第 59 卷 第 10 期 2010 年 10 月
1000-3290/2010/59(10)/6859-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 10, October 2010


# Duffing 振子系统周期解的唯一性与精确周期信号的获取方法*

王 坤† 关新平 丁喜峰 乔杰敏
(燕山大学理学院,秦皇岛 066004)
(2009 年 12 月 31 日收到;2010 年 2 月 1 日收到修改稿)

研究 Duffing 振子系统的周期解的唯一性与精确周期信号的获取方法. 应用定性分析方法,获得了一类 Duffing 振子系统具有唯一周期解的必要条件,同时也得到了一类更广泛的非线性周期系统的周期解的唯一性. 在一定条件下,给出了 Duffing 振子系统精确周期信号的获取方法.

**关键词:** Duffing 振子系统, 周期解的唯一性, 精确周期信号的获取方法
**PACC:** 0545

## 1. 引 言

混沌振子系统是一类确定性的非线性动力学方程,随着策动力幅值的变化,该系统可呈现周期态、周期分岔、混沌态、间歇混沌和大尺度周期态. Duffing-Holmes 方程属于一种混沌振子系统,已经从方程结构、方程解、分析手段以及它的可能应用等方面加以了研究. Guckenheimer 和 Holmes[1] 描述了策动力存在和不存在时的相态,用 Poincaré 映射研究系统运动过程中鞍点流形变化,计算了系统的全局同宿分叉的位置,以及从连续周期轨迹族分离出的次谐运动,利用符号动力学研究了流形相交时出现的 Cantor 集,描述了跳跃非周期运动和无数不稳定具有任意长周期的周期轨迹特征. 刘曾荣[2] 研究了线性恢复力项系数与阻尼力项系数在满足一定关系时系统出现 Smale 马蹄变换意义下的混沌,存在可列个奇数阶次的次谐周期解. 该系统从强迫振动发展到混沌运动具有 3 个条件,即非线性、耗散和局部不稳定,其中非线性保证运动形态的多样化,耗散从整体上保证运动的有限范围,局部不稳定及伴有的鞍点保证运动的非周期性[3]. 刘延柱和陈立群[4] 系统的总结了求弱非线性项的 Duffing 系统近似解析解的各种方法, Marina 和 Herisanu[5] 给出了求强非线性项的 Duffing 系统近似解析解的积分迭代方法. Srinivasan 等[6] 针对 Duffing 系统设计了非线性模拟电路,并在正弦波、方波和三角形波等周期波的激励下,对系统进行了电路模拟实验,观察到了系统由倍周期分岔过渡到混沌等波形图,并将实验的波形图与用数值模拟方法所得到的系统的相轨迹进行了比较,发现二者之间的图形十分符合. 李月等[7] 利用数值模拟方法对 Duffing 混沌振子系统周期解几何特征量进行了分析,并给出了弱周期信号的定量检测方法. 上述成果主要涉及弱参数系统演变状态和分析手段,而对于强阻尼系统处于稳定的强振幅周期激励时,系统解的基本特征论证较少,同时对一般的 Duffing 系统在双周期信号激励下,系统精确周期信号的获取方法也没有涉及.

本文针对具有强阻尼力和强振幅周期激励的一类 Duffing 系统,应用 Yoshizawa 关于非线性系统周期解唯一性的三组条件,证明了该类系统周期解的存在性、有界性和唯一性;并对一般的 Duffing 系统,利用特定的周期检测信号,得到了系统精确周期信号的获取方法,补充和发展现有的信号检测技术[8—17].

本文的研究受到了文献[18]方法的启发,但该文献在应用 Yoshizawa 的关于非线性系统周期解唯一性的三组条件[19]讨论一类 Duffing 系统的周期解

* 国家杰出青年科学基金(批准号:60525303)资助的课题.
† E-mail: wangkun8992@yahoo.com.cn

的唯一性时,所构造的辅助函数 $\phi(x,u,y,v)$ 并不满足 Yoshizawa 关于非线性系统周期解的唯一性的第三组条件中的第一、第四和第五要求. 而本文讨论的主要点之一,就是构造了与文献[18]不同的辅助函数,从而得到了具有强阻尼力和强振幅周期激励的一类 Duffing 系统周期解的存在性、有界性和唯一性.

## 2. 系统周期解的存在性

考虑如下的一类 Duffing 系统:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + a_1 x + a_3 x^3 = k\cos(\omega t), \tag{1}$$

其中 $k>0$, $a_1>0$, $a_3\geqslant 0$.

设 $f(y)=ky$, $g(x)=a_1x+a_3x^3$, 则显然有

$$\lim_{|y|\to+\infty} f(y)\,\mathrm{sgn}(y) = \lim_{|y|\to+\infty} k|y| = +\infty,$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} g(x)\,\mathrm{sgn}(x) = \lim_{|x|\to+\infty} (a_1|x| + a_3|x|^3) = +\infty.$$

因此,根据 Reuter 的周期解存在定理[19],则系统(1)至少存在一个以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的周期解.

## 3. 系统周期解的唯一性

下面利用 Yoshizawa 关于周期解唯一性的三组条件,证明系统周期解的唯一性.

1) 系统(1)等价于方程组

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -ky - a_1x - a_3x^3 + k\cos(\omega t), \tag{2}$$

令 $f(t,x,y)=y$, $g(t,x,y)=-ky-a_1x-a_2x^3+k\cos(\omega t)$, 显然 $f(t,x,y)$, $g(t,x,y)$ 在区域 $\Delta_1$: $|x|<+\infty$, $|y|<+\infty$ 及 $0\leqslant t<+\infty$ 上连续, Yashizawa 关于周期解唯一性定理中的第一组假设条件成立.

2) 给定方程

$$\ddot{x} + kf(x)\dot{x} + g(x) = kp(t), \tag{3}$$

其中 $k>0$, 且令

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$G(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s, \tag{4}$$

$$P(t) = \int_0^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

并假设如下条件满足:(ⅰ)对所有的 $x$, $f(x)>0$; 当 $|x|\to+\infty$ 时, $F(x)\,\mathrm{sgn}(x)\to+\infty$; (ⅱ)当 $x\neq 0$ 时, $xg(x)>0$; 当 $|x|\to+\infty$ 时, $G(x)\to+\infty$; (ⅲ) $p(t)$ 及 $P(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有界. 则存在与 $k$ 无关的常数 $A>0$, $B>0$, 使得对于方程(3)的任意解 $x=x(t)$, 存在相应 $T_0$, 当 $t>T_0$ 时, 有

$$|x(t)| < A,\ |\dot{x}(t)| < B. \tag{5}$$

对于 Duffing 方程(1), 令 $f(x)=1$, $g(x)=a_1x+a_3x^3$, $p(t)=\cos(\omega t)$, 由(4)式得

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{d}s = x,$$

$$G(x) = \int_0^x (a_1 s + a_3 s^3)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{4}a_3x^4,$$

$$P(t) = \int_0^t \cos(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t). \tag{6}$$

则显然有:(ⅰ)对所有的 $x$, $f(x)=1>0$; 当 $|x|\to+\infty$ 时, $F(x)\,\mathrm{sgn}(x)=|x|\to+\infty$; (ⅱ)当 $x\neq 0$ 时, $xg(x)=a_1x^2+a_3x^4>0$; 当 $|x|\to+\infty$ 时, $G(x)=\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{4}a_3x^4\to+\infty$; (ⅲ) $p(t)=\cos(\omega t)$ 及 $P(t)=\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有界, 因此结合系统(1)周期解的存在性, 可知存在与 $k$ 无关的常数 $A>0$, $B>0$, 对于方程(1)的任意解 $x=x(t)$, 存在相应 $T_0$, 当 $t>T_0$ 时, 有 $|x(t)|<A$, $|\dot{x}(t)|<B$.

对于 Duffing 方程(1)的等价方程组(2), 显然有 $|x(t)|<A$, $|y(t)|=|\dot{x}(t)|<B$, Yashizawa 关于周期解唯一性定理中的第二组假设条件成立.

3) 对于方程组(2), 在给定区域 $\Delta_2$: $|x|\leqslant A$, $|u|\leqslant A$, $|y|\leqslant B$, $|v|\leqslant B$ 上, 构造辅助函数

$$E(x,u,y,v) = \frac{1}{2}p(x-u)^2 + \frac{1}{2}q(y-v)^2 + r(x-u)(y-v), \tag{7}$$

其中 $p,q,r$ 均为大于零的常数, 且满足 $p=kr+a_1q$, $r^2<pq$.

下证 $E(x,u,y,v)$ 满足 Yashizawa 关于周期解唯一性定理中的第三组假设条件, 该组条件的论证分为以下 5 个方面进行.

(ⅰ) 当 $|x-u|+|y-v|>0$ 时, $E(x,u,y,v)>0$.

证明: 当 $(x-u)$ 和 $(y-v)$ 不同时为零, 将 $E(x,u,y,v)$ 看作以 $(x-u)$ 和 $(y-v)$ 为变量的二次型, 则该二次型的主子式为

$$p/2 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} p/2 & r/2 \\ r/2 & q/2 \end{vmatrix} = (pq-r^2)/4 > 0,$$

故 $E(x,u,y,v)$ 为正定二次型，得 $E(x,u,y,v)>0$.

（ⅱ）当 $|x-u|+|y-v|=0$ 时，$E(x,u,y,v)=0$.

证明：将 $|x-u|+|y-v|=0$ 代入 $E(x,u,y,v)$，得 $E(x,u,y,v)=0$.

（ⅲ）满足 Lipschitz 条件，即存在 $L>0$，使

$$|E(x,u,y,v)-E(x_1,u_1,y_1,v_1)| \leqslant L(|x-x_1|+|u-u_1|+|y-y_1|+|v-v_1|)$$

成立.

证明：由(7)式得

$$\begin{aligned}
&|E(x,u,y,v)-E(x_1,u_1,y_1,v_1)|\\
&=|p(x-u)^2/2+q(y-v)^2/2\\
&\quad+r(x-u)(y-v)-p(x_1-u_1)^2/2\\
&\quad-q(y_1-v_1)^2/2-r(x_1-u_1)(y_1-v_1)|\\
&=|p(x+x_1+u+u_1)(x-x_1-u+u_1)/2\\
&\quad+q(y+y_1+v+v_1)(y-y_1-v+v_1)/2\\
&\quad+r[(x-u)(y-y_1-v+v_1)\\
&\quad+(y_1-v_1)(x-x_1-u+u_1)]|\\
&\leqslant 2pA(|x-x_1|+|u-u_1|)\\
&\quad+2qB(|y-y_1|+|v-v_1|)\\
&\quad+2rA(|y-y_1|+|v-v_1|)\\
&\quad+2rB(|x-x_1|+|u-u_1|)
\end{aligned}$$

令 $L=\max(2pA,2qB,2rA,2rB)$，则有

$$|E(x,u,y,v)-E(x_1,u_1,y_1,v_1)| \leqslant L(|x-x_1|+|u-u_1|+|y-y_1|+|v-v_1|)$$

满足 Lipschitz 条件.

（ⅳ）对于 $\Delta_2$ 内任意一点 $(x,u,y,v)$ 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{E[x+\varepsilon\dot{x}(t,x,y),u+\varepsilon\dot{x}(t,u,v),y\\
&\quad+\varepsilon\dot{y}(t,x,y),v+\varepsilon\dot{y}(t,u,v)]\\
&\quad-E(x,u,y,v)\}\leqslant 0.
\end{aligned}$$

（ⅴ）对任意的 $C_\varepsilon>0$，对应着一个数 $\mu(C_\varepsilon)$，使得对满足 $|x-u|+|y-v|\geqslant C_\varepsilon$ 的每个点 $(x,u,y,v)\in\Delta_2$，都有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{E[x+\varepsilon\dot{x}(t,x,y),u+\varepsilon\dot{x}(t,u,v),y\\
&\quad+\varepsilon\dot{y}(t,x,y),v+\varepsilon\dot{y}(t,u,v)]\\
&\quad-E(x,u,y,v)\}\leqslant\mu(C_\varepsilon)<0.
\end{aligned}$$

以下对（ⅳ）与（ⅴ）两个方面的结论统一进行证明.

证明：为了证明（ⅳ）与（ⅴ）两个方面的结论成立，只需证明下式是以 $(x-u)$ 和 $(y-v)$ 为变量的负定二次型

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E}{\partial x}\dot{x}(t,x,y)+\frac{\partial E}{\partial u}\dot{x}(t,u,v)+\frac{\partial E}{\partial y}\dot{y}(t,x,y)\\
&\quad+\frac{\partial E}{\partial v}\dot{y}(t,u,v)\\
&=[p(x-u)+r(y-v)](y-v)+[q(y-v)\\
&\quad+r(x-u)][-k(y-v)-a_1(x-u)\\
&\quad-a_3(x^3-u^3)]\\
&=-(qk-r)(y-v)^2-r[a_1+a_3(x^2+u^2+xu)]\\
&\quad\times(x-u)^2+[p-a_1q-kr-a_3q(x^2+u^2+xu)]\\
&\quad\times(x-u)(y-v),
\end{aligned}\tag{8}$$

当 $k$ 很大时，且注意到 $x^2+u^2+xu$ 的非负性，则其一阶主子式：$-(qk-r)<0$，$-r[a_1+a_3(x^2+u^2+xu)]<0$，其二阶主子式

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
-(qk-r) & [p-a_1q-kr-a_3q(x^2+u^2+xu)]/2\\
[p-a_1q-kr-a_3q(x^2+u^2+xu)]/2 & -r[a_1+a_3(x^2+u^2+xu)]
\end{vmatrix}\\
&=r(qk-r)[a_1+a_3(x^2+u^2+xu)]-[p-a_1q-kr-a_3q(x^2+u^2+xu)]^2/4\\
&=(rqk-r^2)[a_1+a_3(x^2+u^2+xu)]-a_3^2q^2(x^2+u^2+xu)^2/4\\
&\geqslant a_1rqk-a_1r^2-a_3^2q^2A^4>0,
\end{aligned}$$

因此二次型(8)为负定的二次型，故（ⅳ），（ⅴ）两个方面的结论成立.

由以上 5 个方面的证明，知解的稳定性条件成立，即 Yashizawa 关于周期解唯一性定理中的第三组假设条件成立.

综上所述，系统(1)有唯一的周期解，且其他的解都渐进趋于这个周期解.

**定理 1**　在 Duffing 系统(1)中，如果 $a_1>0$，$a_3\geqslant 0$，且 $k$ 很大时，则该系统存在唯一的以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的稳定的周期解.

应用定理 1 的证明方法，不难得到更广泛的结论.

**定理 2**　设方程

$$\ddot{x}+kb\dot{x}+\sum_{i=0}^{n}a_{2i+1}x^{2i+1}=kp(t),\qquad(9)$$

其中 $k>0,b>0,a_1>0,a_{2i+1}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，$p(t)$ 是以 $\omega$ 为周期的连续函数，且 $P(t)=\int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau$ 在区间 $(0,+\infty)$ 有界，则当 $k$ 很大时，方程(9)存在唯一的以 $\omega$ 为周期的稳定的周期解.

## 4. 系统精确周期信号的获取方法

在 Duffing 系统 $\ddot{x}+c\dot{x}+a_1x+a_3x^3=\lambda\cos(\omega t)$ 的右端增加周期检测信号 $\mu\cos(3\omega t+3\theta_0)$ 得

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+c\dot{x}+a_1x+a_3x^3\\&=\lambda\cos(\omega t)+\mu\cos(3\omega t+3\theta_0).\end{aligned}\qquad(10)$$

令

$$x=E\cos(\omega t+\theta_0),\qquad(11)$$

将(11)式代入方程(10)得

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+c\dot{x}+a_1x+a_3x^3\\&=-\omega^2E\omega^2\cos(\omega t+\theta_0)-c\omega E\sin(\omega t+\theta_0)\\&\quad+a_1E\cos(\omega t+\theta_0)-a_3E^3[3\cos(\omega t+\theta_0)\\&\quad+\cos(3\omega t+3\theta_0)]/4\\&=[(3a_3E^3/4+a_1E-\omega^2E)\cos\theta_0-c\omega E\sin\theta_0]\cos\omega t\\&\quad+[c\omega E\cos\theta_0-(3a_3E^3/4+a_1E-\omega^2E)\sin\theta_0]\\&\quad\times\sin\omega t+a_3E^3\cos(3\omega t+3\theta_0)/4\\&=\lambda\cos(\omega t)+\mu\cos(3\omega t+3\theta_0),\end{aligned}\qquad(12)$$

由(12)式得

$$\left(\frac{3}{4}a_3E^3+a_1E-\omega^2E\right)\cos\theta_0-c\omega E\sin\theta_0=\lambda$$

$$c\omega E\cos\theta_0-\left(\frac{3}{4}a_3E^3+a_1E-\omega^2E\right)\sin\theta_0=0$$

$$\frac{1}{4}a_3E^3=\mu,\qquad(13)$$

由(13)式得

$$\cos\theta_0=\frac{\lambda(3a_3E^3/4+a_1E-\omega^2E)}{(c\omega E)^2+(3a_3E^3/4+a_1E-\omega^2E)^2}$$

$$\sin\theta_0=\frac{\lambda c\omega E}{(c\omega E)^2+(3a_3E^3/4+a_1E-\omega^2E)^2}$$

$$E=(4a_3^{-1}\mu)^{1/3},\qquad(14)$$

由(14)式得

$$(c\omega E)^2+(3a_3E^3/4+a_1E-\omega^2E)^2=\lambda^2.\qquad(15)$$

将(15)式看作以 $E$ 为变量的方程，并应用连续函数介值定理，可以判断该方程至少存在一个正根. 因此，对于常数 $c,a_1,a_3\neq 0,\lambda$，只要 $\theta_0,\mu,E$ 满足(14)和(15)式，就能得到系统(10)的精确周期信号 $x=E\cos(\omega t+\theta_0)$.

例如：在系统(10)中，取 $a_1=\omega^2$，$\lambda=\frac{c\omega}{2}\sqrt{\frac{81c\omega}{72a_3^2}+\frac{3}{a_3}}$，此时 $\theta_0=\frac{\pi}{4}$，$E=2\sqrt{\frac{c\omega}{a_3}}$，则得系统

$$\begin{aligned}\ddot{x}+c\dot{x}+\omega^2x+a_3x^3&=\lambda\cos(\omega t)\\&\quad+\mu\cos(3\omega t+3\pi/4)\end{aligned}$$

的一个精确周期信号 $x=2\sqrt{\frac{c\omega}{a_3}}\cos(\omega t+\pi/4)$.

## 5. 结　　论

1)证明了一类 Duffing 系统周期解的存在性与唯一性，同时把该结论推广到一类更广泛的非线性周期系统.

2)给出了具有双余弦强迫周期力的 Duffing 系统精确周期信号的获取方法.


[1] Guckenheimer J, Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer-Verlag Press)

[2] Liu Z R 1994 *Perturbation Criteria for Chaos* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [刘曾荣 1994 混沌的微扰判据 (上海: 上海科技教育出版社)]

[3] Liu S K, Liu S D, Tan B K 1996 *Nonlinear Atmospheric Dynamics* (Beijing: National Defense Industry Press) (in Chinese) [刘式适、刘式达、谭本馗 1996 非线性大气动力学 (北京: 国防工业出版社)]

[4] Liu Y Z, Chen L Q 2003 *Nonlinear Vibrations* (Beijing: High Education Press) (in Chinese) [刘延柱、陈立群 2003 非线性振动 (北京: 高等教育出版社)]

[5] Marinca V, Herisanu N 2008 *Chaos Soliton. Fractals* **37** 114

[6] Srinivasan K, Thamilmaran K, Venkatesan A 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **40** 319

[7] Li Y, Xu K, Yang B J, Yuan Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3344 (in Chinese) [李 月、徐 凯、杨宝俊、袁 野 2008 物理学报 **57** 3344]

[8] Li Y, Lu P, Yang B J, Zhao P X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1672 (in Chinese)［李　月、路　鹏、杨宝俊、赵雪平 2006 物理学报 **55** 1672］

[9] Wang G Y, Zheng W, He S L 2002 *Signal Process.* **82** 103

[10] Wang G Y, He S L 2003 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **50** 945

[11] Chen L, Wang D S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5098 (in Chinese)［谌　龙、王德石 2007 物理学报 **56** 5098］

[12] Xing H Y, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3771 (in Chinese)［行鸿彦、徐　伟 2007 物理学报 **56** 3771］

[13] Schilling R J, Robert J C, James J 2001 *IEEE Trans. Neural Networks* **12** 1

[14] Henry H 2000 *IEEE Trans. Neural Networks* **5** 1131

[15] Guo H J, Liu J H 2004 *Acta Phys . Sin.* **53** 4080 (in Chinese)［郭会军、刘君华 2004 物理学报 **53** 4080］

[16] Kong Z Q, Liu D, Ren H P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 531 (in Chinese)［孔志强、刘　丁、任海鹏 2003 物理学报 **52** 531］

[17] Wu F L, Shi Z K, Yang X H 2007 *J. Ship. Mech.* **11** 136 (in Chinese)［吴方良、石仲堃、杨向晖 2007 船舶力学 **11** 136］

[18] Li Y, Yang B J, Lin H B, Liu X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1994 (in Chinese)［李　月、杨宝俊、林红波、刘晓华 2005 物理学报 **54** 1994］

[19] Sansone G, Conti R 1983 *Nonlinear Differential Equations* (Beijing: Science Press) (in Chinese)［中译本］［Sansone G, Conti R, 黄启昌、金成桴、史希福译 1983 非线性微分方程(北京：科学出版社)］


# Acquisition method of precise periodic signal and uniqueness of periodic solutions of Duffing oscillator system*


Wang Kun†　Guan Xin-Ping　Ding Xi-Feng　Qiao Jie-Min

(*College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004, *China*)


(Received 31 December 2009; revised manuscript received 1 Feburary 2010)


Abstract

The acquisition method of precise periodic signal and uniqueness of periodic solutions of Duffing oscillator system is investigated. The necessary condition of uniqueness of periodic solutions of a kind of Duffing oscillator system is presented and the uniqueness of periodic solutions of some extensive nonlinear periodic system is simultaneously obtained by using qualitative analysis method . The acquisition method of precise periodic signal Duffing oscillator system is given under certain conditions.



**Keywords**: Duffing oscillator system, uniqueness of periodic solutions, acquisition method of precise periodic signal

**PACC**: 0545


* Project supported by the National Science Foundation for Distinguished Young Scholors of China (Grant No. 60525303).

† E-mail: wangkun8992@yahoo.com.cn