

FitzHugh-Nagumo 系统中螺旋波的控制

高加振 谢玲玲 谢伟苗 高继华[†]

(深圳大学材料学院, 深圳市特种功能材料重点实验室, 深圳 518060)

(2010 年 11 月 4 日收到; 2011 年 4 月 6 日收到修改稿)

采用 FitzHugh-Nagumo 方程, 研究了二维时空系统中螺旋波的控制问题, 利用相空间压缩方法对部分系统变量的振幅进行限制从而影响螺旋波的稳定性. 研究表明, 控制过程可分为三个不同的阶段: 在较小压缩限条件下螺旋波可以被完全消除, 系统进入均匀定态; 在较大的压缩限条件下螺旋波能够稳定存在, 而且其振荡频率不随控制参数的改变而发生变化; 当压缩限介于上述两者之间时, 系统表现为时空混沌态. 对上述控制过程进行了进一步的讨论, 研究了不同控制参数条件下的系统斑图、变量的演化、相空间轨道等性质, 并且对振幅函数和振荡频率特征进行了总结.

关键词: 螺旋波, 相空间压缩, FitzHugh-Nagumo 方程

PACS: 05.45.-a, 82.40.Ck, 47.54.-r

1. 引言

斑图动力学是目前非线性科学的一个热点内容, 其中关于螺旋波现象的研究一直吸引着大量研究人员的兴趣^[1-6]. 螺旋波是出现于二维空间系统中的一种周期性斑图, 不但在很多实验系统中都有发现, 而且也普遍存在于自然界中, 如流体中的 Rayleigh-Bénard 对流^[7]、反应扩散系统中的化学波^[8]、黏性霉菌的自组织^[9]及心脏中的电信号^[10]等. 理论和实验研究表明, 螺旋波的动力学行为在多个系统中具有普适规律和复杂波动性, 研究和掌握这些规律具有重要的应用价值^[11-15]. 近年来, 相关研究的一个重要内容是螺旋波的控制, 包括螺旋波信号的消除与稳定、螺旋波与其他斑图的转换以及复杂螺旋波的性质与应用等问题. 一方面, 因为螺旋波的控制研究直接面向时空斑图的实际应用, 所以越来越受到相关研究群体的重视, 并且已经产生了一些具有应用潜力的理论成果, 对螺旋波的控制机理和螺旋波失稳的微观机理进行了深入研究. 螺旋波的失稳模式通常可分为两类, 即从螺旋波中心产生的多普勒失稳和远场尺寸效应导致的埃克豪斯失稳^[16-20]. 此外, 通过施加梯度力作用或者周期性信号的方法也可以把螺旋波从系统中驱逐出去, 从而达到控制螺旋波的目的^[21-24]. 文献[25]研

究了在激发介质内部小区域内连续注入周期信号产生靶波来消除螺旋波和时空混沌. 文献[26]研究了外电场的作用下螺旋波发生破裂, 最终达到稳定的均匀态. 另一方面, 相空间压缩 (phase space compression) 是一种非反馈系统控制方法, 其优点是控制方案简单易行, 与常见的反馈控制方法相比, 无须对系统参数和轨道进行预先了解, 例如在电路系统中只需增加限幅装置即可实现控制操作. 目前相空间压缩方法已被成功地用在低维系统中消除混沌, 并在二维系统中产生螺旋波和靶波, 已逐渐发展成为一种重要的系统控制方法^[27-32]. 本文将利用相空间压缩方法对二维时空系统中的螺旋波斑图进行控制, 通过在相空间中对轨道振幅的限制来消除螺旋波, 并通过数值实验来观察控制过程的系统斑图、变量的演化、相空间轨道等性质, 并且对振幅函数和振荡频率特征进行总结.

2. 模型和控制方法

考虑如下形式的 FitzHugh-Nagumo (FHN) 模型^[16]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon}u(u-1)[u-(v+b)/a + \nabla^2 u], \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= f(u) - v,\end{aligned}\quad (1)$$

式中 $f(u)$ 为如下分段函数:

[†] 通讯联系人. E-mail: jhgao@szu.edu.cn

$$f(u) = \begin{cases} 0 & (u < 1/3), \\ 1 - 6.75u(u-1)^2 & (1/3 \leq u \leq 1), \\ 1 & (1 < u). \end{cases} \quad (2)$$

上述模型能够近似地描述神经和心肌纤维电脉冲的许多特性,例如激发域值的存在、相对和绝对恢复周期以及在外电流作用下脉冲链的产生等.同时由于 FHN 模型具有简单的双变量形式,适于进行理论解析和实验统计分析,所以被广泛地用来研究可激发系统的性质及螺旋波的规律^[33—35].系统(1)还

能够描述催化剂 Pt(110) 表面的一氧化碳吸附氧化反应,其中变量 u 和 v 分别表示活化子和阻塞子, a 和 b 为系统参数.参数 ε 决定了系统的激发性质,当它足够小时,系统具有可激发性,参数 ε 的不同取值可以对应不同的状态行为.不失一般性,在下面的研究中考系统分布在尺寸为 $L \times L$ 的正方形空间,且系统变量在边界处满足无流条件.在适当的系统参数条件下,系统(1)可以自发产生稳定的螺旋波.例如,当系统参数 $a = 0.84$, $b = 0.07$, $\varepsilon = 0.04$ 时,系统可以产生如图 1 所示的螺旋波.

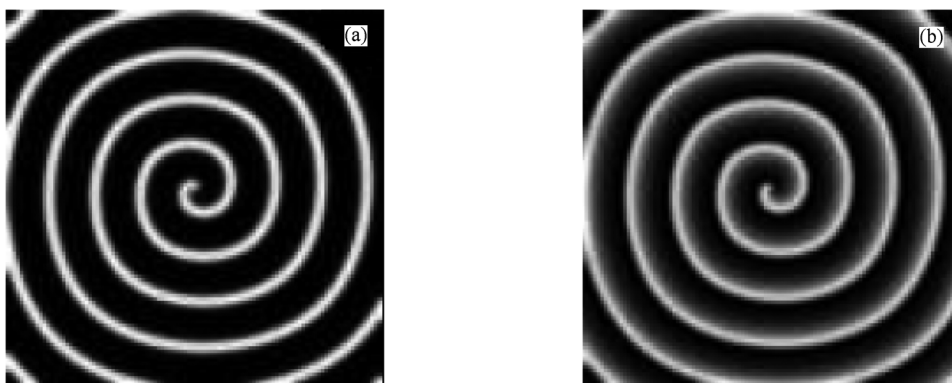


图 1 FHN 系统中稳定的螺旋波 系统参数 $a = 0.84$, $b = 0.07$, $\varepsilon = 0.04$, 系统尺寸 $L = 100$. (a) u 变量, (b) v 变量

对于图 1 中的螺旋波,我们可以利用相空间压缩方法来进行控制.相空间压缩方法是指在相空间中将系统变量或者一部分变量的幅值限制在一定范围内,改变系统的动力学特性从而对系统进行控制的方法.在 FHN 方程(1)中添加对应的控制项,即可实现相空间压缩.这里我们考虑对系统 u 变量的相空间轨道进行压缩操作,

$$u = \begin{cases} u_0 & (u \geq u_0), \\ u & (u < u_0), \end{cases} \quad (3)$$

式中 u_0 称为对系统变量 u 的压缩限.(3)式的意义在于,当系统变量 u 的值大于相空间压缩限 u_0 时,外加的控制作用将对变量的振幅进行限制,使系统轨道在一个受限制的小范围内运动.而当系统变量 u 的值小于相空间压缩限 u_0 时,外加的控制作用对变量不进行控制.通过对 u 变量轨道进行压缩所获得的实验结论可以自然地推广到以 v 变量轨道为压缩对象的情形,出于篇幅考虑,本文中不再赘述.

3. 数值模拟

下面我们对系统(1)的行为进行数值模拟,并

考虑在采用(3)式所示的相空间压缩方法之后系统中螺旋波的失稳情况及其特点.采用如(3)式的相空间压缩方法对图 1 所示的螺旋波进行控制,通过数值模拟后得到变量在不同压缩限下的最终演化结果.图 2 是在不同的压缩限 u_0 下系统变量 u 的演化结果.

图 2 所示的数值模拟结果表明:对系统进行控制的时候可以观察在不同压缩限下系统变量 u 的最终演化结果.从图 2(b)可以看出,压缩限为 $u_0 = 0.9$ (在无特别说明的情况下,本文数值实验中所采用的单位均为任意单位)时变量 u 在空间的分布由于振幅受到限制而呈现出频率和波长均发生变化的螺旋波图像,但螺旋波依然具有稳定性.从图 2(c)—(e)可以看出,当变量压缩限继续减小时,螺旋波的相空间轨道进一步受到限制,只在有限的范围内做周期性振荡,到一个临界值($u_0 \approx 0.85$)时开始呈现非周期振荡,螺旋波失稳,系统转换为时空湍流态.在压缩限更小的条件下,螺旋波被完全消除,系统由时空湍流态进一步转换为不随时间和空间变化的均匀定态,如图 2(f)所示.



图2 不同相压缩限下系统变量(u 变量)的最终空间分布 系统参数 $a = 0.84$, $b = 0.07$, $\varepsilon = 0.04$, 系统尺寸 $L = 100$. (a) 未加控制时, 系统表现为稳定的螺旋波; (b) $u_0 = 0.9$, 初始螺旋波受到影响; (c) $u_0 = 0.8$, 螺旋波的中心发生移动; (d) $u_0 = 0.7$, 螺旋波失稳, 系统的最终演化结果为时空湍流态; (e) $u_0 = 0.66$, 系统的时空湍流态; (f) $u_0 = 0.6$, 系统进入均匀定态

以上的数值实验结果表明, 相空间压缩方法可以成功地消除螺旋波作用, 使系统进入时空湍流态和时空均匀的定态. 为了进一步了解这个控制过程, 我们可以通过观察系统空间中的一个随机选取位置的振荡行为来讨论控制方法的特点. 图3示出了不同压缩限条件下系统中一个空间点上的变量随时间的变化情况. 图3(a)是未加入控制时的螺旋波轨道, 呈现出很好的周期性. 在较大的压缩限条

件下, 系统变量的振幅受到限制, 但是振荡的周期性仍然能够保持, 如图3(b)和(c)所示. 如果继续降低压缩限, 则系统变量的振幅随之变小, 出现非周期的振荡现象, 如图3(d)和(e)所示. 在较小的压缩限条件下, 系统变量的振幅变为零, 不再随时间而变化, 系统进入空间均匀的定态. 为了对比不同压缩限条件下系统的空间分布和时间演化情况, 图3和图2采用了完全相同的控制参数, 从而更能

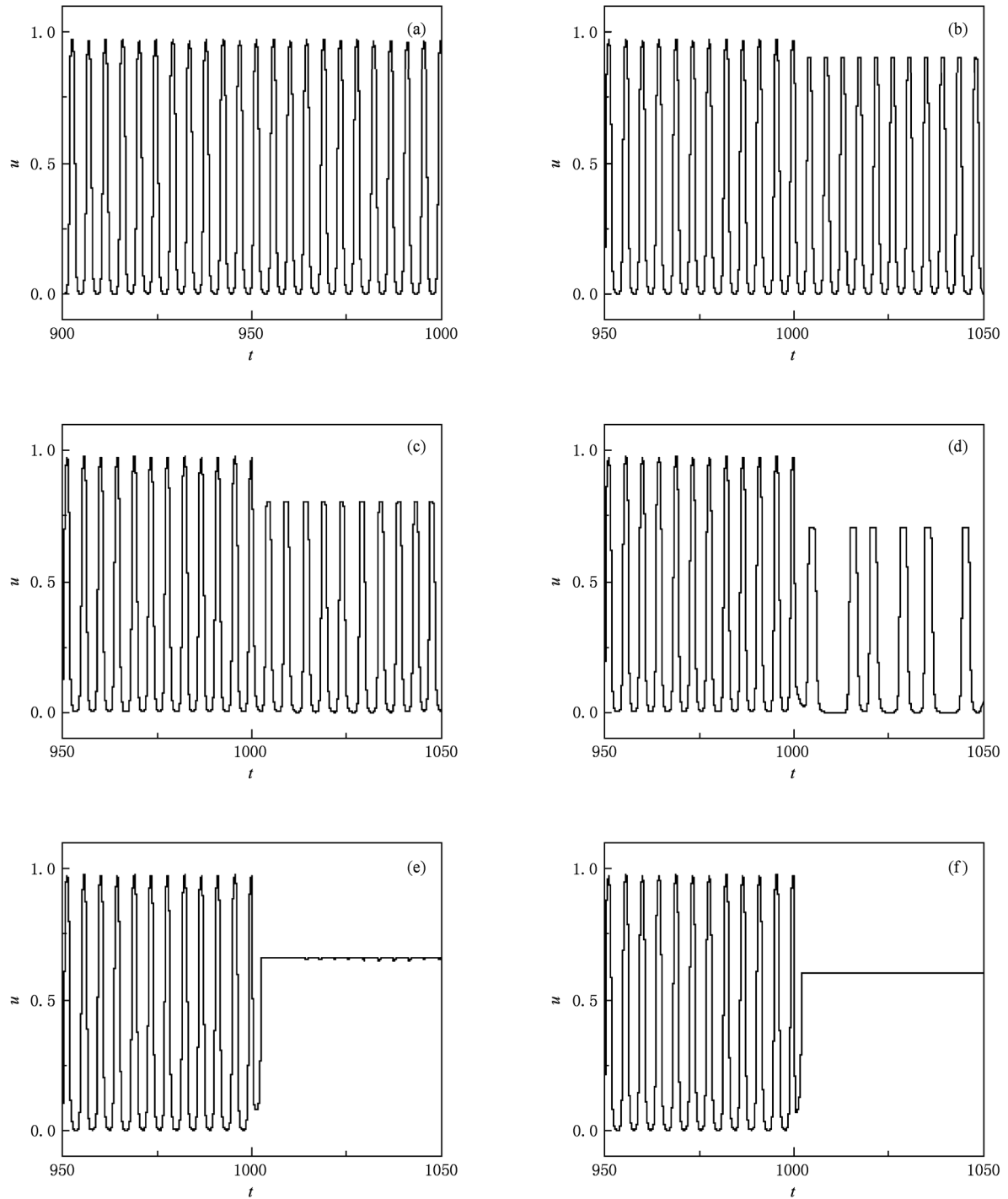


图3 不同的相空间压缩限条件下系统变量(u 变量)随时间的变化 轨道的空间坐标位置随机选择为 $x = 20, y = 20$, 加入控制的时刻为 $t = 1000$. (a) 未加控制时, (b) $u_0 = 0.9$, (c) $u_0 = 0.8$, (d) $u_0 = 0.7$, (e) $u_0 = 0.66$, (f) $u_0 = 0.6$

够看出在相空间压缩中变量的时空变化过程.

考虑在上述控制过程中, 压缩限的变化会引起系统变量振幅的变化. 在大量的数值实验中, 我们观察到变量振幅的上限均与压缩限相同, 变量的最大值受到 u_0 的约束, 而其下限则不受此限制.

同时, 由于在一定条件下, 变量的振荡不具有周期性, 仅通过对其振幅上下限的了解并不足以了解系统变量振幅随压缩限的变化情况. 为了进一步了解不同压缩限对系统变量振荡行为的影响, 可构造如下的振幅函数用来定量刻画系统变量的振

荡特征:

$$A = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2 T} \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^T dt |u - \bar{u}|, \quad (4)$$

式中函数 $\bar{u}$ 为系统变量在全空间的平均值. 如果 A 接近于零, 说明系统变量的振幅较小; 如果 A 保持较大的数值, 说明系统变量的振幅较大. 同时, 由于振幅函数表示的是大时间尺度范围的平均值, 因而其还能表示系统变量在非周期情况下的平均分布. 图 4 中考虑了不同压缩限下系统变量的振荡情况, 给出了振幅函数 A 与压缩限 u_0 之间的关系. 说明当相空间压缩限 u_0 较小的时候, 系统变量的振幅为零 (对应于定态), 逐渐增大压缩限时变量 u 的振幅开始逐渐增加. 值得注意的是, 在振幅函数 A 随着压缩限增加的过程中, 存在着三个阶段. 当压缩限较小 ($u_0 < 0.66$) 时, 系统变量处于定态, 振幅函数为零. 当压缩限较大 ($u_0 > 0.85$) 时, 系统变量出现稳定的振荡, 振幅函数随着压缩限的增加而稳定地增加, 两者增加的速度相同. 而当压缩限处在介于前两者的范围 ($0.66 < u_0 < 0.85$) 时, 振幅函数从零快速增加到非零值, 表示系统变量的振荡幅度出现了快速增加, 同时我们还在这个控制参数区域注意到振幅函数随着压缩限的变化是不稳定的, 存在窄幅波动现象.

文献[30]中讨论了一维复金兹堡-朗道方程 (complex Ginzburg-Landau equation, 简记为 CGLE) 系统中的相空间压缩方法, 并利用该方法对时空混沌态进行控制, 发现当压缩限由大变小时, 混沌系统先转换成周期振荡态, 然后再过渡到定态, 具体过程可参见文献[30]中的图 3(d). 而在本文的研究中, 系统由周期振荡态先转换成时空混沌态, 然后再过渡到定态, 这种状态转换过程和已有的相关研究结论相比具有新颖性.

通过对相空间的观察, 可以进一步了解在控制过程中螺旋波经由时空湍流而变为均匀定态的过程. 图 5 示出了随机选取的一个空间位置 ($x = 20, y = 20$) 上的系统变量在相空间中的行为. 从图 5 可以看出: 在较大的压缩限条件下, 相空间中的轨道表现为一个稳定的极限环, 继续降低压缩限后出现了复杂的混沌吸引子结构. 在较小的压缩限条件下, 相空间轨道缩小为一个点, 系统表现为均匀定态. 这与图 2 和图 3 中所得的结果一致.

通过以上的研究, 我们注意到变量轨道随时间变化的周期性在不同的外加控制条件下是变化的,

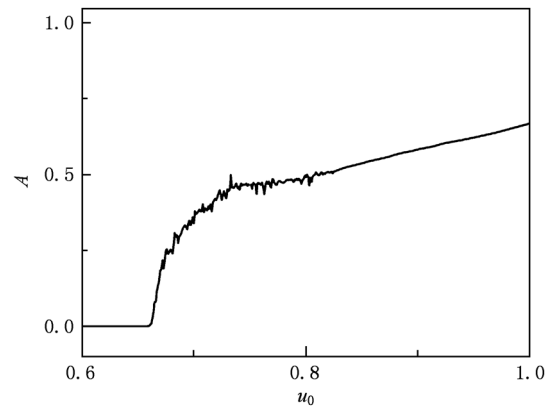


图 4 振幅函数 A 随压缩限 u_0 的变化情况

而研究这种周期性的最方便工具是讨论其轨道频率的变化. 图 6 示出了在四种不同的压缩限条件下变量随时间变化的频率. 在图 6(a) 所示的情况下, 控制参数 u_0 的值较大, 系统轨道具有单一的振荡频率峰, 其主频的强度非常明显, 与未加控制时系统的螺旋波振荡频率相同. 在接下来的实验中增加控制的强度, 调整控制参数 u_0 使之降低, 我们观察到系统变量振荡的主频强度有所降低, 同时变为连续谱, 如图 6(b) 和 (c) 所示. 而当 u_0 进一步降低时, 标志变量振荡性质的非零频率消失, 系统进入均匀的定态. 我们通过上述对系统变量主频的实验观察可知, 控制参数 u_0 的降低, 并不能使系统变量的振荡频率位置发生变化, 而只是将系统由分立的振荡频率变为连续谱, 从而将系统控制到均匀定态. 这与我们在振荡介质中观察到的相空间压缩效果完全不同.

对图 6 的实验结果进行总结后将不同压缩限条件下的系统振荡频率示于图 7 中以便进行比较. 从图 7 可以看出: 随着相空间压缩限的减小, 频率在空间的分布呈现三个区域的分布: 控制参数为 $u_0 < 0.66$ 时, 系统处于均匀定态; 控制参数为 $u_0 > 0.85$ 时, 系统处于螺旋波状态; 控制参数为 $0.66 < u_0 < 0.85$ 时, 系统振荡频率是连续谱, 其主峰的值不稳定. 这些结果与图 4 所示的振幅函数规律完全相同, 进一步确认了在不同的控制参数条件下系统所呈现的三种状态.

在以上的研究中, 我们利用相空间压缩方法对时空系统进行控制, 发现在不同的控制参数下系统从螺旋波经由时空混沌态向均匀定态的过渡现象. 时空系统与低维离散系统相比, 其空间格点之间的

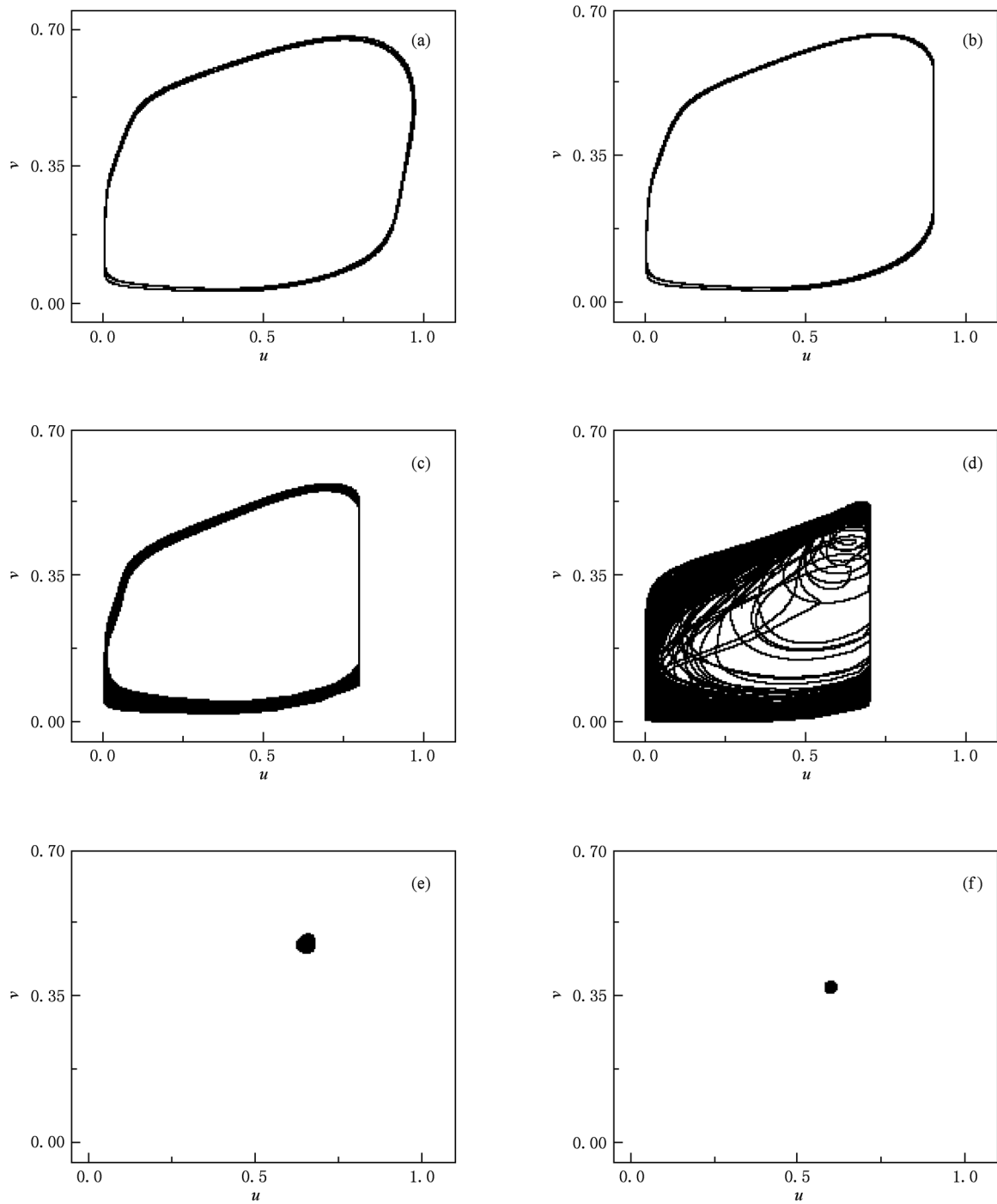


图5 不同相空间压缩限条件下系统变量的相空间轨道 轨道的空间坐标位置随机选择为 $x = 20, y = 20$. (a) 未加控制时, (b) $u_0 = 0.9$, (c) $u_0 = 0.8$, (d) $u_0 = 0.7$, (e) $u_0 = 0.66$, (f) $u_0 = 0.6$

扩散作用导致相变过程更具复杂性. 对于这类现象的研究是目前相关学科的一个热点内容. 例如, 在弱扩散和偏流条件下的耦合映像格子 (coupled map lattices) 模型中, 我们观察到最大 Lyapunov 指数随空间耦合强度的改变而形成周期性窗口^[36]. 对时空混沌的变量反馈和速度反馈控制中也可以观察到

与低维离散系统不同的临界现象, 常用的线性稳定性分析结果在时空系统模型中要受到初始值的影响^[37,38]. 而在本文的研究中, 我们发现了在相空间压缩的条件下螺旋波向均匀定态过渡的时空混沌轨迹. 这些研究结果进一步丰富了时空系统相变研究的内容.

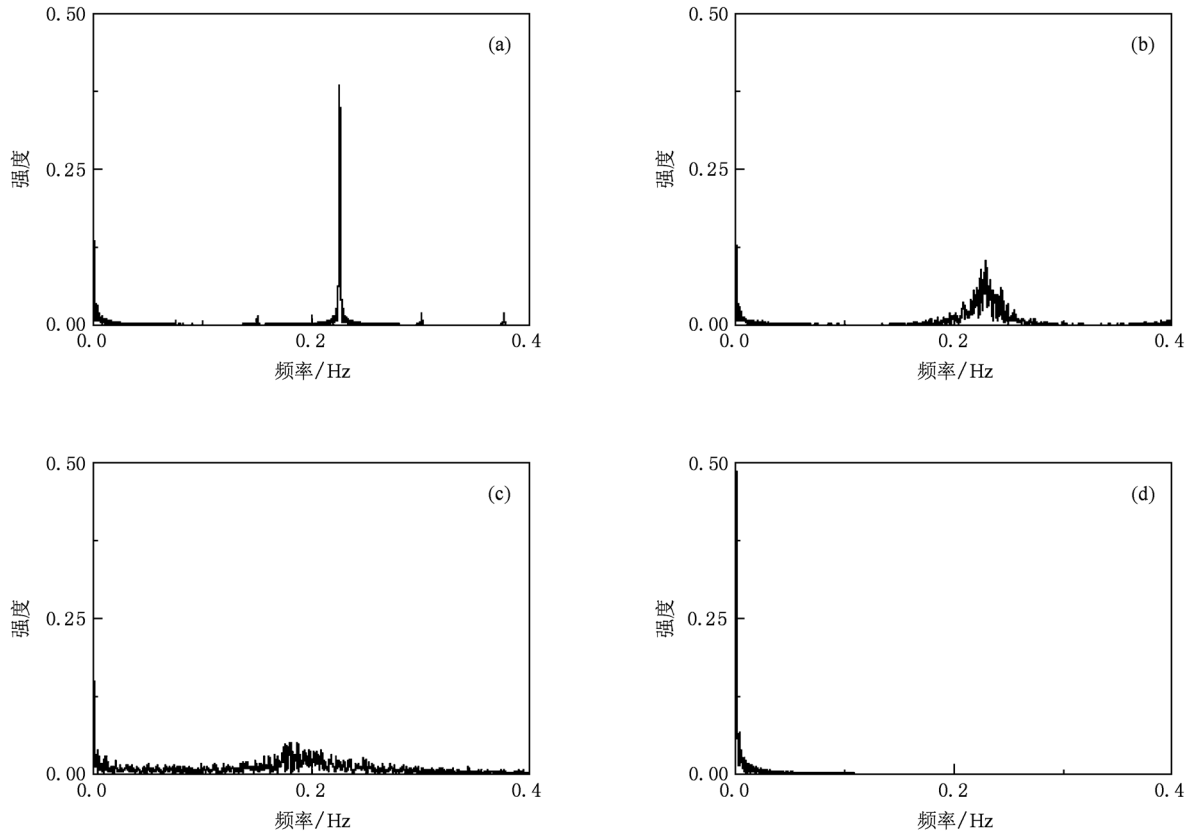


图6 不同压缩限条件下系统变量的振荡频率 (a) $u_0 = 0.9$, (b) $u_0 = 0.8$, (c) $u_0 = 0.7$, (d) $u_0 = 0.6$

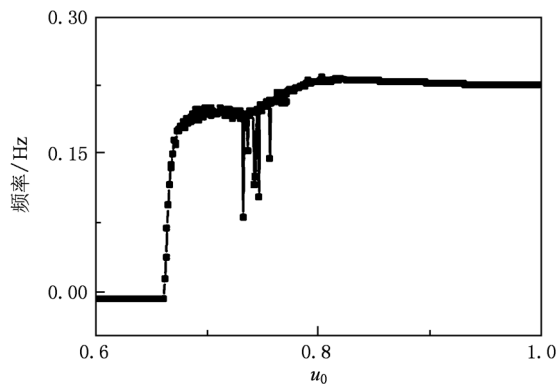


图7 不同压缩限下的系统振荡频率

4. 结 论

本文采用常见的 FHN 系统作为时空模型,讨论了利用相空间压缩方法对螺旋波进行控制的可行性.通过数值实验研究,成功地将螺旋波控制到时空均匀的定态.我们发现,控制过程可分为以下三个不同的阶段:在较小压缩限条件下螺旋波可以被

完全消除,系统进入均匀定态;在较大的压缩限条件下螺旋波能够稳定存在,而且其振荡频率并不随着控制参数的变化而变化;当压缩限在上述两者之间时,系统表现为过渡性的时空混沌态.文献[30]讨论了利用相空间压缩方法控制一维 CGLE 系统中的时空混沌,发现当压缩限由大变小时,混沌系统先被控制到周期振荡态,然后再过渡到定态.而在本文研究中,系统首先由周期振荡态转换成时空混沌态,然后再过渡到定态,这种状态转换过程和已有的相关研究相比具有新颖性.根据我们的调研发现,已有文献均未对这种过渡现象进行讨论.我们对上述控制过程进行了数值实验研究,讨论了不同控制条件下的系统斑图、变量的演化、相空间轨道等性质,并且对振幅函数和振荡频率特征进行了总结.本文提出了一条由螺旋波经过时空混沌进入均匀定态的演化路径,丰富了相空间压缩控制方法的内容,也可以帮助我们更好地理解螺旋波的本质.同时,相空间压缩方法是一种非反馈控制方法,对于螺旋波的消除具有明显的效果,且在电路系统、化学反应系统中容易实现.对于该方法的进一步研

究,有望获得更为丰富的成果,从而大大拓展时空斑图动力学在实际系统中的应用.

- [1] Kuramoto Y 1984 *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (New York: Springer)
- [2] Cross M, Hohenberg P 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [3] Ouyang Q 2000 *Pattern Formation in Reaction-Diffusion Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [欧阳颀 2000 反应扩散系统中的斑图动力学(上海:上海科技教育出版社)]
- [4] Gan Z N, Ma J, Zhang G Y, Chen Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5400 (in Chinese) [甘正宁、马 军、张国勇、陈 勇 2008 物理学报 **57** 5400]
- [5] Xie L L, Gao J H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060515
- [6] Zhong M, Tang G N 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1593 (in Chinese) [钟 敏、唐国宁 2010 物理学报 **59** 1593]
- [7] Ecke R E, Hu Y C, Mainieri R, Ahlers G 1995 *Science* **269** 1704
- [8] Zaikin A N, Zhabotinsky A M 1970 *Nature* **225** 535
- [9] Lee K J, Cox E C, Goldstein R E 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1174
- [10] Winfree A T 1987 *When Time Breaks Down* (Princeton: Princeton University Press)
- [11] Vanag V K, Epstein I R 2001 *Science* **294** 835
- [12] Gong Y F, Christini D J 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 088302
- [13] Zaritski R M, Pertsov A M 2002 *Phys. Rev. E* **66** 066120
- [14] Goryachev A, Chate H, Kapral R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 873
- [15] Yuan G Y, Zhang G C, Wang G R, Chen S G 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 459
- [16] Bar M, Eiswirth M 1993 *Phys. Rev. E* **48** R1635
- [17] Brusch L, Torcini A, Bar M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 108302
- [18] Qian Y, Huang X D, Liao X H, Hu G 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050513
- [19] Ouyang Q, Flesselles J M 1997 *Nature* **379** 143
- [20] Bar M, Or-Guil M 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1160
- [21] Steinbock O, Schutze J, Muller S C 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 248
- [22] Wang P Y, Xie P 2000 *Phys. Rev. E* **61** 5120
- [23] Liu F C, Wang X F, Li X C, Dong L F 2007 *Chin. Phys. B* **16** 2640
- [24] Yuan G Y, Yang S P, Wang G R, Chen S G 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1925
- [25] Zhang H, Hu B, Hu G 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026134
- [26] Ma J, Jin W Y, Yi M, Li Y L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2832 (in Chinese) [马 军、靳伍银、易 鸣、李延龙 2008 物理学报 **57** 2832]
- [27] Luo X S 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 402 (in Chinese) [罗晓曙 1999 物理学报 **48** 402]
- [28] Zhang X, Shen K 2001 *Phys. Rev. E* **63** 046212
- [29] Ma J, Wu N J, Ying H P, Pu Z S 2006 *Chin. J. Comput. Phys.* **23** 243 (in Chinese) [马 军、吴宁杰、应和平、蒲忠胜 2006 计算物理 **23** 243]
- [30] Gao J H, Peng J H 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 1614
- [31] Gao J H, Zheng Z G, Ma J 2008 *Int. J. Mod. Phys. B* **22** 3855
- [32] Ma J, Jia Y, Yi M, Tang J, Xia Y F 2009 *Chaos Solitons Fract.* **41** 1331
- [33] Yin X Z, Liu Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6844 (in Chinese) [尹小舟、刘 勇 2008 物理学报 **57** 6844]
- [34] Li B W, Zhang H, Ying H P, Hu G 2009 *Phys. Rev. E* **79** 026220
- [35] Wang B Y, Xu W, Xing Z C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6590 (in Chinese) [王宝燕、徐 伟、邢真慈 2009 物理学报 **58** 6590]
- [36] Gao J H, Zhan M 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 669
- [37] Gao J H, Xie L L, Zou W, Zhan M 2009 *Phys. Rev. E* **79** 056214
- [38] Gao J H, Xie L L, Peng J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5218 (in Chinese) [高继华、谢玲玲、彭建华 2009 物理学报 **58** 5218]

Control of spiral waves in FitzHugh-Nagumo systems

Gao Jia-Zhen Xie Ling-Ling Xie Wei-Miao Gao Ji-Hua[†]

(Key Laboratory of Special Functional Materials of Shenzhen, College of Materials, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

(Received 4 November 2010; revised manuscript received 6 April 2011)

Abstract

Control of spiral wave in two-dimensional FitzHugh-Nagumo equation is studied. The phase space compression approach is used to confine the system trajectory into a finite area and to annihilate spiral wave in the numerical simulation. Three stages are found in the control process. The spiral is driven to a homogenous stationary state when the compress limit is small; the spiral is stable with a fixed frequency when the compression limit is large; in the intermediate controlling parameter regime, the spatiotemporal turbulent state is observed. The controlling process is investigated by considering system pattern, variable evolution, phase space trajectory, etc, and the characteristics of amplitude function and oscillatory frequency are summarized as well.

Keywords: spiral wave, phase space compression, FitzHugh-Nagumo equation

PACS: 05.45.-a, 82.40.Ck, 47.54.-r

[†] Corresponding author. E-mail: jhgao@szu.edu.cn