

## 双泡超声空化计算分析\*

卢义刚<sup>†</sup> 吴雄慧

(华南理工大学理学院物理系, 广州 510640)

(2010 年 5 月 17 日收到; 2010 年 7 月 17 日收到修改稿)

将由速度势叠加原理得到的双泡超声空化动力学微分方程归一化, 通过 matlab 语言编程计算, 分析了水中空化泡的线度、双泡间距、声压幅值、声波频率等因素对空化过程的影响. 在双泡超声空化动力学微分方程中引入双频超声, 探讨了双泡双频超声问题. 研究表明泡的线度是决定空化特性的主要因素, 声压幅值对空化特性的影响最大, 其次是超声波的频率; 双泡间的相互作用影响空化特性, 这种影响随双泡间距的增大而减弱; 双频超声对双泡空化特性的影响有限, 这种影响在两超声分量的声压幅值相等时较强.

**关键词:** 超声空化, 双泡, 双频超声

**PACS:** 62.60.+V, 43.35.+d

## 1. 引言

1894 年发现空化现象<sup>[1]</sup>. 之后, 许多学者对空化动力学问题进行了研究. 1917 年, Rayleigh<sup>[2]</sup>建立了不可压缩液体中气泡动力学理论模型. 在考虑液体可压缩性后, Plesset 对 Rayleigh 方程进行改进, 得到了著名的 P-R 方程<sup>[3]</sup>.

国内学者通过建立“振子模型”, 对单泡的声致发光动力学特性进行研究, 探讨了在不同驱动声压下气泡半径随时间的变化关系, 分析了气泡膨胀、崩溃和回弹三个阶段的动力学行为<sup>[4]</sup>. 也有学者从气泡空化模型入手, 通过改变激励信号的频率、声压、气泡初始半径等参量, 研究了声孔效应中气泡动力学激励机理<sup>[5]</sup>. 近期用格子 Boltzmann 方法对水体中的空化现象进行了数值模拟<sup>[6]</sup>. Nam 研究了疏水表面上单泡动力学问题, 通过数值计算和高速摄像仪实验, 研究了亲水性和疏水性对气泡最大半径和溃灭时间的影响, 理论计算很好的符合了实验结果<sup>[7]</sup>, 他的研究也告诉人们计算仿真将是研究空化问题的一种有效的手段.

为了使研究逐步接近实际的情形, 研究者们开始考虑双泡问题. 1971 年 Shima 首次对双泡问题进行讨论<sup>[8]</sup>, 给其他学者研究双泡问题提供了方法上

的参考. Fujikawa 研究发现, 液体的粘度、表面张力、可压缩性等特性对球泡的动力学过程都有影响<sup>[9]</sup>. 蒲中奇等研究发现两球泡之间的距离影响空化泡溃灭的最小半径和溃灭时间<sup>[10]</sup>. 梁柱等研究了多相流中双泡运动规律, 通过数值计算分析了空化泡之间以及固体颗粒与空化泡之间的相互关系<sup>[11]</sup>.

到目前, 对单泡动力学问题的研究比较深入<sup>[12-14]</sup>. 而对于双泡, 由于双泡之间的相互作用, 使问题变得复杂, 一般是根据速度势叠加来推导双泡的动力学方程, 进而进一步分析液体特性与空化特性之间的关系, 而在双泡问题的研究中, 考虑有外加声场的情况较少<sup>[15]</sup>.

## 2. 超声作用下双泡动力学方程

如图所示 1 所示, 设两球形泡的中心分别位于为  $O_1, O_2$ , 半径分别为  $R_1, R_2$ , 两泡中心相距  $L$ . 假定两泡内有同种气体, 泡在运动过程中其中心位置保持固定且始终为球形, 泡内气体遵循绝热过程法则, 泡内和泡壁无质量和热量的交换, 泡外的液体是不可压缩的.  $Q$  为空泡外任意一点,  $P$  为外加超声扰动.

假设球泡溃灭时, 气泡壁的运动速度远小于液体中的声速, 此时空化泡周围的流体运动可以用线

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10674048) 和广东省自然科学基金 (批准号: 10251064101000007) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: phyiglu@scut.edu.cn

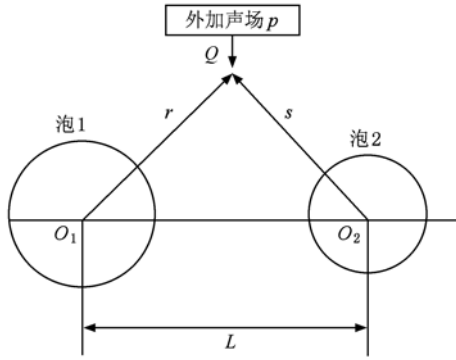


图1 两球泡系统

性波动方程描述<sup>[7]</sup>

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi, \quad (1)$$

式中  $c$  为液体声速,  $t$  为时间,  $\phi$  是流体的速度势满足下面叠加法则:

$$\phi = \phi_1(r, t) + \phi_2(s, t), \quad (2)$$

$\phi_1(r, t)$ ,  $\phi_2(s, t)$  分别为泡 1 和泡 2 周围的速度势, 且

$$\phi_1(r, t) = \frac{R_1^2}{2r} \frac{dR_1}{dt}, \quad (3)$$

$$\phi_2(s, t) = \frac{R_2^2}{2s} \frac{dR_2}{dt}. \quad (4)$$

由上面式子结合边界条件可得<sup>[9,16]</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R_1}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{R_1} \left( \frac{dR_1}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{\rho R_1^2} \frac{dR_1}{dt} \\ & + \frac{R_2^2}{R_1 L} \left[ \frac{d^2 R_2}{dt^2} + \frac{2}{R_2} \left( \frac{dR_2}{dt} \right)^2 \right] \\ & = \frac{1}{R_1 \rho} \left[ p_v - p_0 - \frac{2\sigma}{R_1} + p_{1g0} \left( \frac{R_{10}}{R_1} \right)^{3\gamma} - P \right], \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R_2}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{R_2} \left( \frac{dR_2}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{\rho R_2^2} \frac{dR_2}{dt} \\ & + \frac{R_1^2}{R_2 L} \left[ \frac{d^2 R_1}{dt^2} + \frac{2}{R_1} \left( \frac{dR_1}{dt} \right)^2 \right] \\ & = \frac{1}{R_2 \rho} \left[ p_v - p_0 - \frac{2\sigma}{R_2} + p_{2g0} \left( \frac{R_{20}}{R_2} \right)^{3\gamma} - P \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

上面两式中  $\rho$ ,  $p_0$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$  分别为液体密度、静压力、表面张力系数和黏滞系数,  $R_{10}$ ,  $R_{20}$  及  $p_{1g0}$ ,  $p_{2g0}$  分别为两泡的初始半径和泡内初始气压,  $p_v$  为泡内蒸汽压,  $\gamma$  为气体的比热比,  $P$  为外加声场. 上面两式即为在超声  $P$  作用下的双泡动力学方程.

为了便于计算, 做如下变换:  $\beta_i = \frac{R_i}{R_{i0}}$ ,  $l_i = \frac{R_{i0}}{L}$ ,  $k_i$

$= \frac{P_{ig0}}{p_0 - p_v}$ ,  $i = 1, 2$  代表泡 1 和泡 2,  $\tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{p_0 - p_v}{\rho}}$ ,  $A = \frac{4\mu}{L \sqrt{\rho(p_0 - p_v)}}$ ,  $B = \frac{\sigma}{L(p_0 - p_v)}$ ,  $p = \frac{P}{p_0 - p_v}$ , 经变换后 (5) (6) 两式化为

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \beta_1}{d\tau^2} + \frac{3}{2\beta_1} \left( \frac{d\beta_1}{d\tau} \right)^2 + \frac{A}{\beta_1^2 l_1^2} \frac{d\beta_1}{d\tau} \\ & + \left[ \frac{\beta_2^2 l_2^3}{\beta_1^2 l_1^2} \frac{d^2 \beta_2}{d\tau^2} + \frac{2l_2^3}{\beta_1^2 l_1^2} \left( \frac{d\beta_2}{d\tau} \right)^2 \right] \\ & = \frac{1}{\beta_1 l_1^2} \left[ \left( k_1 \beta_1^{-3\gamma} - \frac{2B}{\beta_1 l_1} - 1 \right) - p \right], \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \beta_2}{d\tau^2} + \frac{3}{2\beta_2} \left( \frac{d\beta_2}{d\tau} \right)^2 + \frac{A}{\beta_2^2 l_2^2} \frac{d\beta_2}{d\tau} \\ & + \left[ \frac{\beta_1^2 l_1^3}{\beta_2^2 l_2^2} \frac{d^2 \beta_1}{d\tau^2} + \frac{2l_1^3}{\beta_2^2 l_2^2} \left( \frac{d\beta_1}{d\tau} \right)^2 \right] \\ & = \frac{2}{\beta_2 l_2^2} \left[ \left( k_2 \beta_2^{-3\gamma} - \frac{2B}{\beta_2 l_2} - 1 \right) - p \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

讨论水的空化问题, 取  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $p_0 - p_v = 0.1 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\sigma = 7.061 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $p_{1g0} = p_{2g0} = 0.02 \text{ MPa}$ . 用四阶龙格-库塔方法进行计算, 计算程序用 matlab 语言编写.

### 3. 泡的线度及双泡间距对空化的影响

假定外加声场为  $P = 5 \times 10^5 \sin 2\pi \times 10^4 t$ ,  $l = 1/10, 1/8, 1/5, 1/3$ , 两泡的半径均为  $10^{-4} \text{ m}$ , 此时, 两泡的空化情况相同, 泡的空化曲线如图 2 所示. 单泡第一溃灭的时间和最小半径是  $10.425 \text{ } \mu\text{s}$  和  $\beta = 0.1797$ , 而双泡在  $l = 1/10, 1/8, 1/5, 1/3$  时, 溃灭时间分别为  $55.015, 58.829, 64.505, 68.427 \text{ } \mu\text{s}$ , 最小半径  $\beta$  分别为  $0.1499, 0.1439, 0.1230, 0.0788$ .

可见, 由于双泡间的相互作用, 使得双泡溃灭在时间上滞后, 空化周期也变长, 溃灭的程度加深, 即溃灭时的半径变小, 这种影响随双泡间距变小而增强.

设  $R_{10}$  为  $10^{-4} \text{ m}$ ,  $R_{20}$  分别为  $2 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $5 \times 10^{-4} \text{ m}$  和  $8 \times 10^{-4} \text{ m}$ , 此时  $l_1 \neq l_2$ , 两泡之间的距离  $L$  分别为  $3R_{20}, 5R_{20}$  和  $10R_{20}$  进行计算. 图 3 给出的是  $L = 5R_{20}$  时的计算结果. 此时, 小泡和大泡的第一溃灭时间分别是  $70.955 \text{ } \mu\text{s}$ ,  $114.885 \text{ } \mu\text{s}$ , 最小半径  $\beta$  分别是  $0.1961, 0.1414$ , 而对应单泡单泡的第一溃灭时间分别是  $10.425 \text{ } \mu\text{s}$ ,  $15.514 \text{ } \mu\text{s}$ , 最小半径  $\beta$  分别是  $0.1797, 0.1673$ . 由于双泡间的相互作用, 使得

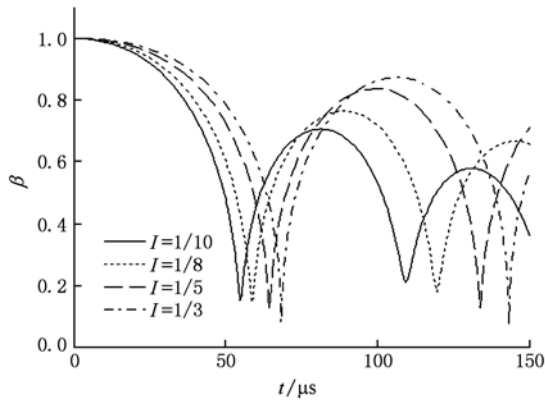
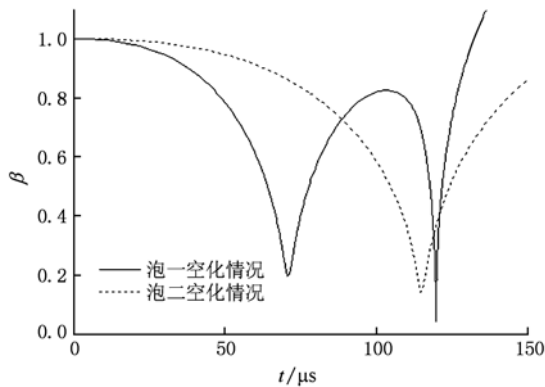


图2 双泡间距对空化的影响

两泡的溃灭时间较相应单泡都有较大的滞后,两泡的溃灭程度均有所加深.

图3  $L=5R_{20}$ ,  $R_{10}=10^{-4}$  m,  $R_{20}=2 \times 10^{-4}$  m 时双泡空化曲线

假设双泡的半径相同都是  $10^{-4}$  m,  $l=1/10$  时泡第一溃灭时间为  $55.015 \mu\text{s}$ , 溃灭时的半径  $\beta$  为  $0.1499$ ; 假设双泡的半径相同都是  $2 \times 10^{-4}$  m, 泡第一溃灭时间为  $104.865 \mu\text{s}$ , 溃灭时的半径  $\beta$  为  $0.1162$ . 在双泡的半径分别为  $1 \times 10^{-4}$  m 和  $2 \times 10^{-4}$  m 时, 两泡的第一溃灭时间分别为  $70.955 \mu\text{s}$  和  $114.885 \mu\text{s}$ , 两泡溃灭时的半径  $\beta$  分别为  $0.1961$  和  $0.1414$ . 即, 由于双泡间的相互作用, 无论是小泡还是大泡, 它们的泡第一溃灭时间都滞后, 溃灭半径都减小.

泡自身的线度是影响空化过程的主要因素. 小泡在第一次溃灭时, 大泡半径的变化对其影响不大, 但在小泡第二次溃灭时, 在  $R_{20}$  分别取  $2 \times 10^{-4}$  m,  $5 \times 10^{-4}$  m 和  $8 \times 10^{-4}$  m 及  $L$  分别取  $3R_{20}$ ,  $5R_{20}$  和  $10R_{20}$  时, 小泡溃灭时的半径低谷都有明显的加深. 随着  $L$  的变大, 小泡空化曲线的低谷向左移

动, 即向单泡曲线靠近, 表明大泡对小泡的作用变弱.

#### 4. 超声幅值和频率对空化的影响

设频率为  $20 \text{ kHz}$ , 声压幅值分别取  $5 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $1 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $5 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $R_{10} = R_{20} = 10^{-4} \text{ m}$ ,  $L = 10R_{20}$ , 计算得到双泡空化曲线如图4所示.

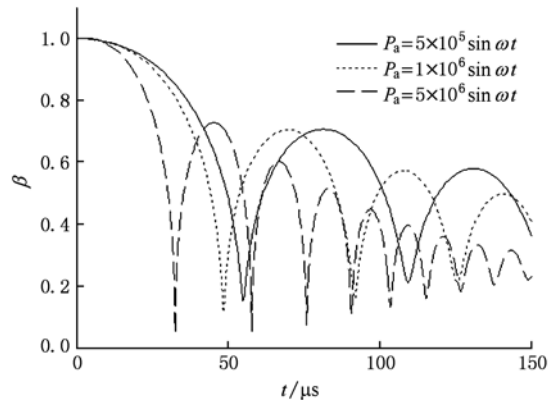


图4 声压幅值对空化的影响

声压幅值分别取  $5 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $1 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $5 \times 10^6 \text{ Pa}$  时, 泡第一次的溃灭时间分别是  $55.01 \mu\text{s}$ ,  $48.508 \mu\text{s}$  和  $32.517 \mu\text{s}$ , 溃灭半径  $\beta$  分别是  $0.1499$ ,  $0.1128$  和  $0.0419$ . 显然, 提高声压幅值是加剧空化的有效手段.

考虑两泡半径不相等、双泡间距及声压幅值变化, 计算了  $R_{10} = 10^{-4} \text{ m}$ ,  $R_{20} = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $5 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $8 \times 10^{-4} \text{ m}$ ;  $P_a = 5 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $1 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $5 \times 10^6 \text{ Pa}$ ;  $L = 3R_{20}$ ,  $5R_{20}$ ,  $10R_{20}$  等情况下的双泡空化过程, 分析发现: 泡自身的线度决定着泡溃灭的时间和程度, 决定着泡空化的基本特征; 声压幅值对泡的溃灭过程有重要影响, 大的声压幅值能缩短泡的溃灭周期, 同时又加大泡的溃灭程度; 随着双泡间距变大, 空化曲线的低谷向左移动, 表明双泡之间的相互作用变弱; 相对于泡的线度、声压幅值而言, 双泡间距的变化对空化过程影响较小.

设声压幅值为  $5 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 频率分别为  $20 \text{ kHz}$ ,  $30 \text{ kHz}$ ,  $40 \text{ kHz}$ ,  $R_{10} = R_{20} = 10^{-4} \text{ m}$ ,  $L = 10R_{20}$ , 计算得到双泡空化曲线如图5所示.

在频率取  $20, 30, 40 \text{ kHz}$  时, 泡第一次的溃灭时间分别是  $55.015 \mu\text{s}$ ,  $51.571 \mu\text{s}$  和  $49.085 \mu\text{s}$ , 溃灭半径  $\beta$  分别是  $0.1499$ ,  $0.1314$  和  $0.1196$ . 相对于声压而言, 频率对空化的影响较小. 为进一步分析, 取声

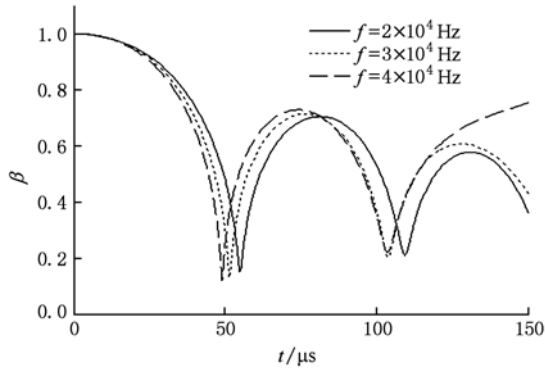


图5 频率对同半径空化的影响

压幅值为  $5 \times 10^5$  Pa, 频率为 20, 30, 50 kHz,  $R_{10}$  为  $10^{-4}$  m,  $R_{20}$  为  $2 \times 10^{-4}$  m,  $5 \times 10^{-4}$  m,  $8 \times 10^{-4}$  m,  $L$  为  $3R_{20}$ ,  $5R_{20}$ ,  $10R_{20}$ , 计算发现, 频率高时, 两泡的空化都变得彻底, 空化周期缩短.

## 5. 双频超声对空化的影响

虽然有一些关于双频超声在强化有效成分提取和强化化学反应方面的研究报道, 但这些报道多是比对使用单频超声与双频超声时在实验数据上的差别, 很少有研究关注双泡的双频超声空化问题. 不妨令  $P = P_{a1} \sin 2\pi f_1 t + P_{a2} \sin 2\pi f_2 t$ , 为了便于对比, 假设  $P_{a1} = P_{a2} = P_a / \sqrt{2}$ ,  $f_1 = 20$  kHz,  $f_2 = 40$  kHz, 取声压幅值分别为  $5 \times 10^5$  Pa 和  $1 \times 10^6$  Pa 进行计算. 图 6 给出的是双泡半径都是  $10^{-4}$  m, 声压幅值为  $5 \times 10^5$  Pa 时的双频超声空化与两单频超声空化对比曲线.

作为进一步讨论, 在  $f_1 = 20$  kHz,  $f_2 = 40$  kHz 下, 分别取: 1)  $P_{a1} = P_{a2} = P_a / \sqrt{2}$ , 2)  $P_{a1} = P_a / 2$ ,  $P_{a2} = P_a / \sqrt{3}$ , 3)  $P_{a1} = P_a / \sqrt{3}$ ,  $P_{a2} = P_a / 2$ , 以  $5 \times 10^5$  Pa 的声压幅值为例进行计算, 得到图 7 所示曲线.

从图 6 可以看出, 在双频超声的作用下, 泡的溃灭程度较单频是有所加深, 周期也有所缩短, 但, 双频超声对于空化的影响并没有人们所期望的那样强. 图 7 曲线表明, 两个声压分量相等时空化最彻底, 溃灭周期也最短.

在实际应用中, 人们期望使用双频超声甚至多

频超声来加强空化效应, 以加速化学反应, 或是加速对有效成分的提取, 这一手段能否达到预期的效果, 还有待进一步研究. 如果要使用双频超声, 最好使两个声压分量幅值接近.

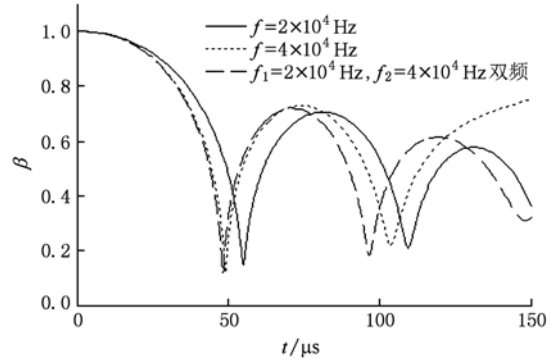


图6 双频超声对空化的影响

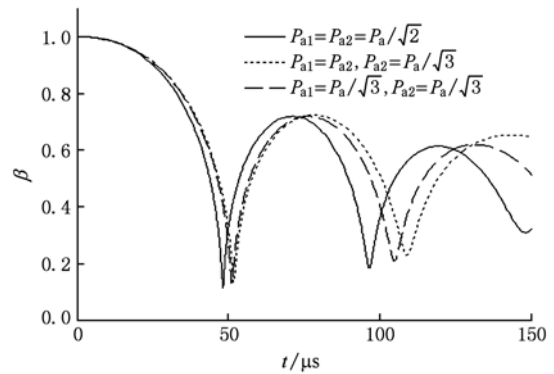


图7 双频时2个声压分量变化对空化的影响

## 6. 结 论

双泡的超声空化行为基于各泡自身的线度, 这是双泡超声空化的“内因”. 双泡的超声空化曲线, 有如“外因”-超声波对原单泡空化曲线“调制”后所得到. 双泡的超声空化特性由“内因”和“外因”共同决定. 这种内在和外在的诸多因素对空化的影响具有“可叠加性”.

双频超声对双泡空化有一定的影响, 但影响不大. 在实际应用中, 试图通过采用双频或多频超声来大幅增强空化效应, 以大幅提高效率的做法尚无足够的理论依据.

- [1] Shima A 1997 *Shock Waves* **7** 33
- [2] Rayleigh L 1917 *Phil. Mag.* **34** 94
- [3] Plesset M S 1949 *Appl. Mech.* **16** 228
- [4] Qian M L, Cheng Q, Ge G Y 2002 *Acta Acustica* **4** 289 (in Chinese) [钱梦绿、程茜、葛曹燕 2002 声学学报 **4** 289]
- [5] Chen Q, Zou X Y, Cheng J C 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6476 (in Chinese) [陈谦、邹欣晔、程建春 2006 物理学报 **55** 6476]
- [6] Zhang X M, Zhou C Y, Islam Shans, Liu J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8406 (in Chinese) [张新明、周超英、Islam Shans、刘家琦 2009 物理学报 **58** 8406]
- [7] Nam Y, Wu J, Warrier G 2009 *Journal of Heat Transfer* **131** 1
- [8] Shima A 1971 *J. Basic Engng. Trans. ASME* **93** 426
- [9] Fujikawa S, Takahira H 1986 *Acustica* **61** 188
- [10] Pu Z Q, Zhang W, Shi K R, Zhang J H, Wu Y L 2005 *Journal of Tsinghua University* **11** 1450 (in Chinese) [蒲中奇、张伟、施克仁、张俊华、吴玉林 2005 清华大学学报 **11** 1450]
- [11] Liang Z, Dai Y F, Cheng L J 1998 *Journal of Hydrodynamics* **1** 28 (in Chinese) [梁柱、戴勇峰、程良骏 1998 水动力学研究与进展 **1** 28]
- [12] Wu X M, Yin C F, Li C 2005 *Chin. Phys.* **14** 999
- [13] Hu Y, Ge Y, Zhang D, Zhang H R, Gong X F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4746 (in Chinese) [胡艺、葛云、章东、郑海荣、龚秀芬 2009 物理学报 **58** 4746]
- [14] Liang B, Zhu Z M, Cheng J C 2006 *Chin. Phys.* **15** 412
- [15] Zhang P L, Lin S Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7797 (in Chinese) [张鹏利、林书玉 2009 物理学报 **58** 7797]
- [16] Prosperetti A 1984 *Ultrasonics* **23** 68

## Computational analysis of double-bubble ultrasonic cavitation<sup>\*</sup>

Lu Yi-Gang<sup>†</sup> Wu Xiong-Hui

(School of Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

(Received 17 May 2010; revised manuscript received 17 July 2010)

### Abstract

Double-bubble ultrasonic cavitation dynamic differential equation obtained from superposition principle is normalized. MATLAB is used to analyse the effects of bubble linearity, double-bubble distance, sound frequency, sound pressure amplitude on cavitation process. Bifrequency ultrasound is introduced into the equation under discussion in this article. The calculation results show that bubble linearity is a main factor, which determines cavitation characteristics. The effect of sound pressure is strongest, and the frequency effect is the next strongest. Double bubble interactions affect cavitation characteristics to a certain extent, which reduces with distance increasing. Bifrequency ultrasound has a limited effect on cavitation characteristics, and it turns biggest when two component pressure amplitudes are equal.

**Keywords:** ultrasonic cavitation, double bubble, bifrequency ultrasound

**PACS:** 62.60.+V, 43.35.+d

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674048) and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 10251064101000007).

<sup>†</sup> E-mail: phyiglu@scut.edu.cn