 d_i 为区域 Ω_i 的直径,令 $d = \max\{d_i\}$.

若已知精确函数 $u(x, y)$ 在点 (x_i, y_i) 处的测量值为 u_i , δ 为观测误差,那么二维气象观测数据求偏导的问题,即为寻找函数 $U(x, y)$ 满足

$$J[U(x, y)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (U(x_i, y_i) - u_i)^2 = J_{\min},$$

$$\lim_{d \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0} \|\nabla U - \nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

当

$$\int_{\Omega} f^2(x) dx < \infty,$$

定义

$$L^2(\Omega) = \{f\},$$
$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} f^2(x) dx\right)^{1/2};$$

当

$$f \in L^2(\Omega),$$
$$f^{(k)} \in L^2(\Omega),$$

定义

$$H^k(\Omega) = \{f\},$$

其中上标 (k) 表示 k 阶导数;并且定义 $C_0^\infty(\Omega)$ 为区域 Ω 上的连续函数类, $H_0^k(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在空间 $H^k(\Omega)$ 中的闭包.

假定边界上的测量值是精确的,即 $u(x, y)|_{\partial\Omega} = \phi(x, y)$, 采用吉洪诺夫正则化方法,二维气象观测数据求偏导问题可以转化为

$$J[U(x, y)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (U(x_i, y_i) - u_i)^2 + \alpha \|\Delta U(x, y)\|_{L^2}^2$$

$$= J_{\min}, \tag{1}$$

其中 α 是吉洪诺夫正则化参数, $U \in \{u \mid u \in H^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = \phi\}$.

定理 (1)式的解 $U_* \in \{u \mid u \in H^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = \phi\}$ 是下述变分问题的解:

$$\iint_{\Omega} \Delta U \Delta h dx dy = -\frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^N (U_i - u_i) h_i, \tag{2}$$

其中 $h|_{\partial\Omega} = 0, \forall h \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

上述定理在文献[15]中已得到证明,即(1)式的解 $U_*(x, y)$ 是存在且唯一的,当 $\alpha = \delta^2$ 时,用格林函数来重构 $U_*(x, y)$ 的算法是收敛的.

2.2. 二维一阶偏导数重构算法

理论上已证明(1)式的解是存在且唯一的,但由本文的定理可知, $U_*(x, y)$ 的重构依赖于函数 h . 对于一个具体的工程问题,由于满足一定条件的 h 具有任意性,在实际计算过程中不具备可操作性.为了方便地将二维数值微分理论应用到实际问题中去,需要一个关于 $U_*(x, y)$ 的重构算法,下面用格林函数代替函数 h 来重构 $U_*(x, y)$.

如果函数 $G(x, y; \xi, \eta)$ 满足下列条件:

$$\begin{aligned} \Delta G(x, y; \xi, \eta) &= \delta(x - \xi, y - \eta) \\ ((x, y) \in \Omega, (\xi, \eta) \in \Omega), \\ G|_{\partial\Omega} &= 0 \\ (\forall (\xi, \eta) \in \Omega), \end{aligned} \tag{3}$$

则称 $G(x, y; \xi, \eta)$ 为格林函数.

格林函数在某些区域上的表达式可以显式给出,但在矩形区域上则不能显式表达,下面用格林函数 $G(x, y; \xi, \eta)$ 来构造(2)式中的 h .

将(2)式中的 h 取为满足(3)式的 $G(x, y; \xi, \eta)$, 则得到

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (U_i - u_i) G(x_i, y_i; \xi, \eta) = \alpha \Delta U(\xi, \eta). \tag{4}$$

(4)式两边乘以 $G(\xi, \eta; x, y)$ 后在 Ω 上积分,应用格林定理并整理后可得

$$\begin{aligned} \alpha U(x, y) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(U_i - u_i) \\ \times \iint_{\Omega} G(x_i, y_i; \xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta] \\ = \alpha \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial n} \phi(\xi, \eta) dS_{\xi\eta}, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\phi(\xi, \eta)$ 为 U 在边界上的值. 记

$$a_i(x, y) = \iint_{\Omega} G(x_i, y_i; \xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta, \tag{6}$$

$$b(x,y) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\xi,\eta;x,y)}{\partial n} \phi(\xi,\eta) dS_{\xi\eta}, \quad (7)$$

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^N c_i a_i(x,y) + b(x,y), \quad (9)$$

则(5)式变为

并代入(8)式,整理后可得

$$U(x,y) + \frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^N [(U_i - u_i) a_i(x,y)] = b(x,y). \quad (8)$$

$$c_i = -\frac{1}{\alpha N} \left(\sum_{j=1}^N a_j(x_i,y_i) c_j + b(x_i,y_i) - u_i \right). \quad (10)$$

令

记

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_N)^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha N + a_1(x_1, y_1) & a_2(x_1, y_1) & \cdots & a_N(x_1, y_1) \\ a_1(x_2, y_2) & \alpha N + a_2(x_2, y_2) & \cdots & a_N(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(x_N, y_N) & a_2(x_N, y_N) & \cdots & \alpha N + a_N(x_N, y_N) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} u_1 - b(x_1, y_1) \\ u_2 - b(x_2, y_2) \\ \vdots \\ u_N - b(x_N, y_N) \end{pmatrix}.$$

将(10)式写成矩阵形式,则为

$$\mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}. \quad (11)$$

这样,重构 $U_*(x,y)$ 的问题就转化为求解线性方程组的问题,解得方程组的系数 c_i 亦即完成了 $U_*(x,y)$ 的重构,且方程组的系数 $\mathbf{C}$ 是存在且唯一的. 现在的问题就是如何计算矩阵 $\mathbf{A}$ 和向量 $\mathbf{B}$.

由于矩形区域 $[0,L_a] \times [0,L_b]$ 上的格林函数不能显式给出,因此采用傅里叶级数来计算 $G(x,y;\xi,\eta)$. 格林函数的傅里叶级数展开式为

$$G(x,y;\xi,\eta) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{-1}{\left(\frac{n^2\pi^2}{L_a^2} + \frac{m^2\pi^2}{L_b^2}\right) \frac{L_a L_b}{4}} \times \sin \frac{n\pi x}{L_a} \sin \frac{m\pi y}{L_b} \sin \frac{n\pi \xi}{L_a} \times \sin \frac{m\pi \eta}{L_b}. \quad (12)$$

将(12)式代入(6)式得到

$$a_i(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n^2\pi^2}{L_a^2} + \frac{m^2\pi^2}{L_b^2}\right) \frac{L_a L_b}{4}} \times \sin \frac{n\pi x_i}{L_a} \sin \frac{m\pi y_i}{L_b} \sin \frac{n\pi x}{L_a} \times \sin \frac{m\pi y}{L_b}. \quad (13)$$

边界等于零 ($\phi(\xi,\eta) = 0$) 的情形下, $b(x,y) = 0$. 在边界不为零 ($\phi(\xi,\eta) \neq 0$) 时,可以证明

$b(x,y)$ 是

$$\Delta v(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \Omega) \quad (14)$$

$$v(x,y)|_{\partial\Omega} = \phi(x,y)$$

的解. 将(14)式的解记为 $v_*(x,y)$, 有

$$v_*(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L_a} \sinh \frac{\pi(L_b - y)}{L_a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L_a} \sinh \frac{n\pi y}{L_a} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{L_b} \sinh \frac{\pi(L_a - x)}{L_b} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi y}{L_b} \sinh \frac{n\pi x}{L_b}, \quad (15)$$

其中

$$A_n = \frac{2}{L_a \sinh \frac{n\pi L_b}{L_a}} \int_0^{L_a} \phi(\xi, 0) \sin \frac{n\pi}{L_a} \xi d\xi,$$

$$B_n = \frac{2}{L_a \sinh \frac{n\pi L_b}{L_a}} \int_0^{L_a} \phi(\xi, L_b) \sin \frac{n\pi}{L_a} \xi d\xi,$$

$$C_n = \frac{2}{L_b \sinh \frac{n\pi L_a}{L_b}} \int_0^{L_b} \phi(0, \eta) \sin \frac{n\pi}{L_b} \eta d\eta,$$

$$D_n = \frac{2}{L_b \sinh \frac{n\pi L_a}{L_b}} \int_0^{L_b} \phi(L_a, \eta) \sin \frac{n\pi}{L_b} \eta d\eta.$$

从而,(7)式可以用(15)式来计算.

以上的系列推导,基本解决了用格林函数重构函数 $U(x,y)$. 我们知道 $U(x,y)$ 的表达式是用傅里叶级数表示的,那么其一阶偏导数就不难得到.

3. 算法有效性验证

为了检验二维一阶偏导数重构算法的性能,用精确函数叠加随机扰动作为观测数据,然后分别利用二维一阶偏导数重构算法和中央差分方法来计算其一阶偏导数. 假设球面上风场的精确分布函数为

$$\begin{aligned} u &= 20\sin(3\lambda)\cos(2\varphi), \\ v &= 20\cos(2\lambda)\sin(3\varphi), \end{aligned}$$

则球坐标系下涡度、散度的精确分布函数分别为

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{r\cos\varphi}\left(\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\cos\varphi + u\sin\varphi\right), \\ D &= \frac{1}{r\cos\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{\partial v}{\partial\varphi}\cos\varphi - v\sin\varphi\right), \end{aligned}$$

其中, λ 为经度, $\lambda \in [60^\circ, 120^\circ]$; φ 为纬度, $\varphi \in [5^\circ, 65^\circ]$; r 为地球半径. 首先,在规则经纬度网格点上(有限区域为矩形区域)生成观测风场 $(\tilde{u}, \tilde{v})$, 它们是由精确风场 (u, v) 叠加均匀分布的随机误差 $[-\delta, \delta]$ 生成,观测误差水平由 δ 控制. 然后,用二维一阶偏导数重构算法(在(13),(15)式中傅里叶级数展开式截断阶数取为 80)得到重构风场 (u_*, v_*) 和 $\frac{\partial u_*}{\partial\lambda}, \frac{\partial u_*}{\partial\varphi}, \frac{\partial v_*}{\partial\lambda}, \frac{\partial v_*}{\partial\varphi}$, 得到计算涡度 ζ_* .

和计算散度 D_* . 为了比较算法的精度,同时用中央差分法计算了观测风场 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 的涡度 $\tilde{\zeta}$ 、散度 $\tilde{D}$. 最后,计算涡度和散度的相对误差并加以比较. 相对误差计算公式为

$$\rho_Y = \frac{\left(\sum_{i,j} (Y(\lambda_i, \varphi_j) - Y_0(\lambda_i, \varphi_j))^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{i,j} (Y_0(\lambda_i, \varphi_j))^2\right)^{1/2}}. \quad (16)$$

这里的 Y_0 和 Y 分别代表涡度、散度的精确值和计算值, ρ_Y 代表涡度、散度计算值的相对误差.

试验 1 取观测误差 $\delta = 0.1 \text{ m/s}$, 改变观测密度,取网格点的分辨率分别为 $3^\circ \times 3^\circ, 2.5^\circ \times 2.5^\circ, 2^\circ \times 2^\circ$, 分别用中央差分法、二维一阶偏导数重构算法得到涡度和散度场 $\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}_*$ 和 $\tilde{D}, D_*$, 并计算相应的相对误差,结果如表 1 所列.

表 1 不同观测密度 ($\delta = 0.1 \text{ m/s}$) 所得涡度、散度场的相对误差

分辨率	$3^\circ \times 3^\circ$	$2.5^\circ \times 2.5^\circ$	$2^\circ \times 2^\circ$
$\rho_{\tilde{\zeta}}/\%$	4.7801327	5.8107175	6.8147895
$\rho_{\tilde{\zeta}_*}/\%$	3.8493591	3.4067016	3.1424623
$\rho_{\tilde{D}}/\%$	2.6906311	3.1734210	4.0124231
$\rho_{\tilde{D}_*}/\%$	1.6004003	1.2862202	1.0310451

试验 2 取网格点的分辨率分别为 $2^\circ \times 2^\circ$, 改变观测误差,取 δ 分别为 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2 和 0.5 m/s,再用中央差分法和二维一阶偏导数重构算法得到涡度和散度场,并计算涡度、散度场的相对误差,结果如表 2 所列.

表 2 不同观测误差 (观测分辨率为 $2^\circ \times 2^\circ$) 所得涡度、散度场的相对误差

δ	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5
$\rho_{\tilde{\zeta}}/\%$	1.147485	1.656203	3.521821	6.814790	13.48274	33.55514
$\rho_{\tilde{\zeta}_*}/\%$	0.7662873	0.9541564	1.6332534	3.142462	6.404268	17.41680
$\rho_{\tilde{D}}/\%$	0.5635988	0.8973653	2.0413261	4.012423	7.981266	19.90960
$\rho_{\tilde{D}_*}/\%$	0.2947223	0.3080532	0.4874947	1.031045	2.427877	8.330524

试验 1 和试验 2 表明:在观测误差 δ 和观测密度相同时, $\rho_{\tilde{\zeta}_*}$ 和 $\rho_{\tilde{D}_*}$ 小于 $\rho_{\tilde{\zeta}}$ 和 $\rho_{\tilde{D}}$, 说明二维一阶偏导数重构算法的计算精度比中央差分法的精度高;当观测误差 δ 一定,加大观测密度时, $\rho_{\tilde{\zeta}_*}$ 和 $\rho_{\tilde{D}_*}$ 维持在较小的误差水平上,说明该算法解决气象观测数据求导数这类不适定问题是切实有

效的.

4. 气象资料客观分析新途径

气象资料客观分析是指满足某一约束条件,最优地拟合气象要素场的数学模型或方法. 对实时或

历史气象资料的分析和处理一直是天气分析和预报的研究重点^[16—24],由二维一阶偏导数重构算法的推演过程可以看出,为了得到观测物理量的偏导数,必须先重构该物理量的分布函数,且重构的分布函数满足特定的约束条件,这个过程与气象观测资料的客观分析过程是一致的.因此,可以利用二维一阶偏导数重构算法来客观分析和处理气象观测数据.图 1 为 2009 年 6 月 21 日 00 时(世界时) 500 hPa 位势高度场和风场的观测实况图,图 2 为 Cressman 方案分析风场和位势高度场等值线图(等

值线间距为 4×10 位势米),图 3 为重构算法分析风场和位势高度场等值线图(等值线间距为 4×10 位势米),图 4 为差分法计算的涡度场等值线图(图中数值单位为 $10^{-6}/s$,等值线间距为 $20 \times 10^{-6}/s$),图 5 为重构算法计算的涡度场等值线图(图中数值单位为 $10^{-6}/s$,等值线间距为 $20 \times 10^{-6}/s$),图 6 为差分法计算的散度场等值线图(图中数值单位为 $10^{-6}/s$,等值线间距为 $10 \times 10^{-6}/s$),图 7 为重构算法计算的散度场等值线图(图中数值单位为 $10^{-6}/s$,等值线间距为 $10 \times 10^{-6}/s$).

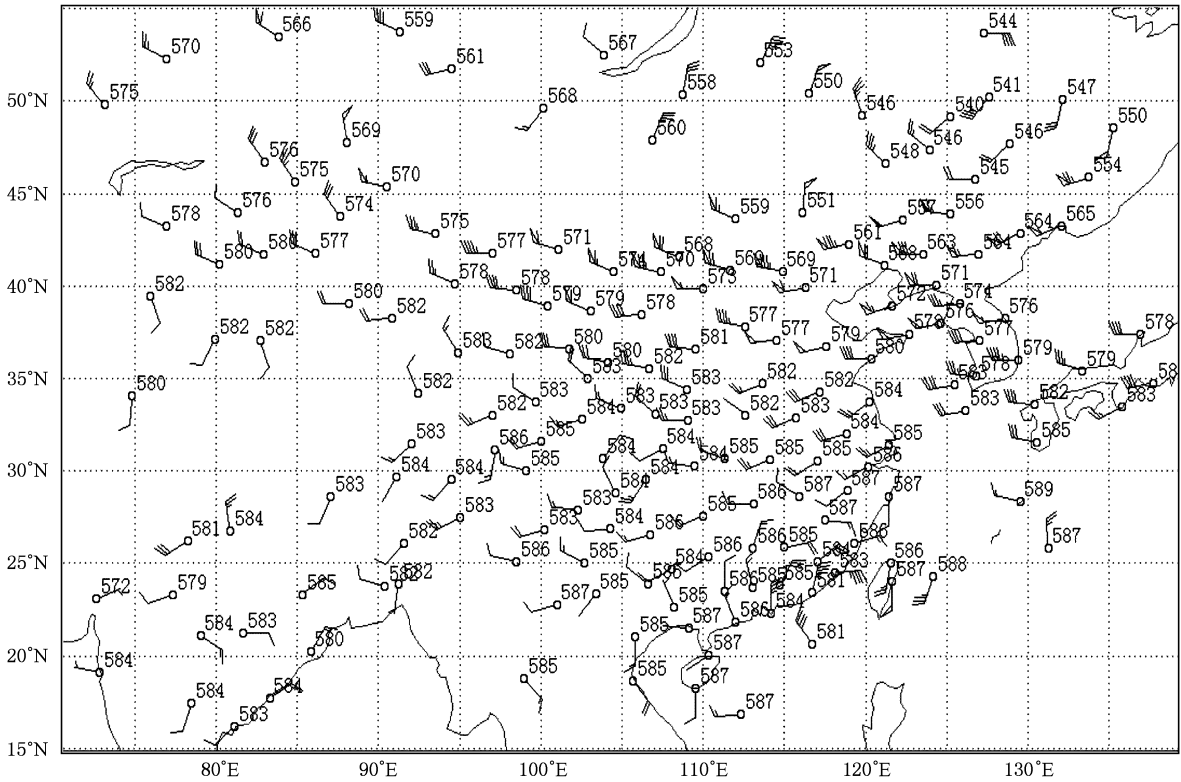


图 1 500 hPa 位势高度场和风场观测实况

下面应用二维一阶偏导数重构算法对 2009 年 6 月 21 日 00 时 500 hPa 位势高度场和风场观测资料进行客观分析,同时计算出诊断物理量——涡度场和散度场.具体操作可分四步进行.第一步,利用成熟的 Cressman 插值方案^[25]将位势高度场和风场的观测实况资料插值到 $2^{\circ} \times 2^{\circ}$ 的规则网格上(范围为 $[70^{\circ}E, 140^{\circ}E] \times [11^{\circ}N, 59^{\circ}N]$),如图 2 所示.第二步,使用中央差分方法计算得到涡度场(图 4)和散度场(图 6).第三步,由 Cressman 插值方案得到的规则网格上分析数据提供边界条件,再用二维一

阶偏导数重构算法(高度和风场的观测误差 δ 均取为 10^{-5} ,即认为观测数据足够精确)得到位势高度场和风场的分布(图 3)及涡度场和散度场的分布(为方便比较,分析结果的分辨率取为 $2^{\circ} \times 2^{\circ}$,如图 5、图 7 所示).第四步,比较分析两种客观分析方案的结果.

比较图 2 和图 3 可以看出:两图中的位势高度场的高、低值中心位置基本一致,但图 2 中等值线平滑,天气系统的强度偏弱(等值线稍稀疏),图 3 中等值线小尺度波动较多,天气系统的强度和范围与

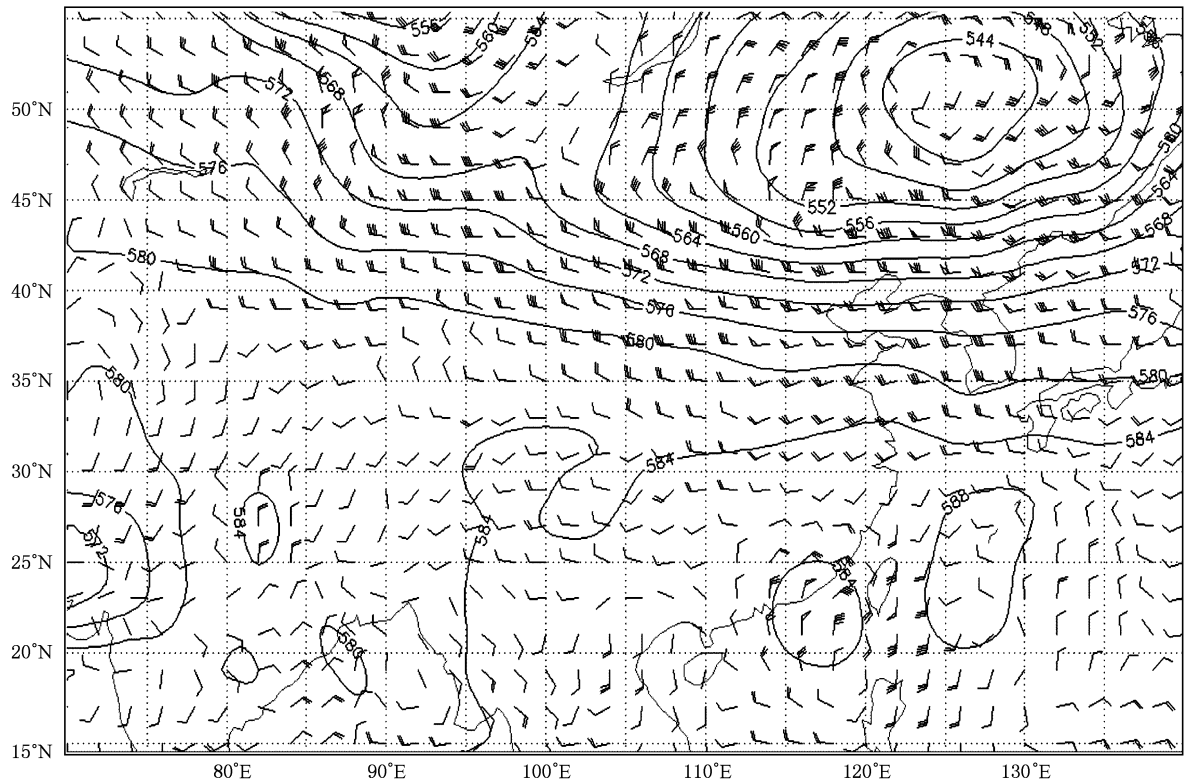


图 2 Cressman 方案分析得到风场和位势高度场等值线(等值线间距为 4×10 位势米)

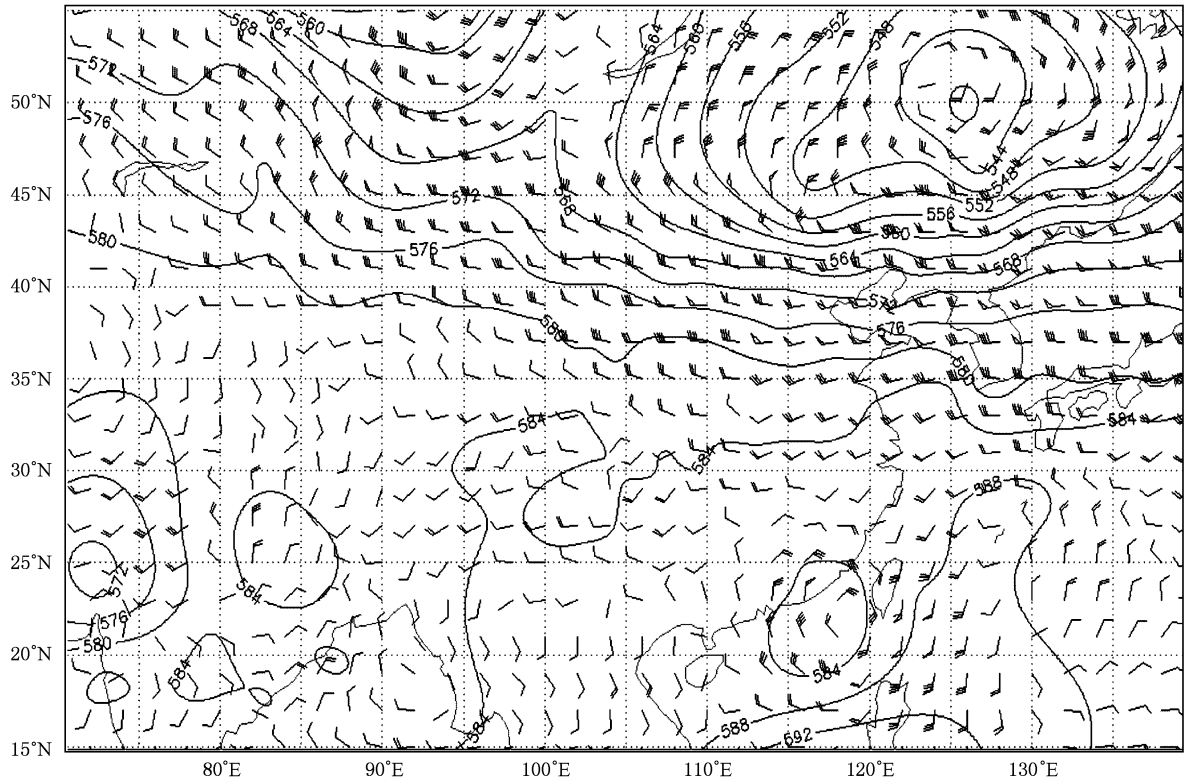


图 3 重构算法分析得到风场和位势高度场等值线(等值线间距为 4×10 位势米)

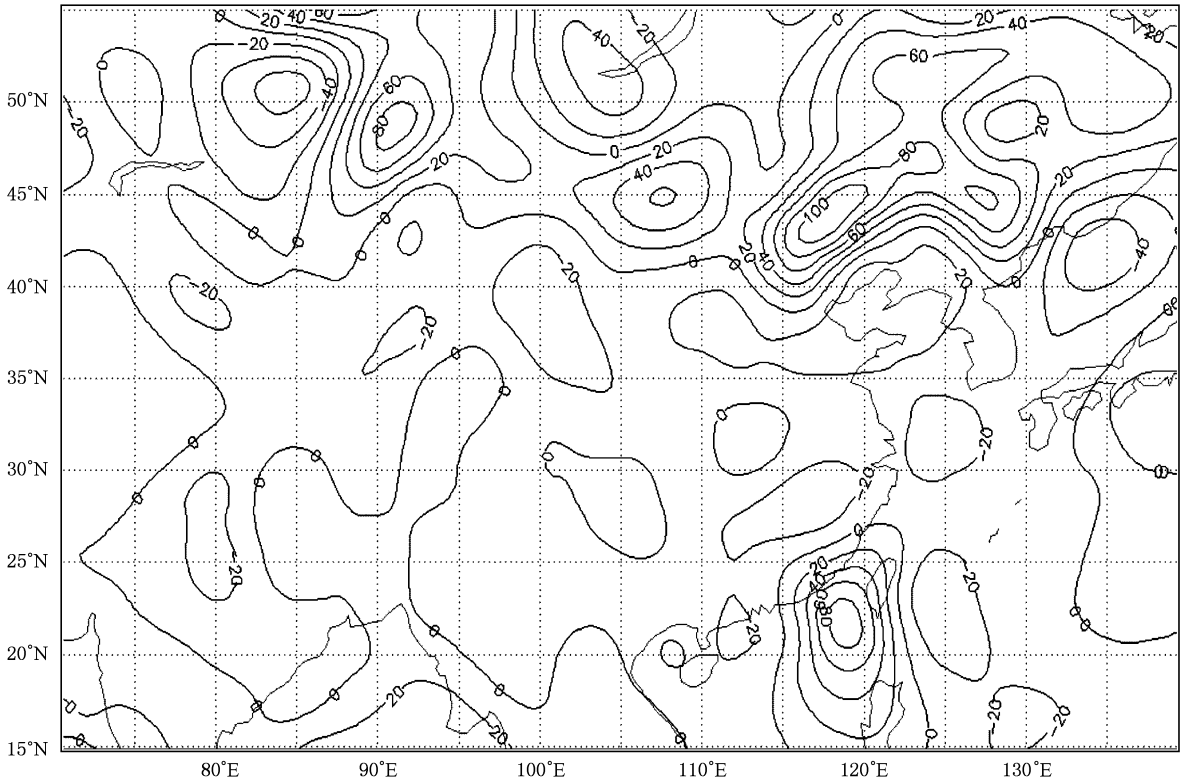


图4 差分法计算得到涡度场等值线(图中数值单位为 $10^{-6}/\text{s}$,等值线间距为 $20 \times 10^{-6}/\text{s}$)

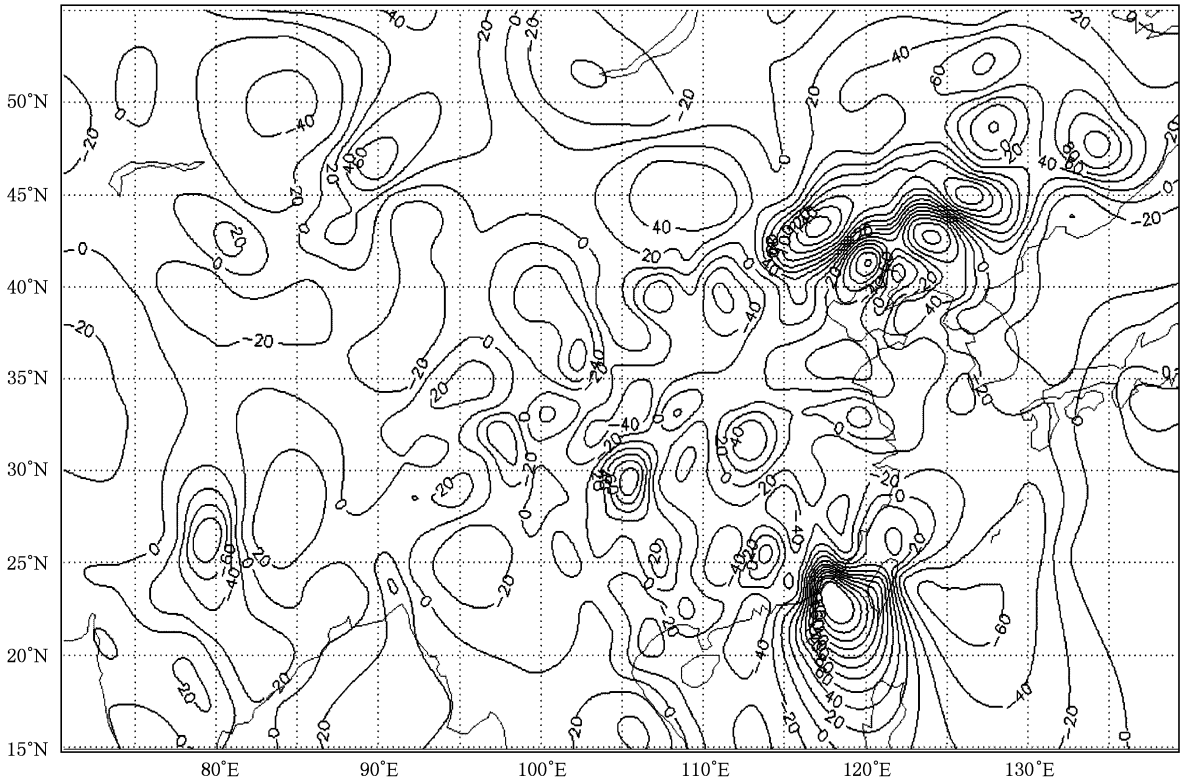


图5 重构算法计算得到涡度场等值线(图中数值单位为 $10^{-6}/\text{s}$,等值线间距为 $20 \times 10^{-6}/\text{s}$)

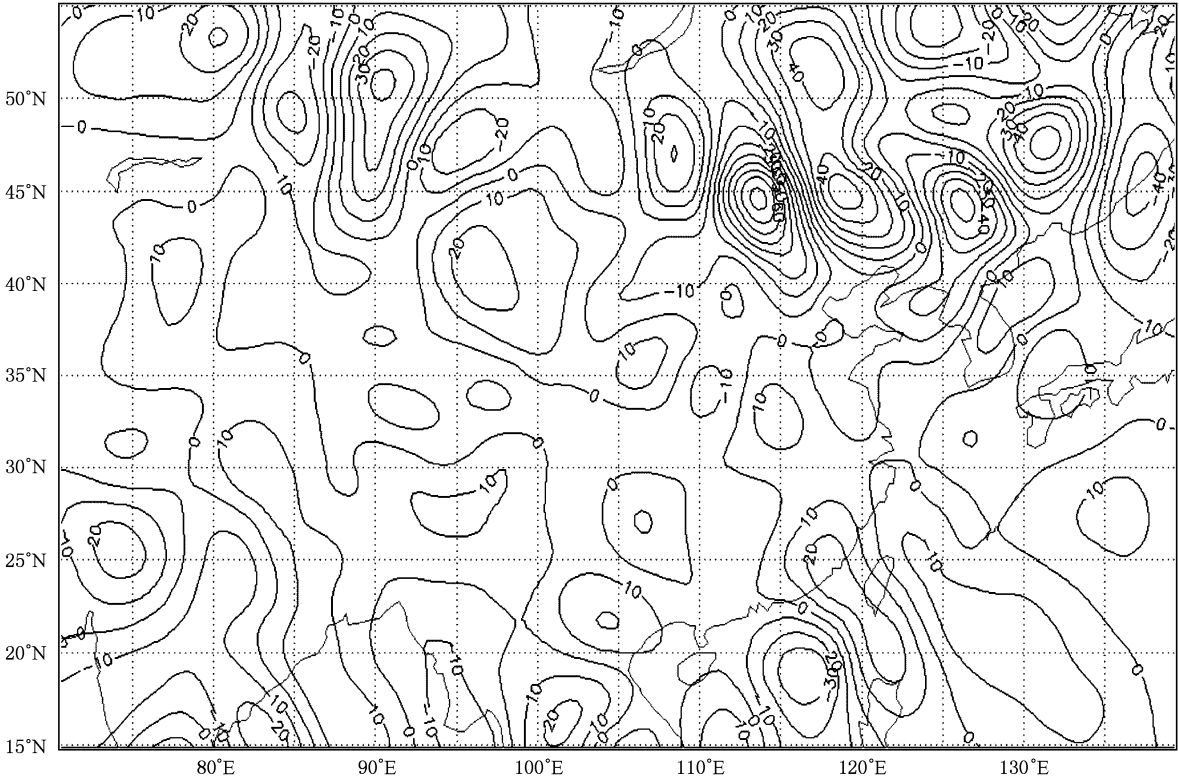


图 6 差分法计算得到散度场等值线(图中数值单位为 $10^{-6}/\text{s}$,等值线间距为 $10 \times 10^{-6}/\text{s}$)

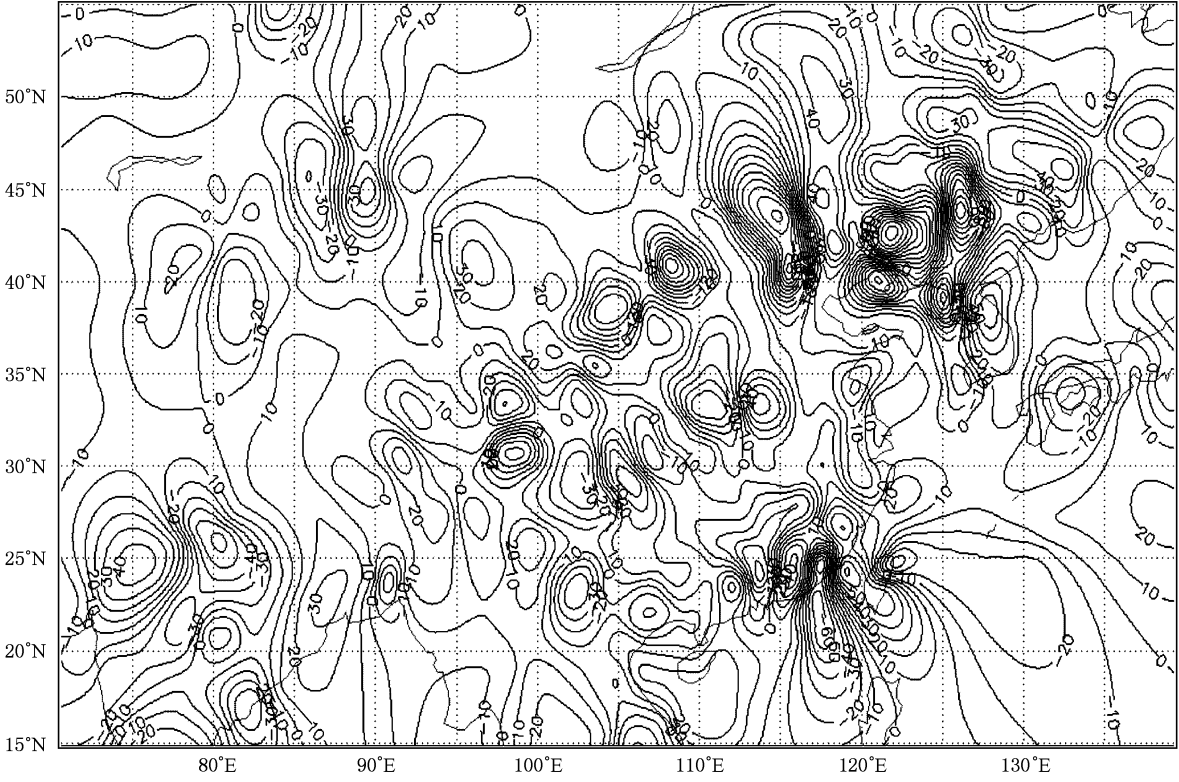


图 7 重构算法计算得到散度场等值线(图中数值单位为 $10^{-6}/\text{s}$,等值线间距为 $10 \times 10^{-6}/\text{s}$)

实况更接近. 图 3 中的分析风场完整地保留了观测风场的小尺度扰动信息, 如图 3 中 (105°E , 30°N) 附近的风切变和台湾岛西南侧的旋转风场结构特征, 更符合实况观测结果.

图 4 与图 5、图 6 与图 7 中的主要正、负值中心位置也是基本一致的, 说明两种方案都分析出了主要天气系统. 但图 5 和图 7 中等值线明显密集且有较多的、范围较小的正负值中心, 这也说明了二维一阶偏导数重构算法得到的分析风场保留了更多的小尺度天气系统信息, 并对小尺度天气系统具有很强的识别能力.

5. 结 论

本文通过模拟观测数据对二维一阶偏导数重构算法进行了有效性验证. 结果表明, 该算法能有效地解决不适定问题——二维观测气象数据求导问题, 且其精度明显高于中央差分方法. 实例表明, 将该算法应用于气象观测资料客观分析是可行的, 且应用该算法能有效地提高小尺度天气系统的识别能力.

-
- [1] Kalnay E 2005 *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability* (Beijing: China Meteorological Press) p6 (in Chinese) [Kalnay E 2005 大气模式、资料同化和可预报性(中译本)(北京:气象出版社)第6页]
 - [2] Liao D X 1996 *J. Appl. Meteor. Sci.* **7** 238 (in Chinese) [廖洞贤 1996 应用气象学报 **7** 238]
 - [3] Zhou Y S, Cao J, Gao S T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6654 (in Chinese) [周玉淑、曹洁、高守亭 2008 物理学报 **57** 6654]
 - [4] Cao J, Gao S T, Zhou Y S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2600 (in Chinese) [曹洁、高守亭、周玉淑 2008 物理学报 **57** 2600]
 - [5] Vasin V V 1973 *USSR Comput. Maths. Math. Phys.* **13** 16
 - [6] Locker J, Prenter P M 1980 *J. Math. Anal. Appl.* **74** 504
 - [7] Locker J, Prenter P M 1980 *SIAM J. Numer. Anal.* **17** 247
 - [8] Murio D A 1987 *Comput. Math. Appl.* **13** 381
 - [9] Groetsch C W 1998 *Am. Math. Mon.* **105** 320
 - [10] Groetsch C W 1992 *J. Optim. Theory Appl.* **74** 373
 - [11] Groetsch C W, Scherzer O 1993 *Electron. J. Diff. Eqns.* **1993** (4) 1
 - [12] Anderssen R, Hegland M 1999 *Math. Comput.* **68** 1121
 - [13] Wang Y B, Jia X Z, Cheng J 2002 *Inv. Prob.* **18** 1461
 - [14] Cai Q F, Huang S X, Gao S T, Zhong K, Li Z Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3912 (in Chinese) [蔡其发、黄思训、高守亭、钟科、李自强 2008 物理学报 **57** 3912]
 - [15] Wang Y B, Wei T 2005 *J. Math. Anal. Appl.* **312** 121
 - [16] Gong Z Q, Feng G L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3619 (in Chinese) [龚志强、封国林 2007 物理学报 **56** 3619]
 - [17] Zhang W, He W P, Zou M W, Feng G L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6150 (in Chinese) [张文、何文平、邹明玮、封国林 2007 物理学报 **56** 6150]
 - [18] Wang Q G, Zhang Z P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1976 (in Chinese) [王启光、张增平 2008 物理学报 **57** 1976]
 - [19] Cao X Q, Huang S X, Du H D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1984 (in Chinese) [曹小群、黄思训、杜华栋 2008 物理学报 **57** 1984]
 - [20] Huang S X, Sheng Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6720 (in Chinese) [黄思训、盛铮 2006 物理学报 **55** 6720]
 - [21] Zhang X, Wang B, Ji Z Z, Lin W T 2002 *Prog. Nat. Sci.* **12** 445
 - [22] Wang G Z, Chen J B, Wu C O 2002 *J. Liaoning Norm. Univ.* **25** 233 (in Chinese) [王桂芝、陈纪波、吴诚鸥 2002 辽宁师范大学学报 **25** 233]
 - [23] Xu G Q, Shen T L, Tan D N 2002 *J. Nanjing Instit. Meteor.* **25** 764 (in Chinese) [徐国强、沈桐立、覃丹宁 2002 南京气象学院学报 **25** 764]
 - [24] Zhu J, Wang H, Zhou G Q 2002 *Chin. Sci. Bull.* **47** 2010
 - [25] Cressman G P 1959 *Mon. Wea. Rev.* **87** 367

A new method for calculating the derivation of meteorological observational data^{*}

Wang Ye-Gui¹⁾ Cai Qi-Fa^{1)†} Huang Si-Xun²⁾

1) (*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

2) (*Institute of Meteorology, University of Science and Technology of Chinese People's Liberation Army, Nanjing 211101, China*)

(Received 16 August 2009; revised manuscript received 25 September 2009)

Abstract

Meteorological observation data have observational errors inevitably. It is an ill-posed inverse problem to perform the derivation of discrete data with observation errors. In order to solve the perplexing problem, this paper puts forward the new algorithm which reconstructs the first-order partial derivatives of the two-dimensional observation data in the rectangular region, which is based on the idea of Tikhonov regularization. We test the performance of the algorithm with a series of simulating observation data, the results show that the algorithm is effective and has higher accuracy. It is feasible to analyze meteorological observation data with the algorithm and can enhance the recognizing ability for the small-scale weather systems.

Keywords: numerical differentiation, Tikhonov regularization, objective analysis

PACC: 9260, 9260X, 0270

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40775023).

[†] Corresponding author. E-mail: caiqfa@yahoo.com.cn