

半隐 Euler 法和隐中点法嵌入混合辛积分器的比较*

钟双英 伍 歆†

(南昌大学物理系, 南昌 330031)

(2010 年 11 月 25 日收到; 2010 年 12 月 21 日收到修改稿)

当 Hamilton 函数分解为可积和不可积两部分时,前者能用分析方法给出解析解,而后者可借助一阶半隐 Euler 法或二阶隐中点法等数值求解,将这种解析和数值解法组合能构造二阶混合辛积分器. 理论分析表明 Euler 嵌入法的稳定区要小于中点嵌入法的. 再分别以圆形限制性三体问题和相对论自旋致密双星后牛顿 Hamilton 构型为例,详细比较了两嵌入法的性能特点. 二者的数值精度、稳定性及计算效率与 Hamilton 的分解方式和轨道类型有关. 就圆形限制性三体问题而言,当 Hamilton 采用势能和含坐标与动量混合项在内的动能分解时,无论对有序还是混沌轨道两嵌入法的数值性能基本相同;然而,当将含坐标与动量混合项做一个独立部分而其余的为另一个部分去分解 Hamilton 时 Euler 嵌入法数值稳定性劣于中点嵌入法. 针对自旋致密双星来说, Euler 嵌入法比中点嵌入法也具有明显的计算效率优势;当两嵌入法均保持数值稳定时二者精度没有显著差别;可是,在混沌存在等情况下 Euler 嵌入法大多变得数值不稳定. 综合表明中点嵌入法具有较好的数值稳定性,尤其值得推荐用来求解后牛顿 Hamilton 动力学问题.

关键词: 辛积分器, 后牛顿近似, 自旋致密双星, 混沌

PACS: 04. 25. dg, 04. 25. Nx, 05. 45. Pq, 45. 10. - b

1. 引言

辛积分器具有保能量和辛结构的优点,是一种求解 Hamilton 系统的数值积分方法^[1,2]. 它主要用来探讨经典力学^[3-5]、分子动力学^[6]、量子力学^[7-9]、声波^[10]、等离子体^[11]和太阳系动力学^[12-14]等领域中的 Hamilton 定性演化问题. 近 30 年来已在这些领域涌现了一系列有关辛方法的理论和应用研究成果.

尽管如此,辛积分器在广义相对论中的讨论和运用却非常少见. 根源在于广义相对论引力系统大都用度规张量表示,似乎很难找到一个通常意义的 Hamilton 函数与之对应. 更重要的原因在于相对论引力系统一般不能分解成两个可积部分,从而导致显辛方法无法应用,只能采用隐辛方法,这样会降低积分效率. 事实上,度规张量对应了一个超 Hamilton,这从理论上解决了相对论引力系统应用辛积分器的困难. 当然,这种辛格式只能是隐式的,如二阶隐式中点法作为一种辛方法就适合使用^[1].

当将度规张量做后牛顿近似展开并采用正则坐标和动量时,可以得到后牛顿 Hamilton 构型. 它由牛顿项和后牛顿项两部分构成,前者属于 Kepler 主要部分,而后者为摄动部分,这就是所谓的 Hamilton 摄动分解方法. 文献[15]把描述银河系中心的 Kerr 度规正是如此处理的. 然后,该文用分析方法给出牛顿项的解析解,又借助隐中点法求出后牛顿项的数值解,再将它们对称组合构成一个二阶混合辛积分器,后面称为隐中点嵌入法. 就作者所知,这种嵌套法早在 10 年前已被 Liao^[16]讨论,只不过它当时是为经典 Hamilton 问题的求解而设计. 另一方面,也可以不采用嵌入方式而直接利用隐中点法求解整个后牛顿 Hamilton 系统,但近期研究^[17]表明嵌入法与直接法计算效率相当,但嵌入法拥有数值精度优势. 这主要是由于采用 Hamilton 摄动分解形式导致两部分之间存有后牛顿阶小量级的差别,小量级会出现在截断误差里而引起误差减小. 这尤其在 Wisdom-Holman 二阶 leapfrog 辛积分器^[12]计算太阳系 n 体问题时变得更为明显.

除参量化后牛顿 (PPN) 方法外^[18],由中子星或

* 国家自然科学基金 (批准号:10873007) 和南昌大学创新团队项目资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: zhongshuangying@ncu.edu.cn; xwu@ncu.edu.cn

黑洞构成的相对论自旋致密双星二体动力学也是近 10 多年来后牛顿天体力学和相对论天体物理受到特别关注的几个问题之一. 因为自旋致密双星是 LIGO 和 VIRGO 等引力波探测器最为理想的波源选择. 数据分析处理需要用到高精度引力波形的理论模板,而这种高精度主要由高阶后牛顿近似提供. 基于这一点,自旋致密双星动力学从两方面开展研究. 一方面,尽可能建立高阶后牛顿运动方程与引力波形,如谐和坐标下的后牛顿 Lagrangian 构型^[19–21]以及 ADM 坐标下的后牛顿 Hamilton 构型^[21–24]. 轨道部分现已取得 3.5 阶后牛顿精度^[25],而自旋部分精确到 4 阶^[26,27]. 另一方面,致力于自旋致密双星是否混沌的研究,因为混沌存在不利于数据分析时剔除信号中的噪声. 应当着重指出的是尽管在耗散系统等经典动力学问题中取得了有关混沌理论研究与应用研究的丰硕成果^[28–33],但关于自旋致密双星的混沌研究还很不成熟,并且所得结果曾经在文献中一度非常混乱,甚至相互矛盾. 例如,Levin^[34]利用分形方法发现一体自旋且质量相近或二体自旋且自旋效果仅限于自旋与轨道耦合的 2 阶后牛顿 Lagrangian 系统存在混沌,但文献^[35,36]却指出一体自旋且质量相近的 2 阶后牛顿 Hamiltonian 是不可能出现混沌的. 如果无视两种近似描述构型的差异来看待这些结果,那么自然觉得结论相悖. Levin^[37]认为 Lagrangian 系统与 Hamiltonian 系统只是近似但不完全等价,因此两者有不同的动力学现象都是正确的. 这是由动力学方程不同而引起混沌结果的差异. 不同的混沌识别方法的使用也曾带来混沌结果的极大争议. 起初,Levin^[34]利用分形方法发现 2 阶后牛顿 Lagrangian 系统存在混沌;可是,文献^[38]用 Lyapunov 指数方法没有找到混沌;紧接着文献^[34,39]又重新计算 Lyapunov 指数并且获得正 Lyapunov 指数作为有力证据来驳斥前文,认为前文没有获得正确 Lyapunov 指数是由重整化不当引起的. Wu 等^[40]不持这种观点,而认为他们所采用的 Lyapunov 指数计算方法是有差异的,前者采用了原始定义求极限方法以便尽可能取得稳定的 Lyapunov 指数,需要相当长的积分时间才能完成,但后者是借助拟合方法来计算 Lyapunov 指数,只要较短的积分时间即可. 进一步指出自旋致密双星大都会出现合并 (merger) 且混沌即使存在也会很弱,因而 Lyapunov 指数不是识别混沌的最佳工具,至于其他混沌指标如 0–1 指标 (0

– 1 test)^[41]是否适合还有待探讨,但两邻近轨道的快速 Lyapunov 指标是适合的. Wu 等^[42]还澄清了文献关于初始条件或参数变化而引起动力学跃迁的争议,认为对于其他固定的初始条件和参数的不同选择来说各种跃迁结果都是可能的,并建议用初始条件和参数的全面综合来看待这种跃迁关系. 总之,自旋致密双星的混沌性是非常复杂的,与动力学方程、混沌识别指标、动力学参数和初始条件等因素紧密相关. 只要依据诸因素去区分文献中关于自旋致密双星混沌的不同结果,争议就不再存在.

此外,应当特别强调自旋致密双星混沌的研究还依赖于可靠的数值积分方法. 正如上面所说,辛积分器正好适合于混沌等定性研究. 于是, Lubich 等^[43]设计了一种数值求解自旋致密双星后牛顿 Hamilton 构型的“辛方法”. 其构造特点是将 Hamilton 分成轨道、自旋-轨道耦合和自旋-自旋耦合三大块,再把每大块分成若干小块组合成一个“子”二阶辛积分器,最后以这三个子二阶辛积分器按对称组合构造一个“母”二阶辛格式,当然还可以构造更高阶的辛格式. 具体细节描述如下. 就轨道部分来说,它分解为牛顿项 (即 Kepler 运动) 以及各阶后牛顿项两部分,Kepler 运动用解析解,而后牛顿项用半隐式 Euler 法获得数值解 (所谓“半隐”意味“位置坐标为隐式而动量却为显式表达”或“动量为隐式而位置坐标却为显式表达”). 至于自旋-轨道耦合部分分解为三小块,而每小块采用解析解. 类似地,自旋-自旋耦合部分按四小块分别求出解析解. 这个母二阶辛格式称为 Euler 嵌入法. 这里,对这种辛格式的构造给予两点看法. 其一,除坐标与动量外自旋变量是非正则的,不具备全局意义上的保辛结构的几何性质,严格说来不能视为全局辛方法,至多为局部辛方法. 其二,自旋-轨道耦合与自旋-自旋耦合部分能以分析方法各自求解自然是最好不过,但随着更高阶的自旋效果的引入将使模型异常复杂,欲想给出解析解恐怕难能所愿,这样只能借助数值解. 就第一个问题来说,Wu 等^[44]设计了一组正则共轭的自旋变量来重新表示自旋致密双星后牛顿 Hamilton 构型,使之具有全局的辛结构. 这样完善了正则 Hamilton 理论,立即带来几方面的优点. 其中之一就是为辛方法的应用提供了理论支持. 因此,近期 Zhong 等^[17]将这个完全正则的 Hamilton 分解成 Kepler 可积部分以及后牛顿轨道、自旋-轨道耦合和自旋-自旋耦合所构成的摄动部

分,再按中点嵌入法组合成具有全局保辛的二阶混合辛积分器,进而组合成更高阶的混合辛积分器.

综上所述,对于按摄动分解为两部分的自旋致密双星后牛顿正则 Hamilton 系统可以利用半隐 Euler 法和隐中点法分别嵌入组合成二阶混合辛积分器. 本文的主要目的就是细致地研究比较这两种嵌入法的数值性能,如计算效率、数值精度和稳定性. 也就是说,哪种嵌入法要好? 为了不失一般性,我们也以经典圆形限制性三体问题为例做一些比较.

2. 混合辛积分器的构造与数值稳定性分析

先对所涉及的数值积分方法做扼要介绍,再以一维耦合振子为例讨论该算法的数值稳定性.

2.1. 算法的描述

考虑一个哈密顿系统具有下列分解形式:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (1)$$

其中 \mathbf{q} 是广义坐标, \mathbf{p} 是广义动量, H_0 是容易给出解析解的可积部分, H_1 是一个不易或不可能给出解析解的部分. 通常前者是主要部分,而后者为摄动部分.

约定 Lie 算子 $A = \{, H_0\}$ 和 $B = \{, H_1\}$, 这里 $\{, \}$ 是泊松括号. 设 τ 为步长,从 n 步到 $n+1$ 步 H_0 的解析解记为 $\exp(\tau A)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{F}_1(\tau, \mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n), \\ \mathbf{p}_{n+1} &= \mathbf{F}_2(\tau, \mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n). \end{aligned} \quad (2)$$

H_1 用位置隐式 Euler 法所得数值解表为 $\exp(\tau B)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \tau \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{p}_n), \\ \mathbf{p}_{n+1} &= \mathbf{p}_n - \tau \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{p}_n), \end{aligned} \quad (3)$$

或用动量隐式 Euler 法所得数值解表为 $\exp(\tau \tilde{B})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{n+1} &= \mathbf{p}_{n+1} - \tau \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_{n+1}), \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \tau \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_{n+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

当然,也可借助隐中点法求得数值解记为 $\text{EXP}(\tau B)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \tau \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{p}}\left(\frac{\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{n+1}}{2}, \frac{\mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{q}_n}{2}\right), \\ \mathbf{p}_{n+1} &= \mathbf{p}_n - \tau \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{q}}\left(\frac{\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{n+1}}{2}, \frac{\mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{q}_n}{2}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

应当指出 $\exp(\tau B)$, $\exp(\tau \tilde{B})$ 和 $\text{EXP}(\tau B)$ 三种算法都是辛的^[16].

文献[36]用 $\exp(\tau A)$, $\exp(\tau B)$ 和 $\exp(\tau \tilde{B})$ 组合得到半隐 Euler 法嵌入的二阶混合积分器

$$\text{MSI}_1 = \exp\left(\frac{\tau}{2} \tilde{B}\right) \circ \exp(\tau A) \circ \exp\left(\frac{\tau}{2} B\right). \quad (6)$$

其差分格式为

$$\text{MSI}_1: \begin{cases} \mathbf{q}'_{n+1} = \mathbf{q}_n + \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}'_{n+1}, \mathbf{p}_n), \\ \mathbf{p}'_{n+1} = \mathbf{p}_n - \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}'_{n+1}, \mathbf{p}_n), \\ \mathbf{q}''_{n+1} = \mathbf{F}_1(\tau, \mathbf{p}'_{n+1}, \mathbf{q}'_{n+1}), \\ \mathbf{p}''_{n+1} = \mathbf{F}_2(\tau, \mathbf{p}'_{n+1}, \mathbf{q}'_{n+1}), \\ \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}''_{n+1} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}''_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1}), \\ \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}''_{n+1} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}''_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1}). \end{cases} \quad (7)$$

而文献[15,16]用 $\exp(\tau A)$ 和 $\text{EXP}(\tau B)$ 组合取得隐式中点法嵌入的二阶混合辛积分器

$$\text{MSI}_2 = \exp\left(\frac{\tau}{2} A\right) \circ \text{EXP}(\tau B) \circ \exp\left(\frac{\tau}{2} A\right). \quad (8)$$

对应的差分格式为

$$\text{MSI}_2: \begin{cases} \mathbf{q}'_{n+1} = \mathbf{F}_1\left(\frac{\tau}{2}, \mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\right), \\ \mathbf{p}'_{n+1} = \mathbf{F}_2\left(\frac{\tau}{2}, \mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\right), \\ \mathbf{q}''_{n+1} = \mathbf{q}'_{n+1} + \tau \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{p}}\left(\frac{\mathbf{p}'_{n+1} + \mathbf{p}''_{n+1}}{2}, \frac{\mathbf{q}''_{n+1} + \mathbf{q}'_{n+1}}{2}\right), \\ \mathbf{p}''_{n+1} = \mathbf{p}'_{n+1} - \tau \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{q}}\left(\frac{\mathbf{p}'_{n+1} + \mathbf{p}''_{n+1}}{2}, \frac{\mathbf{q}''_{n+1} + \mathbf{q}'_{n+1}}{2}\right), \\ \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{F}_1\left(\frac{\tau}{2}, \mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\right), \\ \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{F}_2\left(\frac{\tau}{2}, \mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n\right). \end{cases} \quad (9)$$

下面考察两个混合辛积分器的数值稳定性.

2.2. 数值稳定性分析

线性辛映射 $\mathbf{Z}_{n+1} = W(\tau) \mathbf{Z}_n$ 稳定的条件是系数矩阵 $W(\tau)$ 的迹满足^[45]

$$\Gamma = \{\tau \geq 0: |\text{Tr} W(\tau)| < 2\}. \quad (10)$$

现在利用该稳定准则来计算两个混合辛积分器的稳定区域. 我们采用的模型是一维耦合振子

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + \frac{1}{2} p q. \quad (11)$$

哈密顿分解为

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{P^2}{2}, \\ H_1 &= \frac{q^2}{2} + \frac{1}{2}pq. \end{aligned} \quad (12)$$

方法(7)和(9)作用于系统(12)分别有

$$\text{MSI}_1: \begin{cases} p_{n+1} = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{4}\right)\left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right)}{1 + \frac{\tau}{4}} p_n \\ \quad - \frac{\tau\left(2 - \frac{\tau^2}{2}\right)}{2\left(1 + \frac{\tau}{4}\right)\left(1 - \frac{\tau}{4}\right)} q_n, \\ q_{n+1} = \tau\left(1 + \frac{\tau}{4}\right)\left(1 - \frac{\tau}{4}\right) p_n \\ \quad + \frac{\left(1 + \frac{\tau}{4}\right)\left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right)}{1 - \frac{\tau}{4}} q_n. \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{MSI}_2: \begin{cases} p_{n+1} = \frac{4}{(4+\tau)} \left(1 - \frac{\tau}{4} - \frac{\tau^2}{4} - \frac{\tau^2\left(1 + \frac{\tau}{4}\right)}{4-\tau}\right) p_n \\ \quad + \frac{4\tau}{4-\tau} q_n, \\ q_{n+1} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{4-\tau-\tau^2 - \frac{\tau^2(4+\tau)}{4-\tau}}{(4+\tau)}\right) p_n \\ \quad + \frac{4-\tau-\tau^2}{4-\tau} q_n. \end{cases} \quad (14)$$

根据(10)式,可知(13)与(14)式稳定区分别为

$$\Gamma_{\text{MSI}_1}: \left| \frac{32 - 14\tau^2 - \tau^4}{16 - \tau^2} \right| < 2, \quad (15)$$

$$\Gamma_{\text{MSI}_2}: \left| \frac{4(8 - 2\tau - 6\tau^2 - \tau^3)}{16 - \tau^2} \right| < 2. \quad (16)$$

于是,利用 Maple12 软件解得它们的稳定区域分别为

$$\Gamma_{\text{MSI}_1} = \{0 \leq \tau < 1.82036\}, \quad (17)$$

$$\Gamma_{\text{MSI}_2} = \{0 \leq \tau < 2.04082\}. \quad (18)$$

由此可见,中点法嵌入法的稳定区域要比半隐 Euler 嵌入法的要大些. 为了更多了解两种嵌入法的数值优劣性能,还有待详细的数值模拟比较.

3. 数值比较

本节分别采用经典圆形限制性三体问题和广

义相对论框架下的后牛顿近似展开的正则 Hamilton 自旋致密双星系统为数值模拟对象.

3.1. 圆形限制性三体问题

经典平面圆型限制性三体是限制性三体问题^[46]中的特例. 设想两主天体做圆运动并且支配第三个小天体的运动,但小天体对两主天体的圆运动没有任何影响. 两主天体质量为 $m_1 = 1 - \mu$ 和 $m_2 = \mu \leq 1/2$. 在质心旋转坐标系下,无限小质量天体的状态量 $\mathbf{q} = (x, y)$ 和 $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ 满足哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - U(x, y), \quad (19)$$

其中 $U(x, y)$ 为力函数,形如

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}, \\ r_1 &= \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

系统(19)有多种分解方法. 例如可分解为“动能 T ”和“势能 V ”两部分,即

$$\begin{aligned} H &= T + V, \\ H_0 &= V = -U(x, y), \\ H_1 &= T = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y. \end{aligned} \quad (21)$$

在这种分解里, V 部分有分析解,而 T 部分可用解析解,亦可用半隐式 Euler 法或隐式中点法数值求解. 若 T 和 V 两部分均用解析解,然后组成通常的二阶辛积分器,称为方法

$\text{MSI} = \exp(\tau A/2) \circ \exp(\tau B) \circ \exp(\tau A/2)$, 若 T 部分中的状态量用半隐 Euler 方法求解,则可组成混合方法 MSI_1 ; 若 T 部分中的状态量用隐式中点方法求解,得混合方法 MSI_2 .

系统(19)也可分解为 H_0 和 H_1 两部分,即

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1, \\ H_0 &= yp_x - xp_y, \\ H_1 &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - U(x, y), \end{aligned} \quad (22)$$

在此分解式中, H_0 是可积的,相应 H_1 中的状态量分别用半隐式 Euler 法和隐中点法求解,所得二阶混合辛积分器依次记为 MSI_1^* 和 MSI_2^* . 下面分别以有序和混沌的轨道作为数值算例,来验证各混合积分器的性能优劣.

令 $\mu = 0.001$, 积分步长 $\tau = 0.01$, 积分时间到 1×10^5 , 迭代控制精度为 1×10^{-14} . 选择两条轨道

作为测试对象. 轨道 1 的初始条件为 $x = 0.301$, $y = 0$, $p_x = 0$, 而 Jacobi 常数 $C_J = -2H = 3.06$. 轨道 2 的初始条件是 $x = 0.29$, $y = 0$, $p_x = 0$, 其 Jacobi 常数 $C_J = -2H = 3.12$. 轨道 1 在平面 $y = 0$ ($p_y > 0$) 上的 Poincare 截面由大量离散随机分布的点构成, 表明了该条轨道的混沌性, 而轨道 2 是由有序的 KAM 环组成, 如图 1(a) 和 (b) 所示. 图 2 是方法

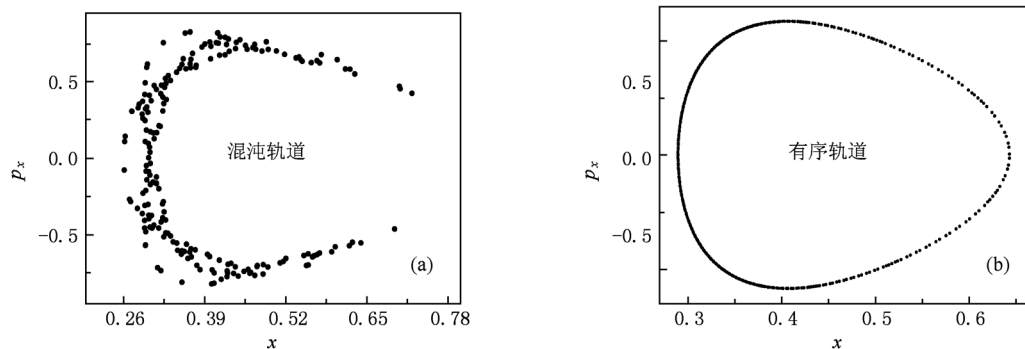


图 1 圆形限制性三体问题两轨道在 $y = 0$ ($p_y > 0$) 平面上的 Poincare 截面

表 1 两种嵌入法在不同 Hamilton 分解体系下的圆形限制性三体问题的数值模拟结果

哈密顿分解方式		$T + V$			$H_0 + H_1$	
积分方法		MSI	MSI ₁	MSI ₂	MSI ₁ [*]	MSI ₂ [*]
混沌轨道	$\Delta E/E$	6.5×10^{-4}	1.8×10^{-4}	6.2×10^{-4}	发散	8×10^{-4}
	CPU time/s	16	10	15	26	
有序轨道	$\Delta E/E$	1.8×10^{-4}	7.3×10^{-4}	7.0×10^{-4}	发散	9×10^{-4}
	CPU time/s	17	11	15	×	26

由图 2, 图 3 和表 1 可得如下几个结果. 1) 两种嵌入法有明显不同的数值稳定性, 并且稳定性与 Hamilton 分解方式有关. 在第一种分解即 $T + V$ 形式里, 两种嵌入法如图 2 所示都能保持数值稳定. 然而, 在第二种分解即 $H_0 + H_1$ 形式里, Euler 嵌入法如图 3(a) 和 (c) 及图 4(a) 所示无论是对有序还是混沌轨道都不能保持数值稳定. 2) 如果两种嵌入法都能保持数值稳定, 那么二者能量精度都与常用的二阶辛积分器 MSI 的十分接近 (见表 1), 并且差别不大. 3) 在两种嵌入法都能保持数值稳定的情况下, 中点嵌入法要比 Euler 嵌入法需要多一点计算时间. 4) 当算法如中点嵌入法保持数值稳定时能量精度对有序和混沌轨道来说没有显著差异, 也就是说, 混沌轨道并没有给能量精度造成较大影响. 但是, 有序和混沌轨道对解误差的影响却截然不同. 动力学性质必然导致有序轨道对解误差随时间幂指数增长, 而混沌轨道将对解误差随时间指数式增

长. 至于轨道的混沌性对数值解的显著影响可见文献 [5, 47].

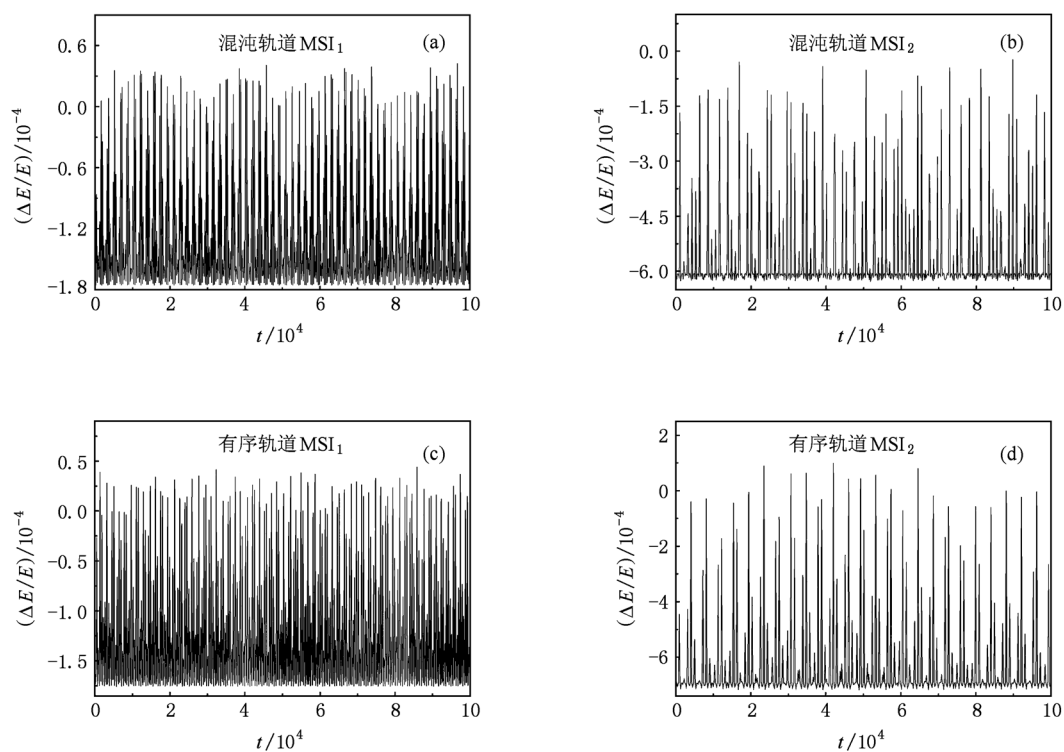
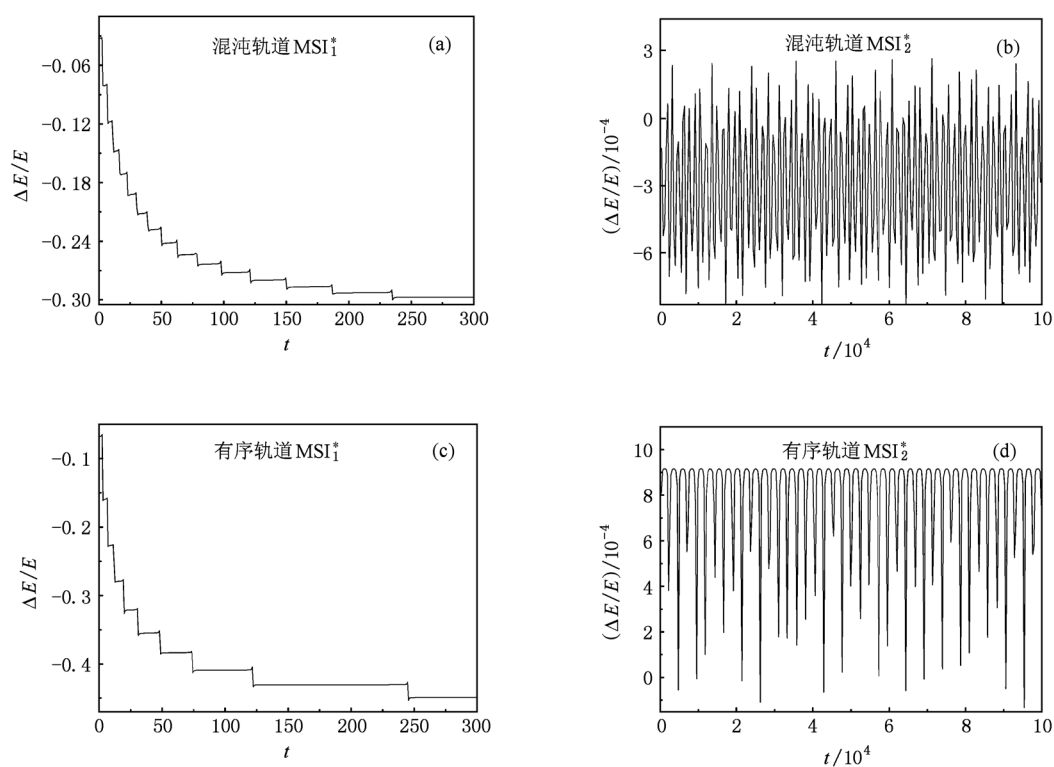
MSI₁ 和 MSI₂ 提供的两轨道的相对能量误差随时间演化的情况, 而方法 MSI₁^{*} 和 MSI₂^{*} 的相对能量误差如图 3 所示, 图 4 是 MSI₁^{*} 和 MSI₂^{*} 所画的两轨道的坐标随时间变化 ($t-x$) 的曲线. 这些算法在不同的 Hamilton 分解体系下的能量精度与计算效率详细比较结果可见表 1.

圆形限制性三体问题的例子主要表明 Euler 和中点两种嵌入法有截然不同的数值稳定性, 表现为后者优于前者. 考虑到这两种嵌入法当时是为了求解自旋致密双星后牛顿正则 Hamilton 系统而着重引入的, 下面关注它们求解该问题的情况. 由于此哈密顿很难进行坐标与动量可积分, 即不能采用 $T + V$ 分解式, 下面仅考虑 $H_0 + H_1$ 分解形式的致密双星系统数值模拟, 进一步比较两类混合积分器的性能.

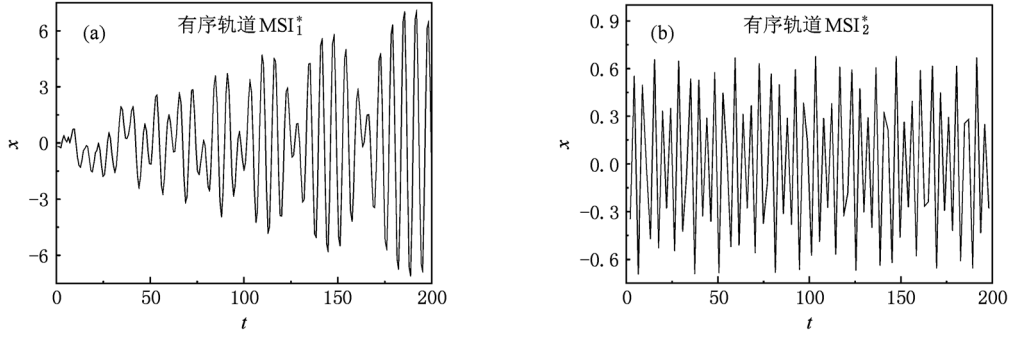
3.2. 自旋致密双星后牛顿 Hamilton 系统

先介绍自旋致密双星后牛顿 Hamilton 系统, 然后将两种嵌入法分别用来求解该问题以便评估二者的数值性能.

3.2.1. 正则后牛顿 Hamilton 描述


 图2 在 $T+V$ 分解下方法 MSI_1 和 MSI_2 对有序和混沌两轨道的相对能量误差

 图3 在 $H_0 + H_1$ 分解下方法 MSI_1^* 和 MSI_2^* 对有序与混沌两轨道的相对能量误差

在不考虑引力辐射等耗散因素的情况下,两致密天体质量为 m_1 和 m_2 ($m_1 \geq m_2$),总质量 $M = m_1$


 图4 方法 MSI_1^* 和 MSI_2^* 所画的 t - x 演化图线

$+m_2$, 约化质量 $\mu = m_1 m_2 / M$, $\eta = m_1 m_2 / M^2 = \beta / (1 + \beta)^2$, 质量比 $\beta = m_2 / m_1$. 又设无量纲的坐标 \mathbf{r} 以质量 M 为单位, 动量 \mathbf{p} 以约化质量为单位, 单位径矢为 $\mathbf{n} = \mathbf{r} / r$ 且 $r = |\mathbf{r}|$. 双星系统在相对坐标系下可由下列 Hamilton 描述为

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = H_N + H_{PN} + H_{SO} + H_{SS}, \quad (23)$$

(23) 式中 H_N, H_{PN}, H_{SO} 和 H_{SS} 分别表示纯轨道牛顿项、后牛顿项 (含 1PN, 2PN 和 3PN)、自旋与轨道的 1.5PN 耦合项以及自旋与自旋的 2PN 耦合项. 它们的具体形式分别如下^[24]:

$$H_N(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \frac{1}{r}, \quad (24)$$

$$H_{1PN}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{8}(3\eta - 1)(\mathbf{p}^2)^2 - \frac{1}{2}[(3 + \eta)\mathbf{p}^2 + \eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})] \frac{1}{r} + \frac{1}{2r^2}, \quad (25)$$

$$H_{2PN}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{16}(1 - 5\eta + 5\eta^2)(\mathbf{p}^2)^2 + \frac{1}{8}[(5 - 20\eta - 3\eta^2)\mathbf{p}^2 - 2\eta^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{P}^2 - 3\eta^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^4] \frac{1}{r} + \frac{1}{2}[(5 + 8\eta)\mathbf{p}^2 + 3\eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2] \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4}(1 + 3\eta) \frac{1}{r^3}, \quad (26)$$

$$H_{3PN} = \frac{1}{128}(-5 + 35\eta - 70\eta^2 + 35\eta^3)(\mathbf{P}^2)^4 + \frac{1}{16}[(-7 + 42\eta - 53\eta^2 - 5\eta^3)(\mathbf{P}^2)^3$$

$$+ (2 - 3\eta)\eta^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P})^2(\mathbf{P}^2) + 3(1 - \eta)\eta^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P})^4 \mathbf{P}^2 - 5\eta^3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P})^6] \frac{1}{r} + \left[\frac{1}{16}(-27 + 136\eta + 109\eta^2)(\mathbf{P}^2)^2 + \frac{1}{16}(17 + 30\eta)\eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P})^2 \mathbf{P}^2 + \frac{1}{12}(5 + 43\eta)\eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P})^4 \right] \frac{1}{r^2} + \left\{ \left[-\frac{25}{8} + \left(\frac{1}{64}\pi^2 - \frac{335}{48} \right) \eta - \frac{23}{8}\eta^2 \right] \mathbf{P}^2 + \left(-\frac{85}{16} - \frac{1}{64}\pi^2 - \frac{7}{4}\eta \right) \eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P})^2 \right\} \frac{1}{r^3} + \left[\frac{1}{8} + \left(\frac{109}{12} - \frac{21}{32}\pi^2 \right) \eta \right] \frac{1}{r^4}, \quad (27)$$

$$H_{SO}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_{\text{eff}}}{r^3}, \quad (28)$$

$$\mathbf{S}_{\text{eff}} = \left(2 + \frac{3}{2}\beta \right) \mathbf{S}_1 + \left(2 + \frac{3}{2}\beta \right) \mathbf{S}_2, \quad (29)$$

$$H_{SS}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \frac{1}{2r^3}[3(\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{n})^2 - \mathbf{S}_0^2], \quad (30)$$

其中 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 是牛顿轨道角动量, $\mathbf{S}_0 = (1 + 1/\beta)\mathbf{S}_1 + (1 + \beta)\mathbf{S}_2$. 另外, 光速 c 和引力常数 G 均取几何单位 1.

显然, 坐标和动量 (\mathbf{r}, \mathbf{p}) 是正则变量, 因为它们满足正则方程

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \quad (31)$$

但两体的自旋变量不是正则变量, 因为其进动方程为

$$\frac{d\mathbf{S}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}_i} \times \mathbf{S}_i = \boldsymbol{\Omega}_i \times \mathbf{S}_i \quad (i = 1, 2), \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & \left(2 + \frac{3}{2\beta}\right) \frac{L}{r^3} + \frac{1}{\eta r^3} [3n(S_2 \cdot n) - S_2] \\ & + \frac{3}{r^3} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 n(S_1 \cdot n), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & \left(2 + \frac{3\beta}{2}\right) \frac{L}{r^3} + \frac{1}{\eta r^3} [3n(S_1 \cdot n) - S_1] \\ & + \frac{3}{r^3} (1 + \beta)^2 n(S_2 \cdot n). \end{aligned} \quad (34)$$

基于这种情况,文献[44]将非正则自旋变量换成正则自旋变量来表示. 令 $S_i = S_i(\chi_i m_i^2 / M^2)$ ($i = 1, 2$), 这里无量纲参数 $\chi_i \in [0, 1]$, 且 S_i 为单位自旋矢量, 以类圆柱坐标 $(\rho_i, \theta_i, \xi_i)$ 表为

$$\hat{S}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \cos \theta_i \\ \rho_i \sin \theta_i \\ k_i \xi_i \end{pmatrix}, \quad (35)$$

其中 $\rho_i = \sqrt{1 - (k_i \xi_i)^2}$ ($k_i = M^2 / (\chi_i m_i^2)$), 而 θ_i 是自旋方位角. 于是, 将新的正则自旋变量代入方程(28)和(30)时, 可得到自旋哈密顿 $\tilde{H}_{SO}(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2; \mathbf{p}, \xi_1, \xi_2)$ 和 $\tilde{H}_{SS}(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2; \mathbf{p}, \xi_1, \xi_2)$. 经过替换后系统(23)就成为具有全局保辛结构的哈密顿系统, 记作

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2; \mathbf{p}, \xi_1, \xi_2) \\ = H_N + H_{PN} + \tilde{H}_{SO} + \tilde{H}_{SS}. \end{aligned} \quad (36)$$

那么两体的自旋正则进动方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i}{dt} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi_i}, \\ \frac{d\xi_i}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_i}. \end{aligned} \quad (37)$$

这样, 12 维相空间变量 $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, S_1, S_2)$ 便变为 10 维全局正则的相空间变量, 即 5 维广义坐标 $(\mathbf{r}, \theta_1, \theta_2)$ 和广义动量 $(\mathbf{p}, \xi_1, \xi_2)$. 正则系统除能量积分(36)本身外, 还有总角动量积分 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, 也就是共 4 个积分存在. 由于不足 5 个积分, 故 10 维全局正则系统不可积, 事实也证明它有混沌等丰富的非线性现象^[48-50].

在当前的数值模拟里, 我们采用系统(36)如下分解形式:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H_0 + H_1, H_0 = H_N, \\ H_1 &= H_{1PN} + H_{2PN} + H_{3PN} + \tilde{H}_{SO} + \tilde{H}_{SS}. \end{aligned} \quad (38)$$

类似第 2 节介绍, H_0 部分有解析解, 而摄动部分 H_1 用半隐 Euler 法或隐中点法数值求解之. 最后, 组成混合辛积分器 MSI_1 与 MSI_2 . 以 MSI_1 为例, 其差分格式(7)具体表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{n+1} &= \mathbf{r}_n + \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}'_{n+1}, \theta'_{1,n+1}, \theta'_{2,n+1}, \mathbf{p}_n, \xi_{1,n}, \xi_{2,n}), \\ \theta'_{1,n+1} &= \theta_{1,n} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_1}(\mathbf{r}'_{n+1}, \theta'_{1,n+1}, \theta'_{2,n+1}, \mathbf{p}_n, \xi_{1,n}, \xi_{2,n}), \\ \theta'_{2,n+1} &= \theta_{2,n} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2}(\mathbf{r}'_{n+1}, \theta'_{1,n+1}, \theta'_{2,n+1}, \mathbf{p}_n, \xi_{1,n}, \xi_{2,n}), \\ \mathbf{p}'_{n+1} &= \mathbf{p}_n - \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}'_{n+1}, \theta'_{1,n+1}, \theta'_{2,n+1}, \mathbf{p}_n, \xi_{1,n}, \xi_{2,n}), \\ \xi'_{1,n+1} &= \xi_{1,n} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(\mathbf{r}'_{n+1}, \theta'_{1,n+1}, \theta'_{2,n+1}, \mathbf{p}_n, \xi_{1,n}, \xi_{2,n}), \\ \xi'_{2,n+1} &= \xi_{2,n} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_2}(\mathbf{r}'_{n+1}, \theta'_{1,n+1}, \theta'_{2,n+1}, \mathbf{p}_n, \xi_{1,n}, \xi_{2,n}); \\ \mathbf{p}''_{n+1} &= \mathbf{F}_1(\tau, \mathbf{p}'_{n+1}, \mathbf{r}'_{n+1}), \\ \mathbf{r}''_{n+1} &= \mathbf{F}_2(\tau, \mathbf{p}'_{n+1}, \mathbf{r}'_{n+1}); \\ \mathbf{p}_{n+1} &= \mathbf{p}''_{n+1} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}''_{n+1}, \theta'_{1,n+1}, \theta'_{2,n+1}, \mathbf{p}_{n+1}, \xi_{1,n+1}, \xi_{2,n+1}), \\ \xi_{1,n+1} &= \xi'_{1,n+1} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_1}(\mathbf{r}''_{n+1}, \theta'_{1,n+1}, \theta'_{2,n+1}, \mathbf{p}_{n+1}, \xi_{1,n+1}, \xi_{2,n+1}), \\ \xi_{2,n+1} &= \xi'_{2,n+1} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta_2}(\mathbf{r}''_{n+1}, \theta'_{1,n+1}, \theta'_{2,n+1}, \mathbf{p}_{n+1}, \xi_{1,n+1}, \xi_{2,n+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_{n+1}'' + \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{r}_{n+1}'', \theta_{1,n+1}', \theta_{2,n+1}', \mathbf{p}_{n+1}, \xi_{1,n+1}, \xi_{2,n+1}), \\
 \theta_{1,n+1} &= \theta_{1,n+1}' + \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_1}(\mathbf{r}_{n+1}'', \theta_{1,n+1}', \theta_{2,n+1}', \mathbf{p}_{n+1}, \xi_{1,n+1}, \xi_{2,n+1}), \\
 \theta_{2,n+1} &= \theta_{2,n+1}' + \frac{\tau}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \xi_2}(\mathbf{r}_{n+1}'', \theta_{1,n+1}', \theta_{2,n+1}', \mathbf{p}_{n+1}, \xi_{1,n+1}, \xi_{2,n+1}).
 \end{aligned} \quad (39)$$

类似于圆形限制性三体问题做法,下面选择不同类型轨道逐一进行数值实验.

3.2.2. 有序轨道

考虑最大自旋情况,即取自旋参量 $\chi_1 = \chi_2 = 1$. 设轨道 Γ_1 的动力学参量和初始条件为 $(\beta, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\frac{1}{4}, 50, 0, 0, 0, 0.148, 0)$ (这时对应偏心率 $e \approx 0.1$), 且初始自旋构型为 $\theta_1 = 0.5235988$ (rad), $\theta_2 = 1.047198$ (rad), $\xi_1 = 0.352$, $\xi_2 = 0.03$. 轨道 $\Gamma_2: (\beta, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\frac{1}{3}, 200, 0, 0, 0,$

$0.07, 0)$ (偏心率 $e \approx 0.02$), 初始自旋构型为 $\theta_1 = 1.0471975$ (rad), $\theta_2 = 0.785398$ (rad), $\xi_1 = 0.421875$, $\xi_2 = 0.05$. 积分时间步长 $\tau = 1$, 积分时间为 1×10^5 . 图 5(a) 是轨道 Γ_1 的三维空间图, 轨道不在同一个平面上而是产生了进动现象, 这是由自旋效果引起的. 随时间线性缓慢增长快速 Lyapunov 指标 (FLI) 表明轨道 Γ_1 和 Γ_2 都是有序的, 如图 5(b) 所示. 这里 FLI 的计算方法取自文献[51], 在致密双星混沌检测上它被证明比 Lyapunov 指数方法更有效^[40].

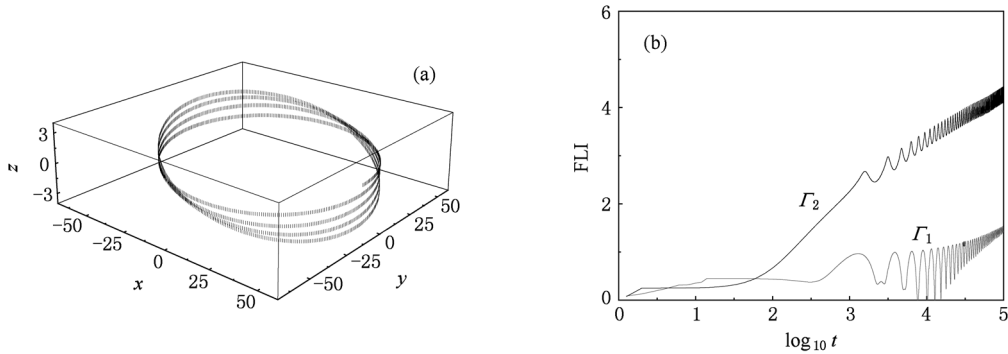


图 5 (a) 是轨道 Γ_1 的三维空间构型图; (b) 为两条道的快速 Lyapunov 指标

图 6 是双星系统两有序轨道在两种嵌入法作用下所取得的能量误差随时间变化的情况. 两种嵌入法精度比较接近. 此外, 从图 6(c) 可以看出, 在两体的初始距离 $r = 200M$ 时, 半隐 Euler 法嵌入法 MSI_1 的能量误差有不稳定趋势, 随时间逐渐呈“阶梯式”跳跃下降现象, 而 $r = 50M$ 情况又比较稳定.

3.2.3. 混沌轨道

轨道 $\Gamma_3: (\beta, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = (1, 10.14, 0, 0, 0, 0.3675, 0)$ (相应牛顿轨道的偏心率 $e \approx 0.37$), 初始自旋角度 $\theta_1 = 1.1103984$ (rad), $\xi_1 = 0.238998$, $\theta_2 = 0.84694$ (rad), $\xi_2 = -0.24593$. 积分步长 $\tau = 0.6$.

Γ_3 轨道在 3 维空间的进动如图 7(a) 所示. 它

是混沌的因为快速 Lyapunov 指标随时间指数式膨胀, 如图 7(b) 所示. 图 8 是两混合辛积分器关于混沌轨道的能量误差随时间变化的情况, 表明 Euler 嵌入法精度不如中点法嵌入法, 并且稳定性也较差. 关于两混合辛积分器模拟三轨道的详细数值比较结果可见表 2, 表明 Euler 嵌入法效率好如中点法嵌入法.

以上分析可知, 混合辛积分器的性能随轨道动力学性质变化而变化. 致密双星轨道的动力学行为随着后牛顿项及自旋效应项的后牛顿近似精度的不断提高, 会越来越复杂, 尽管半隐式 Euler 嵌入法计算效率稍高, 但有些情形不及中点法稳定, 因此我们认为中点法更适用于数值求解自旋致密双星后牛顿哈密顿系统.

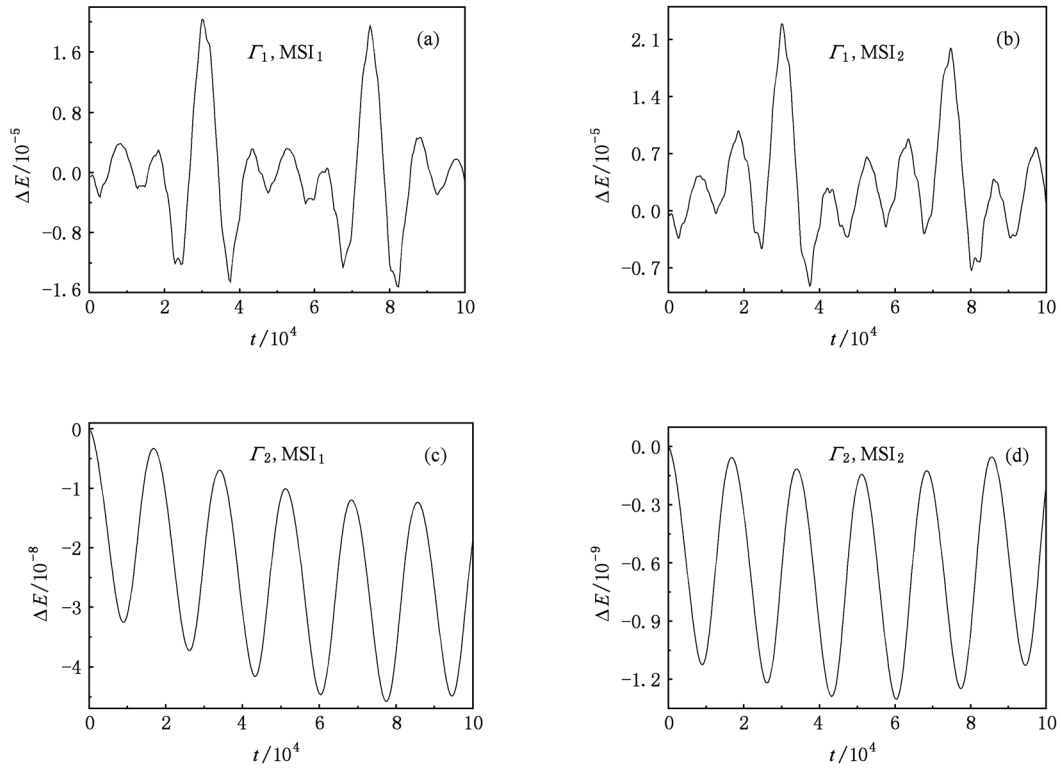


图6 两种嵌入法所给的自旋致密双星两有序轨道的能量误差

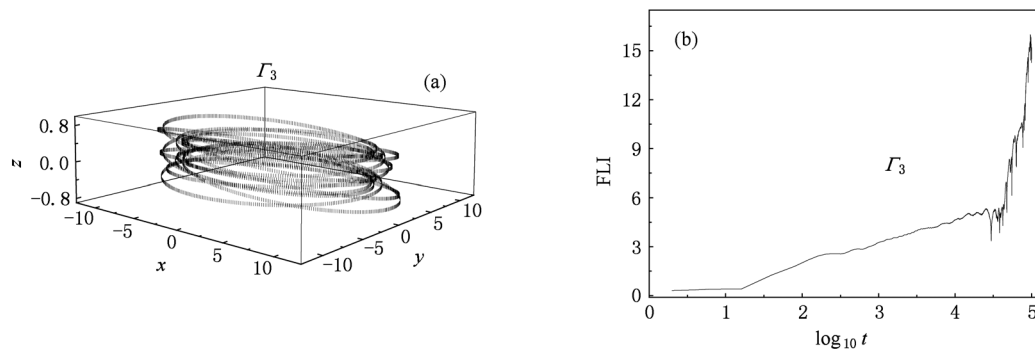


图7 (a)是轨道 Γ_3 的三维空间构型图;(b)为快速 Lyapunov 指标

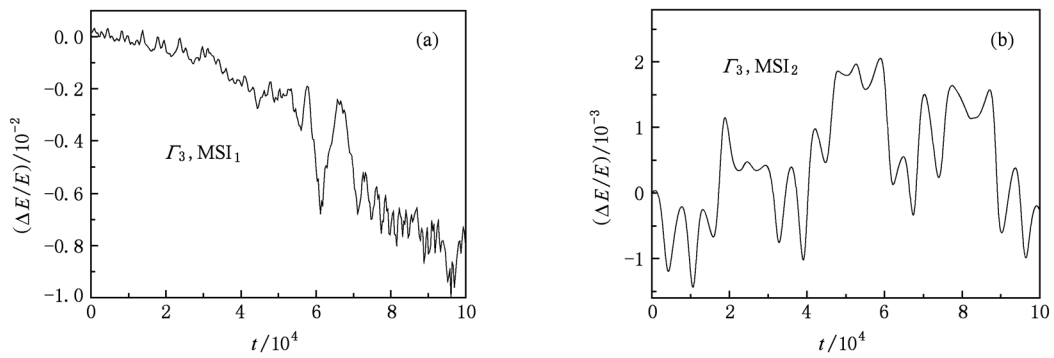


图8 混沌轨道的能量误差

表2 两嵌入法关于自旋双星三轨道的能量精度与计算效率

方法		MSI ₁	MSI ₂
Γ_1	ΔE	1.7×10^{-5}	2×10^{-5}
	CPU time/s	9	12
Γ_2	ΔE	4×10^{-8}	1.2×10^{-9}
	CPU time/s	9	11
Γ_3	ΔE	1×10^{-2}	2×10^{-3}
	CPU time/s	7	10

4. 结 论

本文就一阶半隐 Euler 法和二阶隐中点法分别

嵌入组成二阶混合辛积分器的数值性能进行了详尽的理论分析与数值模拟比较. 理论分析表明 Euler 嵌入法的稳定区要小于中点嵌入法的. 圆形限制性三体问题和自旋致密双星后牛顿 Hamilton 系统的数值模拟结果也说明 Euler 嵌入法的稳定性要劣于中点嵌入法的. 当两嵌入法都保持数值稳定性时, 二者数值精度差别不大, 另外, Euler 嵌入法在计算效率上要优于中点嵌入法. 综合诸因素, 我们推荐中点嵌入法来求解各种相对论后牛顿 Hamilton 动力学问题.

- [1] Feng K 1986 *J. Comput. Math.* **4** 279
- [2] Ruth R D 1983 *IEEE Tran. Nucl. Sci.* **30** 2669
- [3] Li R, Wu X 2010 *Science China Physics, Mechanics & Astronomy* **53** 1600
- [4] Li R, Wu X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7135 (in Chinese) [李荣、伍歆 2010 物理学报 **59** 7135]
- [5] Sun W, Wu X, Huang G Q 2011 *Res. Astron. Astrophys.* **11** (in press)
- [6] Chi Y H, Liu X S, Ding P Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6320 (in Chinese) [匙玉华、刘学深、丁培柱 2006 物理学报 **55** 6320]
- [7] Luo X Y, Liu X S, Ding P Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0604 (in Chinese) [罗香怡、刘学深、丁培柱 2007 物理学报 **56** 0604]
- [8] Liu X S, Wei J Y, Ding P Z 2005 *Chin. Phys.* **14** 231
- [9] Bian X B, Qiao H X, Shi T Y 2007 *Chin. Phys.* **16** 1822
- [10] Cao Y, Yang K Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1984 (in Chinese) [曹禹、杨孔庆 2003 物理学报 **52** 1985]
- [11] Hu W P, Deng Z C 2008 *Chin. Phys.* **B 17** 3923
- [12] Wisdom J, Holman M 1991 *Astron. J.* **102** 1528
- [13] Xu J, Wu X 2010 *Res. Astron. Astrophys.* **10** 173
- [14] Zhu J F, Wu X, Ma D Z 2007 *Chin. J. Astron. Astrophys.* **7** 601
- [15] Preto M, Saha P 2009 *Astrophys. J.* **703** 1743
- [16] Liao X H 1997 *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **66** 243
- [17] Zhong S Y, Wu X, Liu S Q, Deng X F 2010 *Phys. Rev. D* **82** 124040
- [18] Wang Y J, Tang Z M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2284 (in Chinese) [王永久、唐智明 2001 物理学报 **50** 2284]
- [19] Kidder L E 1995 *Phys. Rev. D* **52** 821
- [20] de Andrade V C, Blanchet L, Faye G 2001 *Class. Quantum Grav.* **18** 753
- [21] Faye G, Blanchet L, Buonanno A 2006 *Phys. Rev. D* **74** 104033
- [22] Damour T, Jaranowski P, Schafer G 2001 *Phys. Rev. D* **63** 044021
- [23] Damour T 2001 *Phys. Rev. D* **64** 124013
- [24] Buonanno A, Chen Y, Damour T 2006 *Phys. Rev. D* **74** 104005
- [25] Damour T, Jaranowski P, Schafer G 2008 *Phys. Rev. D* **77** 064032
- [26] Hergt S, Schafer G 2008 *Phys. Rev. D* **77** 104001
- [27] Hergt S, Schafer G 2008 *Phys. Rev. D* **78** 124004
- [28] Li C B, Chen S, Zhu Y Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2255 (in Chinese) [李春彪、陈謨、朱映强 2009 物理学报 **58** 2255]
- [29] Zhang R X, Yang S P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2957 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2009 物理学报 **58** 2957]
- [30] Wen S Y, Wang Z, Liu F C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3753 (in Chinese) [温淑焕、王哲、刘福才 2009 物理学报 **58** 3753]
- [31] Li G L, Chen X Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030507
- [32] Liu C X, Liu L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2188
- [33] Gu Q L, Gao T G 2009 *Chin. Phys. B* **18** 84
- [34] Levin J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 3515
- [35] Konigsdorffer C, Gopakumar A 2005 *Phys. Rev. D* **71** 024039
- [36] Gopakumar A, Konigsdorffer C 2005 *Phys. Rev. D* **72** 121501
- [37] Levin J 2006 *Phys. Rev. D* **74** 124027
- [38] Schnittman J D, Rasio F A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 121101
- [39] Cornish N J, Levin J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 179001
- [40] Wu X, Xie Y 2007 *Phys. Rev. D* **76**, 124004
- [41] Sun K H, Liu X, Zhu C X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110510
- [42] Wu X, Xie Y 2008 *Phys. Rev. D* **77** 103012
- [43] Lubich C, Walther B, Braugmann B 2010 *Phys. Rev. D* **81** 104025
- [44] Wu X, Xie Y 2010 *Phys. Rev. D* **81** 084045
- [45] Liu F Y, Wu X, Lu B K 2007 *Chinese Astron. Astrophys.* **31** 172
- [46] Murray C D, Dermott S F 1999 *Solar System Dynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.
- [47] Zhao H J, Du M L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3827 (in Chinese) [赵海军、杜孟利 2007 物理学报 **56** 3827]
- [48] Hartl M D, Buonanno A 2005 *Phys. Rev. D* **71** 024027
- [49] Zhong S Y, Wu X 2010 *Phys. Rev. D* **81** 104037
- [50] Wang Y, Wu X 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** in press
- [51] Wu X, Huang T Y, Zhang H 2006 *Phys. Rev. D* **74** 083001

Comparison of second-order mixed symplectic integrator between semi-implicit Euler method and implicit midpoint rule^{*}

Zhong Shuang-Ying Wu Xin[†]

(Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

(Received 25 November 2010; revised manuscript received 21 December 2010)

Abstract

When a Hamiltonian can be split into integrable and nonintegrable parts, the former part is solved analytically, and the latter one is integrated numerically by means of implicit symplectic integrators such as the first-order semi-implicit Euler method or the second-order implicit midpoint rule. These analytical and numerical solutions are used to construct a second-order mixed symplectic integrator with the semi-implicit Euler method and one with the implicit midpoint rule. A theoretical analysis shows that the Euler mixed integrator is inferior to the midpoint one in the sense of numerical stability. Numerical simulations of the circularly-restricted three-body problem also support this fact. It is further shown through numerical integrations of the post-Newtonian Hamiltonian of spinning compact binaries that the qualities of the Euler mixed integrator and the midpoint mixed method do depend on the type of orbits. Especially for chaotic orbits, the Euler mixed integrator often becomes unstable. In addition, the Euler mixed integrator has an advantage over the midpoint mixed method in computational efficiency, and is almost equivalent to the latter in the numerical accuracy if the two mixed integrators are stable. In spite of this, the midpoint mixed integrator is worth recommending for the study of the dynamics of post-Newtonian Hamiltonians of spinning compact binaries.

Keywords: symplectic integrator, post-Newtonian approximation, chaos, spinning compact binaries

PACS: 04. 25. dg, 04. 25. Nx, 05. 45. Pq, 45. 10. – b

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10873007) and the Program for Innovative Research Team of Nanchang University.

[†] Corresponding author. E-mail: zhongshuangying@ncu.edu.cn; xwu@ncu.edu.cn