

# 单相全桥 DC-AC 电压逆变电路数字控制中的振荡现象分析\*

雷 博<sup>†</sup> 肖国春 吴旋律 齐元瑞

(西安交通大学电气工程学院, 电力设备电气绝缘国家重点实验室, 西安 710049)

(2010年11月25日收到; 2010年12月27日收到修改稿)

考虑数字控制采样计算延迟, 建立了单相全桥 DC-AC 电压型逆变电路在负载电压外环电感电流内环加给定电压前馈控制方法下的离散迭代模型. 通过分析相应的 Jacobian 矩阵特征值轨迹, 确定该数字控制逆变器失稳时分岔点类型为 Hopf 分岔. 对离散迭代模型进行数学变换, 得出了控制器边界的解析表达式以及系统发生分岔时振荡频率的解析表达式, 从而揭示了系统发生振荡现象的内在物理机理. 最后, 通过 Simulink 仿真以及电路实验证明了理论分析的正确性和有效性.

**关键词:** 单相全桥, DC/AC 电压逆变电路, 数字控制, 离散迭代模型

**PACS:** 05.45.-a

## 1. 引言

单相全桥 DC-AC 电压型逆变电路在不间断电源(UPS)、分布式发电以及微型电网中有重要作用, 得到了广泛应用. 同时, 随着数字控制技术的不断发展成熟, 特别是高性能数字信号处理器(DSP)的出现, 使数字控制系统逐渐取代传统的模拟系统<sup>[1,2]</sup>. 数字控制下的电力电子逆变电路系统除逆变器自身的开关过程非线性外, 还受到采样量化特别是采样、计算延时等问题的影响. 相对于模拟控制而言, 数字控制电力电子逆变电路系统有更为复杂的非线性现象和工程应用背景. 研究数字控制电力电子逆变电路中的复杂非线性行为已经成为学术界的热点, 具有重要的理论意义和工程应用价值.

已有学者对单相全桥逆变电路进行研究, 取得了一些研究成果<sup>[3-9]</sup>. 文献[3—5]建立了工作在 DC-DC 状态下的一阶 H 桥式电路的离散映射模型, 分析了其稳定性. 文献[6]对二阶 H 桥式正弦逆变电路在比例积分(PI)单闭环模拟控制下快尺度和慢尺度的稳定性进行了研究. 文献[7]通过分析一阶 H 桥式正弦逆变电路在比例(P)单闭环控制下的

非线性行为, 提出了慢变稳定性定理, 分析了快变和慢变稳定性之间的关系. 文献[8,9]利用线性分析方法对一个开关周期延时数字控制下桥式逆变电路的工作特性进行了分析. H 桥式电路工作在 DC-AC 状态下的情况较多, 而单闭环控制单相全桥 DC-AC 逆变电路在实际工程应用中较少采用. 也有一些学者利用 s 域模型和 z 域模型对电力电子电路中出现的振荡现象进行了分析<sup>[10,11]</sup>. 然而, 对于工程中常用的负载电压外环电感电流内环加给定电压前馈并且考虑一个开关周期延时的数字控制单相全桥 DC-AC 电压逆变电路利用离散迭代模型对其非线性复杂行为的研究工作迄今未见报道.

本文以数字控制负载电压外环电感电流内环加给定电压前馈控制下的单相全桥 DC-AC 电压逆变电路为研究对象, 建立了其离散迭代模型, 发现该逆变电路系统失稳时会发生 Hopf 分岔. 通过对离散映射模型的进一步数学变换, 得出了在不同负载情况下控制器参数稳定范围的解析表达式以及系统失稳后振荡频率的解析表达式, 从而详细分析了单相全桥 DC-AC 电压逆变电路系统的动力学行为和振荡频率与系统参数之间的关系, 从而精确描述了系统的非线性行为, 揭示了系统发生振荡的内在

\* 国家自然科学基金(批准号: 50877065)资助的课题.

† E-mail: leibo@stu.xjtu.edu.cn

物理机理. 最后, 通过 Simulink 仿真以及电路实验验证了理论分析的正确性.

## 2. 电路工作原理及数值仿真

### 2.1. 单相全桥 DC/AC 电压逆变电路数字控制原理

数字控制负载电压外环电感电流内环加给定电压前馈的单相全桥 DC-AC 电压型逆变电路系统

结构如图 1 所示. 图中,  $E$  为 H 桥直流侧电压;  $S_1$ — $S_4$  为理想电力电子开关;  $L$ ,  $C$  分别为滤波电感和滤波电容;  $R$  为负载电阻;  $CM$ ,  $VM$  分别为电流传感器和电压传感器;  $I_L$ ,  $V_R$  分别为电感电流和负载电阻电压的采样值, 由于采样保持器的作用, 采样结果在一个采样周期内恒定, 呈阶梯状;  $V_{R\text{ref}}$  为输出电压参考值;  $I_{\text{Lref}}$  是外环控制器输出, 将其作为电感电流内环的参考值;  $I_c^*$  是调节器输出的中间变量;  $I_c$  为控制信号.

该电路主要功能是在各种负载条件下对负载

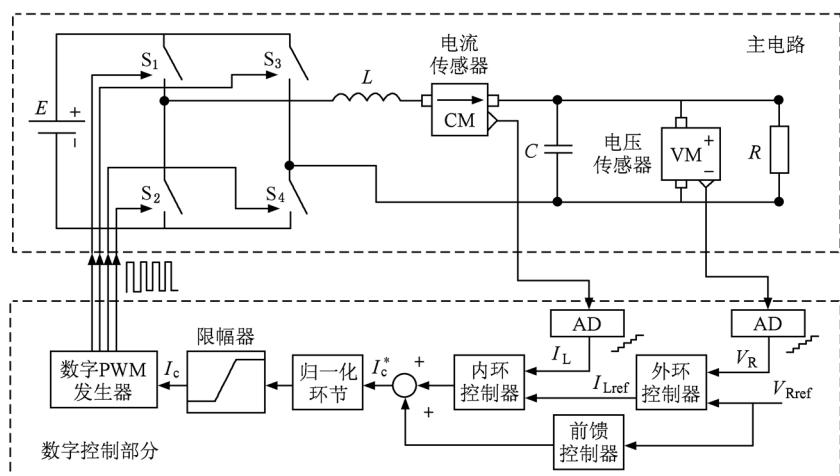


图 1 数字控制单相全桥 DC-AC 电压逆变电路系统图

电压的稳定控制, 保证负载电压的幅值和波形符合设计要求. 电路的主要组成为主电路和数字控制两部分. 主电路由 H 桥式电压型逆变电路构成, 输出端接有  $LC$  滤波器和阻性负载  $R$ . 数字控制部分由 AD 采样环节、控制器、归一化环节、限幅器以及 PWM 发生器组成.

在每个开关周期内通过 AD 采样环节对负载电压以及电感电流进行采样,  $V_{R\text{ref}}$  和  $V_R$  经过外环控制器控制得到  $I_{\text{Lref}}$ ;  $I_{\text{Lref}}$  和  $I_L$  经过内环控制器控制加上电压前馈信号得到  $I_c^*$ , 再经过归一化环节和限幅器的控制得到  $I_c$ ;  $I_c$  经过数字 PWM 发生器产生 PWM 信号. 本文中数字 PWM 发生器采取的是对称 PWM 调制策略, 其产生方式如图 2 所示. 图中三角载波是周期为一个开关周期  $T_s$ , 大小为  $\pm 0.5$  的三角波. 在一个开关周期内, 以三角载波正峰值为一个 PWM 周期的起始位置, 由该位置信号  $I_c$  大小得到 PWM 信号的占空比. 由于数字控制系统中存在采样时间以及计算时间延时, 所以在第  $n$  个开关周期计算得出第  $n+1$  个开关周期的占空比  $d_{n+1}$ , 在第  $n+1$  个

开关周期才会载入生效产生控制作用, 控制电力电子开关  $S_1$ — $S_4$  工作. 设  $d_n$  为第  $n$  个开关周期内的占空比, PWM 信号两侧是时长为  $(1 - d_n)T_s/2$  的低电平, 代表  $S_2$  与  $S_3$  开通,  $S_1$  与  $S_4$  关断; 在两个低电平中间, 是时长为  $dT_s$  的高电平, 代表  $S_1$  与  $S_4$  开通,  $S_2$  与  $S_3$  关断.

根据电力电子开关状态, 以  $I_L$ ,  $V_R$  作为状态变量, 可以把主电路的工作状态分为以下两种情况, 分别列出状态方程.

1)  $S_1$  与  $S_4$  开通,  $S_2$  与  $S_3$  关断时,

$$\begin{aligned} \frac{dI_L}{dt} &= \frac{E}{L} - \frac{V_R}{L}, \\ \frac{dV_R}{dt} &= \frac{I_L}{C} - \frac{V_R}{RC}. \end{aligned} \quad (1)$$

2)  $S_2$  与  $S_3$  开通,  $S_1$  与  $S_4$  关断时,

$$\begin{aligned} \frac{dI_L}{dt} &= -\frac{E}{L} - \frac{V_R}{L}, \\ \frac{dV_R}{dt} &= \frac{I_L}{C} - \frac{V_R}{RC}. \end{aligned} \quad (2)$$

根据上述控制规律, 得出系统的控制框图如图

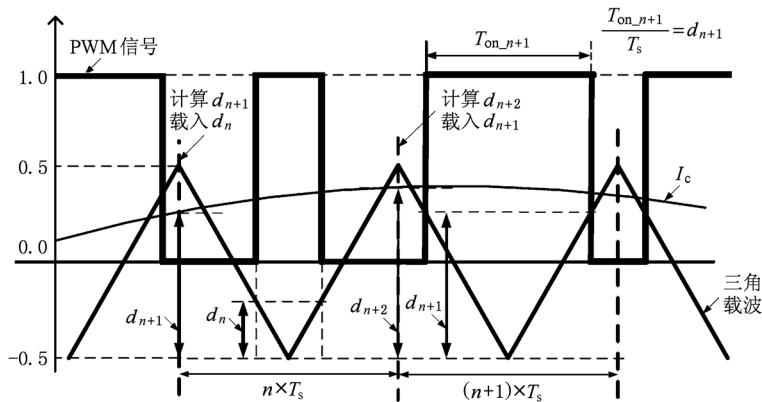


图 2 数字控制对称 PWM 调制策略

3 所示. 图中  $k_v$  为电压外环比例控制系数,  $k_c$  为电流内环比例控制系数,  $k_{pre}$  为给定电压前馈控制系数,  $k_{sat}$  为限幅环节比例系数. 根据数字控制规律将限幅环节, 数字 PWM 发生器以及电感电流和负载

电压的采样保持环节划分为非线性环节. 由于本文中没有考虑逆变器中开通关断时间, 开通关断压降以及死区等非线性因素的影响, 将逆变器与数字控制器、滤波器以及负载一同划分为线性环节.

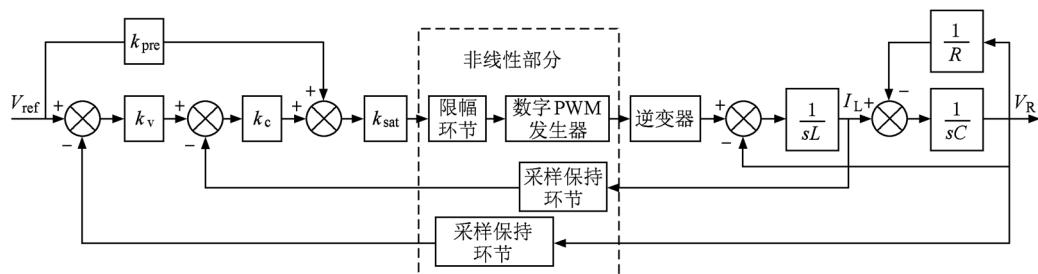


图 3 数字控制单相全桥 DC-AC 电压逆变电路控制框图

## 2.2. 数字仿真结果

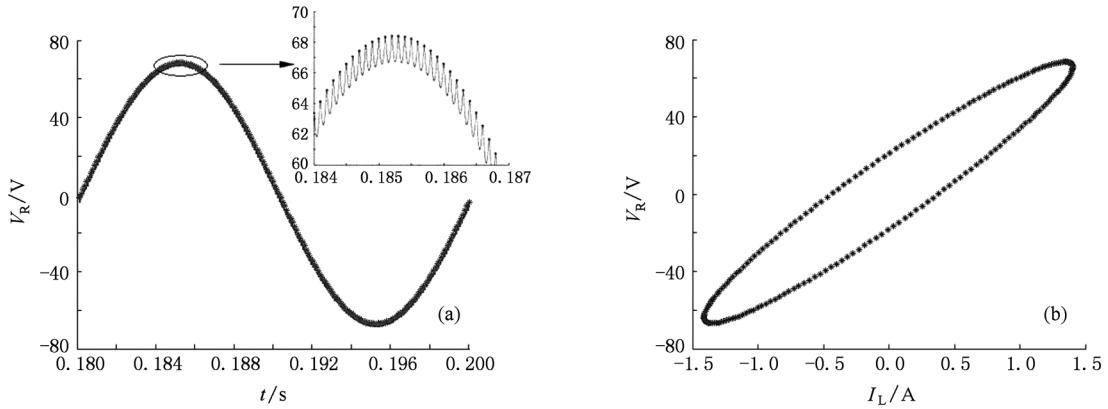
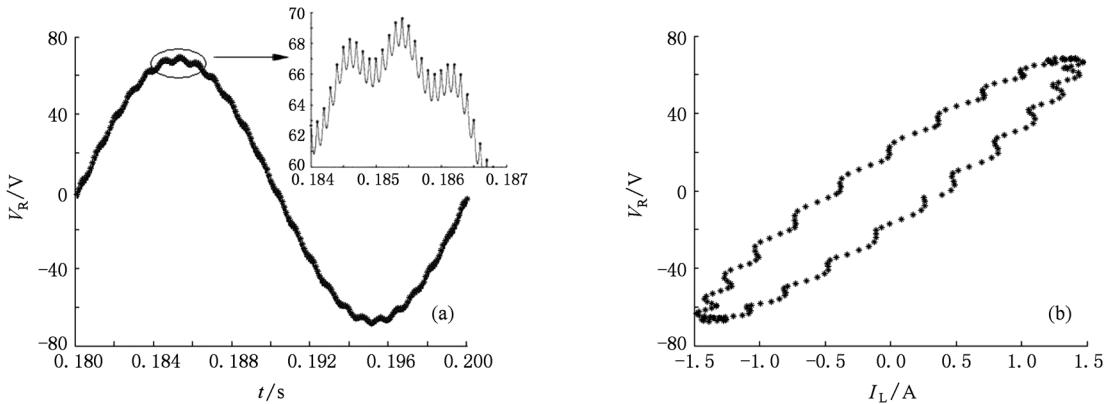
根据上述工作规律, 采用状态方程(1), (2)进行精确的周期-周期数值仿真. 电路参数选取如下: 开关频率  $f_s = 10$  kHz, 参考电压  $V_{ref} = 50\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ , 即运行频率  $f = 50$  Hz, 开关周期  $T_s = 100\ \mu s$ ; 根据给定电压大小, 选择直流侧电压  $E = 100$  V; 根据开关频率和运行频率, 选择  $L = 1$  mH,  $C = 20\ \mu F$ , 阻性负载  $R = 50\ \Omega$ ; 根据数字控制规律  $k_{sat}$  设为 0.005, 限幅环节限定范围  $[-0.5, 0.5]$ . 三个数字控制器均为比例控制器, 当前馈比例系数  $k_{pre} = 0.96$ , 电压外环控制器比例系数  $k_v = 1$ , 电流内环控制器比例系数  $k_c$  分别等于 0.15 和 0.18 时, 得到  $V_R$  的时域波形和  $I_L$ - $V_R$  相图的频闪映射图分别如图 4 和图 5 所示.

从图 4 和图 5 中会发现, 随着控制器参数的变

化,  $V_R$  时域波形以及  $I_L$ - $V_R$  相图的频闪映射图由稳定状态发生了振荡现象, 系统处于不稳定的工作状态, 振荡频率约为 1.2 kHz. 由后面的分析可知, 系统发生了 Hopf 分岔. 这种振荡增大了系统输出电压谐波含量, 将影响系统性能, 危及负载运行安全. 因此, 有必要对这种振荡行为做进一步的分析.

## 3. 系统的稳定性分析

为了分析系统的稳定性, 以下建立描述数字控制单相全桥 DC-AC 电压逆变电路动力学行为的离散迭代模型. 由于  $V_{ref}$  是正弦信号, 系统是一个周期时变系统. 但是系统输出电压频率  $f$  远小于系统开关频率  $f_s$ , 并且在数字控制中, 一个开关周期内系统只进行一次采样及控制, 通过准静态分析<sup>[12]</sup>, 可以认为在一个开关周期内参考电压是一个恒值, 且有

图 4  $R = 50 \Omega, k_v = 1, k_e = 0.15$  时数值仿真波形 (a)  $V_R$  时域波形; (b)  $I_L$ - $V_R$  相图图 5  $R = 50 \Omega, k_v = 1, k_e = 0.18$  时数值仿真波形 (a)  $V_R$  时域波形; (b)  $I_L$ - $V_R$  相图

如下表达式:

$$V_{R\text{refn}} = V_{\text{Ref}}(nT_s). \quad (3)$$

### 3.1. 离散迭代模型

将系统分为主电路和数字控制两部分进行分析,首先对主电路部分推导离散模型.当系统稳定时结合图 2,系统的运行状态如图 6 所示.图中,  $t_1 = t_3 = (1 - d_n)T_s/2, t_2 = d_n T_s$ .

系统的状态方程可以写为

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_iE, \quad (4)$$

式中  $x = [I_L, V_R]^T$ . 根据系统工作在工作状态 1 或工作状态 2, 取  $i = 1$  或  $i = 2$ .  $A, B_i$  是和系统参数有关的变量,详见附录 A.

对方程(4)在  $nT_s$  至  $(n+1)T_s$  时间范围内进行分段积分求解,可以得到系统的迭代方程

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & e^{At_1} e^{At_2} e^{At_3} x_n + E \left( e^{At_3} e^{At_2} \int_0^{t_1} e^{A\xi} B_2 d\xi \right. \\ & \left. + e^{At_3} \int_0^{t_2} e^{A\xi} B_1 d\xi + \int_0^{t_3} e^{A\xi} B_2 d\xi \right). \end{aligned} \quad (5)$$

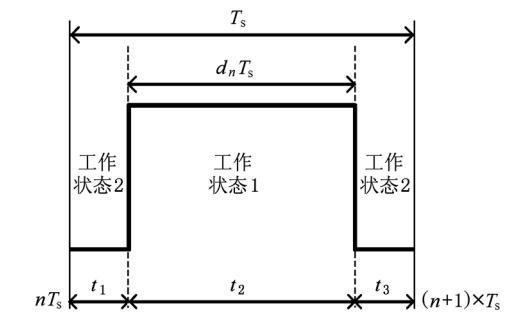


图 6 一个开关周期内系统工作状态

化简得

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & e^{AT_s} x_n + E \left( e^{A(t_2+t_3)} (e^{At_1} - I(2)) A^{-1} B_2 \right. \\ & + e^{At_3} (e^{At_2} - I(2)) A^{-1} B_1 \\ & \left. + (e^{At_3} - I(2)) A^{-1} B_2 \right), \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $I(2)$  是阶数为 2 的单位矩阵.

(6)式中, 时间段  $t_1$ — $t_3$  是占空比  $d_n$  的函数, 而占空比  $d_n$  与  $I_L, V_R$  状态有关. 利用(6)式无法得出使系统稳定的控制器参数的解析式. 为了对系统动

力学行为与系统参数间的关系进行详细分析,对(6)式做进一步的数学推导并化简得

$$\begin{aligned} I_{L_{n+1}} &= f_i(I_{L_n}, V_{R_n}, d_n) \\ &= \sigma(1,1,1)I_{L_n} + \sigma(1,1,2)V_{R_n} \\ &\quad + 2E(\Gamma(1,1,1)\sinh\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ &\quad + \Gamma(1,2,1)\sinh\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\ &\quad + \Gamma(1,1,2)\sinh\left(\frac{d_n\lambda_1}{2}\right) \\ &\quad + \Gamma(1,2,2)\sinh\left(\frac{d_n\lambda_2}{2}\right)), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} V_{R_{n+1}} &= f_v(I_{L_n}, V_{R_n}, d_n) \\ &= \sigma(1,2,1)I_{L_n} + \sigma(1,2,2)V_{R_n} \\ &\quad + 2E(\Gamma(2,1,1)\sinh\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ &\quad + \Gamma(2,2,1)\sinh\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \\ &\quad + \Gamma(2,1,2)\sinh\left(\frac{d_n\lambda_1}{2}\right) \\ &\quad + \Gamma(2,2,2)\sinh\left(\frac{d_n\lambda_2}{2}\right)), \end{aligned} \quad (8)$$

式中,  $\lambda_1, \lambda_2$  为矩阵  $AT_s$  的特征值,  $\sigma(x, y, z), \Gamma(x, y, z)$  是与系统参数有关的函数. (7), (8) 两式的变量定义参见附录 A.

根据图 3 并结合系统控制规律, 系统第  $n$  个开关周期逆变器的占空比  $d_n$  可写为

$$d_n = \begin{cases} 1, & f_d(I_{L(n-1)}, V_{R(n-1)}) \geq 1, \\ f_d(I_{L(n-1)}, V_{R(n-1)}), & 0 > f_d(I_{L(n-1)}, V_{R(n-1)}) > 1, \\ 0, & f_d(I_{L(n-1)}, V_{R(n-1)}) \leq 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} f_d(I_{L(n-1)}, V_{R(n-1)}) &= 0.5 + k_{\text{sat}}(k_c(k_v(V_{\text{ref}(n-1)} - V_{R(n-1)}) \\ &\quad - I_{L(n-1)}) + k_{\text{pre}}V_{\text{ref}(n-1)}). \end{aligned} \quad (10)$$

### 3.2. 稳定性分析

结合(7)–(10)式, 系统平衡点可以通过下式求出:

$$\begin{aligned} I_{L_n}^* &= f_i(I_{L_n}^*, V_{R_n}^*, d_n^*), \\ V_{R_n}^* &= f_v(I_{L_n}^*, V_{R_n}^*, d_n^*), \\ d_n^* &= f_d(I_{L_n}^*, V_{R_n}^*). \end{aligned} \quad (11)$$

通过对给定电压前馈控制器设计, 使负载电压

平衡点的值等于负载电压给定值, 这会减小负载电压控制的静态误差. 令  $V_R^* = V_{\text{ref}}$ , 通过(11)式可以得出前馈系数  $k_{\text{pre}}$  的表达式

$$k_{\text{pre}} = (d_n^* - 0.5)/k_{\text{sat}} + k_c I_{L_n}^*/V_{\text{ref}}. \quad (12)$$

令  $Y_n = I_{L(n-1)}$ ,  $Z_n = V_{R(n-1)}$ , 设  $I_{L_n}, V_{R_n}, Y_n, Z_n$  为系统新的状态变量, 根据(7)–(10)式, 系统的状态方程以及占空比表达式可重新写为

$$\begin{aligned} I_{L(n+1)} &= f_i(I_{L_n}, V_{R_n}, f_d(Y_n, Z_n)), \\ V_{R(n+1)} &= f_v(I_{L_n}, V_{R_n}, f_d(Y_n, Z_n)), \\ Y_{n+1} &= I_{L_n}, \\ Z_{n+1} &= V_{R_n}, \\ d_n &= f_d(Y_n, Z_n) \\ &= 0.5 + k_{\text{sat}}(k_c(V_{\text{ref}(n-1)} - Z_n) - Y_n) \\ &\quad + k_{\text{pre}}V_{\text{ref}(n-1)}). \end{aligned} \quad (13)$$

得到系统雅克比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} \sigma(1,1,1) & \sigma(1,1,2) & \Lambda(1)k_c & \Lambda(1)k_c k_v \\ \sigma(1,2,1) & \sigma(1,2,2) & \Lambda(2)k_c & \Lambda(2)k_c k_v \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= -2E k_{\text{sat}} \left( \Gamma(x, 1, 2) \cosh\left(\frac{d_n^* \lambda_1}{2}\right) \frac{\lambda_1}{2} \right. \\ &\quad \left. + \Gamma(x, 2, 2) \cosh\left(\frac{d_n^* \lambda_2}{2}\right) \frac{\lambda_2}{2} \right). \end{aligned}$$

由于  $\lambda_1, \lambda_2$  是  $AT_s$  的特征值,  $T_s$  非常小, 同时根据占空比定义有  $0 \leq d_n^* \leq 1$ , 得出

$$\text{real}\left(\cosh\left(\frac{d_n^* \lambda_1}{2}\right)\right) \approx \text{real}\left(\cosh\left(\frac{d_n^* \lambda_2}{2}\right)\right) \approx 1,$$

并且根据各个参数的关系,  $\Lambda(x)$  为实数, 故可以略去双曲余弦函数的影响. 令

$$\Lambda(x) = -2E k_{\text{sat}} \left( \Gamma(x, 1, 2) \frac{\lambda_1}{2} + \Gamma(x, 2, 2) \frac{\lambda_2}{2} \right). \quad (16)$$

特征方程为

$$\lambda_J^4 + \lambda_J^3 F_1 + \lambda_J^2 F_2 + \lambda_J F_3 + F_4 = 0, \quad (17)$$

其中,  $F_1$ – $F_4$  是与系统参数有关的常量, 具体参数定义见附录 B.

对比  $F_4$  中变量, 会发现  $F_4 = 0$ , 特征方程降阶为三阶方程. 根据盛金公式及其判别式<sup>[13]</sup>, 当系统滤波器参数满足一定范围时(在实际工程应用中总是满足的)系统含有一个实根与一对共轭虚根. 同时根据韦达定理, 略去方程中高次项, 由于在系统

雅克比矩阵  $J$  中,并不包含  $k_{\text{pre}}$  项,可以得出系统  $k_v$ ,  $k_e$  稳定范围为

$$k_e < \frac{\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_3 k_v}, \quad (18)$$

其中  $\gamma_1$ — $\gamma_3$  是和系统参数有关的常量,具体参数定义见附录 C.

当系统开关频率以及运行频率确定之后,LC 滤波器参数就已经确定了. 系统的动力学行为与负载

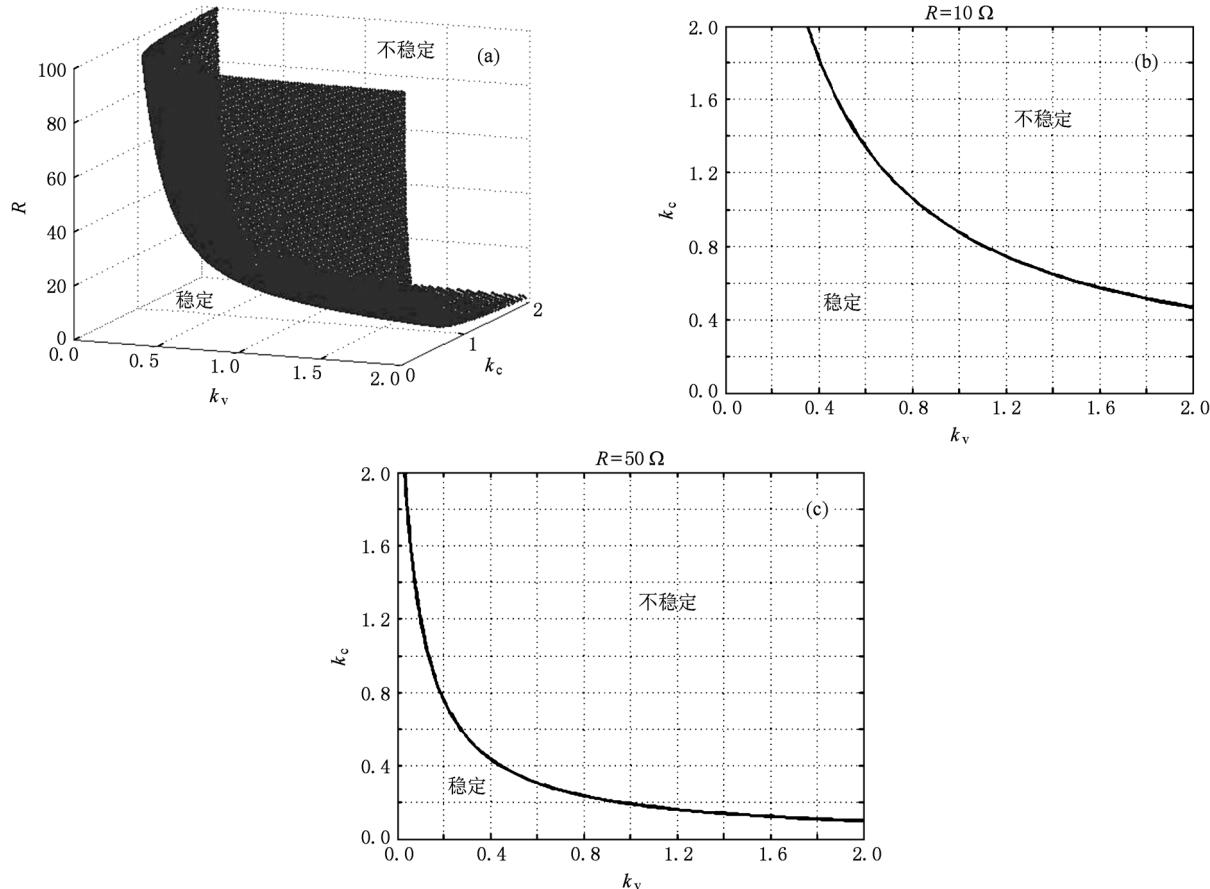


图 7 系统稳定范围 (a) 关于  $k_v$ ,  $k_e$ ,  $R$  的系统稳定范围;(b)  $R = 10 \Omega$  时  $k_v$ ,  $k_e$  系统稳定范围;(c)  $R = 50 \Omega$  时  $k_v$ ,  $k_e$  系统稳定范围

同时,对于  $R = 10 \Omega$  以及  $R = 50 \Omega$  时分别求解方程(17),得到系统特征值  $\lambda_{j1}$ — $\lambda_{j4}$  随  $k_v$ ,  $k_e$  变化情况如表 1 和表 2 所示,特征值变化轨迹如图 8 和图 9 所示.

表 1  $R = 10 \Omega$  时特征值随  $k_v$ ,  $k_e$  变化趋势

$k_p$	$k_i$	特征值 $\lambda_{j1}$ — $\lambda_{j4}$	稳定性
1	0.825	$0, -0.0937, 0.6614 \pm 0.7413j$	稳定
1	0.8375	$0, -0.0947, 0.6619 \pm 0.7444i$	稳定
1	0.85	$0, -0.0956, 0.6623 \pm 0.7475j$	稳定
1	<b>0.8625</b>	<b><math>0, -0.0965, 0.6628 \pm 0.7505j</math></b>	不稳定
1	0.875	$0, -0.0974, 0.6632 \pm 0.7536j$	不稳定

大小  $R$ ,  $k_e$ ,  $k_v$  关系密切. 根据(18)式画出  $R \subset (0, 100) \Omega$ ,  $k_v \subset (0, 2)$ ,  $k_i \subset (0, 2)$  时系统的稳定边界如图 7 所示.

图 7(a) 为关于  $k_v$ ,  $k_e$ ,  $R$  的系统三维稳定范围图,图 7(b) 和 (c) 为  $R = 10 \Omega$  和  $R = 50 \Omega$  时在图 7(a) 中的截面图,代表了  $R = 10 \Omega$  和  $R = 50 \Omega$  时  $k_v$  和  $k_e$  的稳定边界. 从图 7 中可以得出,随着负载阻值的减小,系统的稳定范围会扩大.

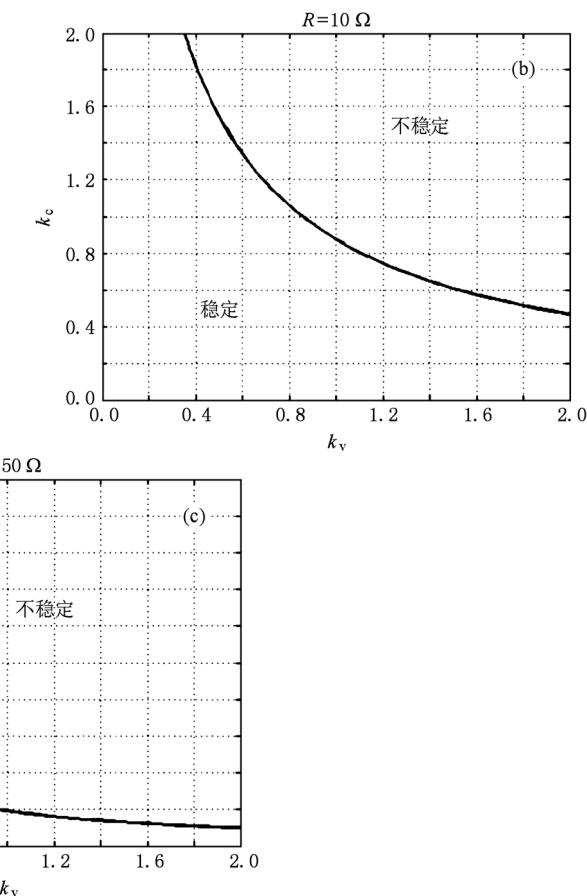
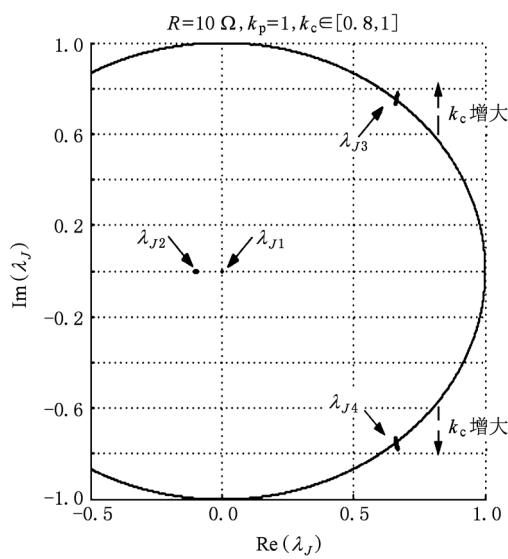
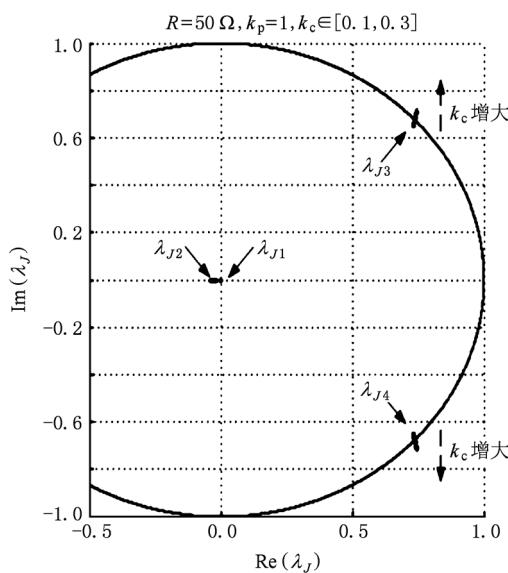


表 2  $R = 50 \Omega$  时特征值随  $k_v$ ,  $k_e$  变化趋势

$k_p$	$k_i$	特征值 $\lambda_{j1}$ — $\lambda_{j4}$	稳定性
1	0.15	$0, -0.0216, 0.7351 \pm 0.6680j$	稳定
1	0.1625	$0, -0.0233, 0.7359 \pm 0.6720j$	稳定
1	0.175	$0, -0.0249, 0.7367 \pm 0.6760j$	稳定
1	<b>0.1875</b>	<b><math>0, -0.0265, 0.7375 \pm 0.6800j</math></b>	不稳定
1	0.2	$0, -0.0281, 0.7383 \pm 0.6839j$	不稳定

从图 8 和图 9 可以看出,随着控制系数的增大,系统的四个特征值中,有一个恒为 0,一个在实轴变

图 8  $R = 10 \Omega$  时特征值随  $k_v, k_c$  运动轨迹图 9  $R = 50 \Omega$  时特征值随  $k_v, k_c$  运动轨迹

化,有一对特征根以共轭复数形式穿越单位圆,即系统发生了 Hopf 分岔<sup>[14,15]</sup>.

系统发生 Hopf 分岔的振荡频率可以通过特征根计算得出. 系统参数不同,发生 Hopf 振荡频率的也不同. 代入系统变量,则振荡频率  $f_{os}$  为

$$f_{os} = \frac{1}{2\pi T_s} \arctan(W_1 - (\Lambda(1)k_c + \Lambda(2)k_v k_c)) \\ / ((W_2 k_c + W_3 k_v k_c)(W_4 + W_2 k_c \\ + W_3 k_v k_c)), \quad (19)$$

其中  $W_1$ ~ $W_4$  是和系统参数有关的常量,具体参数定义附录 C.

通过对(18),(19)式的求解,当  $R = 10 \Omega$  时,系统的一组分岔点为  $k_v = 1, k_c = 0.861$ ,振荡频率 1347.4 Hz;当  $R = 50 \Omega$  时,系统的一组分岔点位  $k_v = 1, k_c = 0.18$ ,振荡频率为 1181.6 Hz.

## 4. Simulink 仿真及实验验证

### 4.1. Simulink 仿真

根据单相全桥 DC-AC 电压逆变电路的数字控制原理图(见图 1),给出相应的 Simulink 仿真电路图如图 10 所示. 比较模块(sum)的采样时间设置为开关周期  $T_s$ ,仿真系统每隔  $T_s$  进行一次采样计算,并将计算结果保持为恒值到下一个采样周期,模拟了真实数字系统采样保持的过程. 在 PWM 生成模块中,离散延时模块(Delay)将信号波滞后一个采样周期再与三角波进行比较,模拟了真实系统中的占空比载入延时. 由于比较模块和延时模块的作用,在一个开关周期内信号波为恒值,自然采样法和规则采样法一样,在仿真中用自然采样法产生 PWM 调制信号.

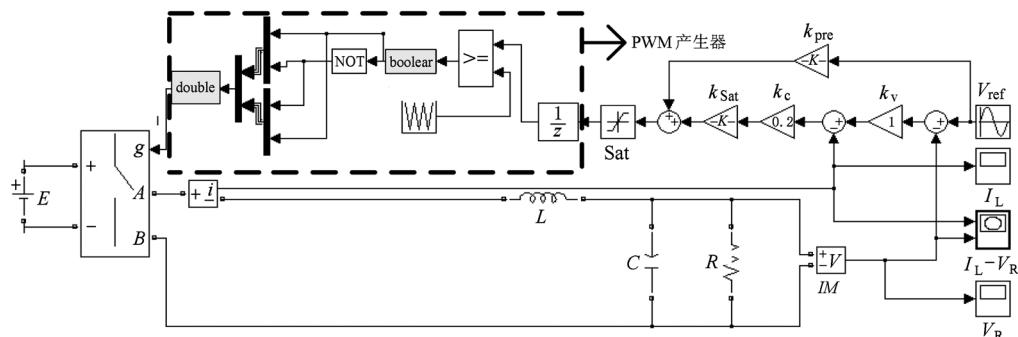
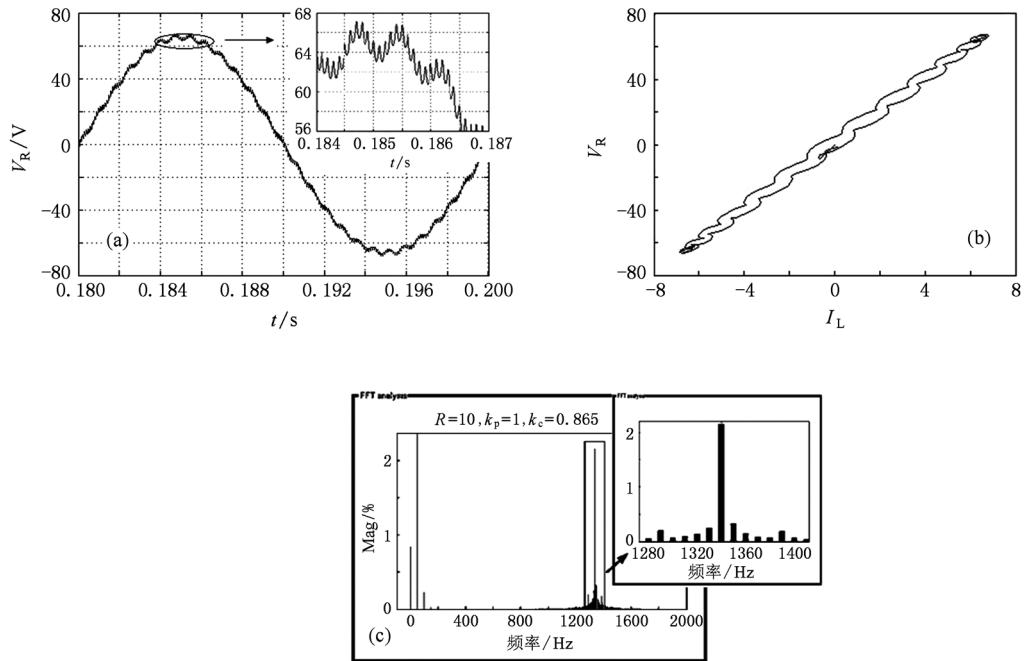
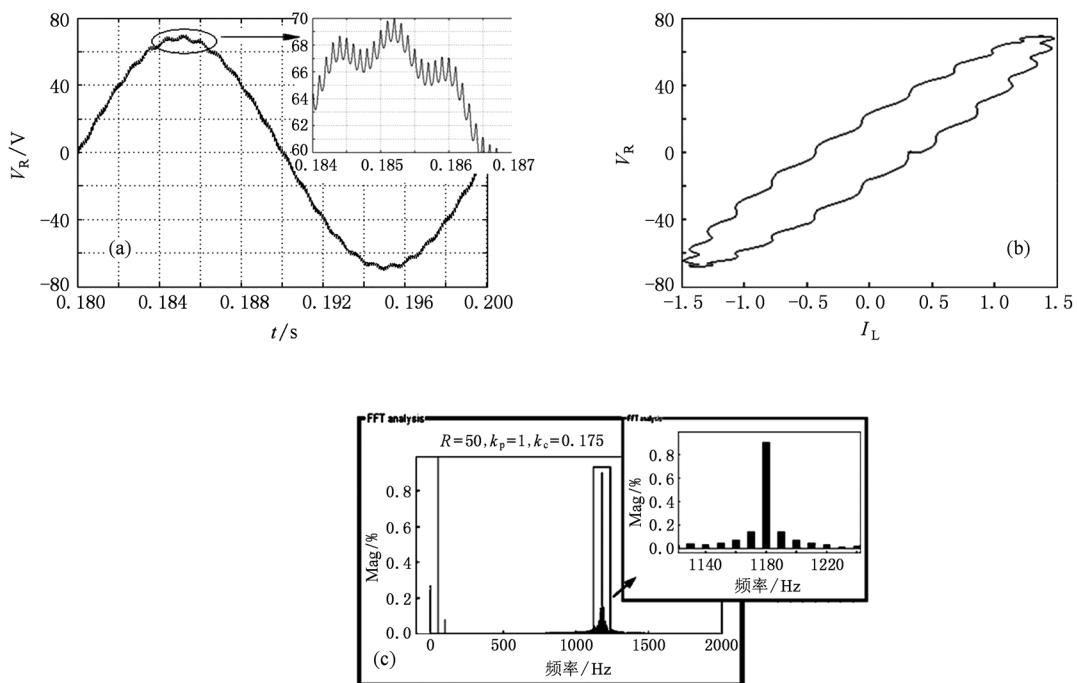


图 10 Simulink 电路仿真模型

图 11  $R = 10 \Omega, k_v = 1, k_e = 0.861$  时 Simulink 仿真结果 (a)  $V_R$  时域波形; (b)  $I_L$ - $V_R$  相图; (c) FFT 分析结果图 12  $R = 50 \Omega, k_v = 1, k_e = 0.18$  时 Simulink 仿真结果 (a)  $V_R$  时域波形; (b)  $I_L$ - $V_R$  相图; (c) FFT 分析结果

当  $R = 10 \Omega, k_v = 1, k_e = 0.861$  时得到  $V_R$  波形、 $I_L$ - $V_R$  的相图以及  $V_R$  的 FFT 分析结果如图 11 所示。此时通过 FFT 分析, 电压波形中不仅含有 50 Hz 的基波成分, 还出现了振荡约为 1340 Hz 的谐波成分, 振荡频率和理论计算值符合。

当  $R = 50 \Omega, k_v = 1, k_e = 0.18$  时得到  $V_R$  波形、 $I_L$ - $V_R$  的相图以及  $V_R$  的 FFT 分析结果如图 12 所示。通过 FFT 分析, 电压波形中不仅含有 50 Hz 的基波成分, 还出现了振荡约为 1180 Hz 的谐波成分, 振荡频率和理论计算值符合。

## 4.2. 实验验证

对  $R = 50 \Omega$  时系统的动力学行为进行试验研究,采用 Tektronix DPO 3034 示波器记录负载电压波形. 试验中,系统参数大小与 2.2 节中相同. 通过实验研究,此时  $k_v = 1, k_c = 0.21$  是系统发生 Hopf 分岔的分岔点. 图 13、图 14 分别是  $k_v = 1, k_c = 0.15$  以

及  $k_v = 1, k_c = 0.21$  时的  $V_R$  波形.

图 13 和图 14 波形与数值仿真和 Simulink 仿真结果相似. 从图 14 中可以明显看出,系统发生了振荡,在一个周期内,振荡频率约为 1100 Hz,与数值仿真和 Simulink 仿真结果基本一致. 实验结果和理论计算有一定差距的原因是理论分析时未考虑电感电容寄生参数及 H 桥逆变器死区影响等因素,产

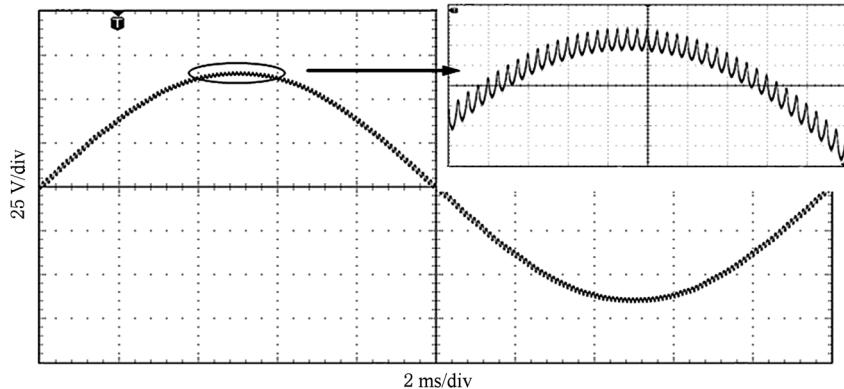


图 13  $k_v = 1, k_c = 0.15$  时的  $V_R$  实验波形(纵轴:25 V/div;横轴:2 ms/div)

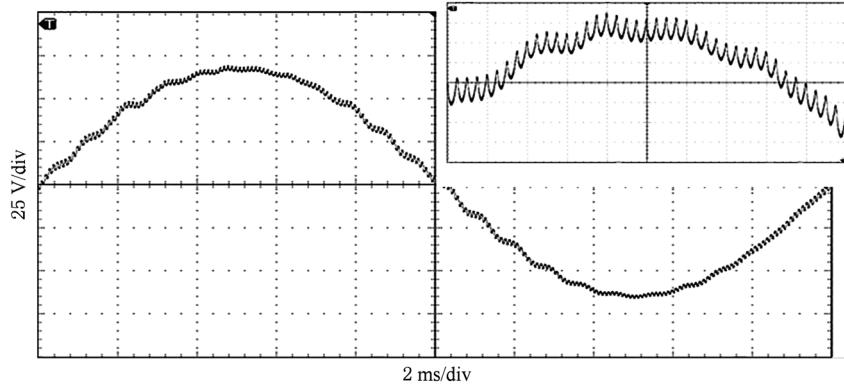


图 14  $k_v = 1, k_c = 0.21$  时的  $V_R$  实验波形(纵轴:25 V/div;横轴:2 ms/div)

生了一定的误差.

## 5. 结 论

与模拟单闭环控制 H 桥式逆变电路不同,工程中常用的负载电压外环电感电流内环加给定电压前馈数字控制下的单相全桥 DC-AC 电压逆变电路,随着控制参数的变化,会发生 Hopf 分岔. 本文推导出单相全桥 DC-AC 电压逆变电路数字控制离散迭代模型. 通过数学简化,得出了该数字控制系统控

制参数稳定范围解析表达式以及发生振荡时的频率解析表达式,准确预测了参数稳定边界以及振荡频率的大小,揭示了系统发生振荡的内在物理机理,精确刻画了系统的非线性运动行为,并通过 Simulink 仿真以及电路实验验证了理论分析的正确性. 这些研究不仅有助于理解数字控制单相全桥 DC-AC 电压逆变电路系统存在的非线性运动行为,同时对工程实践中准确预测与防止振荡现象的发生,确保逆变电路系统安全运行,具有重要的指导意义.

## 附录 A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad (A1)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (A2)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (A3)$$

设  $\lambda_1, \lambda_2$  为矩阵  $AT_s$  的特征值,  $K$  为其特征向量矩阵,  $P$  为其逆矩阵. 设

$$K = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{bmatrix}, \quad (A4)$$

$$P = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}, \quad (A5)$$

令

$$\varepsilon(x, y, z) = \kappa_{yx}\rho_{xz}, \quad (A6)$$

其中,  $x, y, z$  的取值范围为 1 或 2.

$$\xi_1 = A^{-1}B_2, \xi_2 = A^{-1}(B_1 - B_2), \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, z) = & [e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}] \\ & \times [\varepsilon(1, y, z), \varepsilon(2, y, z)]^T, \end{aligned} \quad (A8)$$

其中,  $x, y, z$  的取值范围为 1 或 2.

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y, z) = & [\sigma(2, x, 1), \sigma(2, x, 2)] \\ & \times [[\varepsilon(y, 1, 1), \varepsilon(y, 1, 2)] \\ & \times \xi_1, [\varepsilon(y, 2, 1), \varepsilon(y, 2, 2)] \\ & \times \xi_2]^T, \end{aligned} \quad (A9)$$

其中,  $x, y, z$  的取值范围为 1 或 2.

## 附录 B

$$F_1 = -(\sigma(1, 1, 1) + \sigma(1, 2, 2)), \quad (B1)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & -\sigma(1, 1, 1)\sigma(1, 2, 2) \\ & + \sigma(1, 1, 2)\sigma(1, 2, 1) - \Lambda(1)k_e \\ & - \Lambda(2)k_vk_e, \end{aligned} \quad (B2)$$

$$\begin{aligned} F_3 = & (\sigma(1, 2, 2)\Lambda(1) - \sigma(1, 1, 2)\Lambda(2))k_e \\ & + (\sigma(1, 1, 1)\Lambda(2) \\ & - \sigma(1, 2, 1)\Lambda(1))k_vk_e, \end{aligned} \quad (B3)$$

$$F_4 = \Lambda(1)\Lambda(2)k_vk_e^2 - \Lambda(1)\Lambda(2)k_vk_e^2. \quad (B4)$$

## 附录 C

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & 2(\sigma(1, 1, 1)\sigma(1, 2, 2) \\ & - \sigma(1, 1, 2)\sigma(1, 2, 1) - 1), \end{aligned} \quad (C1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = & (\sigma(1, 1, 1) + \sigma(1, 2, 2))(\sigma(1, 2, 2)\Lambda(1) \\ & - \sigma(1, 1, 2)\Lambda(2)) - 2\Lambda(1), \end{aligned} \quad (C2)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & (\sigma(1, 1, 1) + \sigma(1, 2, 2))(\sigma(1, 1, 1)\Lambda(2) \\ & - \sigma(1, 2, 1)\Lambda(1)) - 2\Lambda(2), \end{aligned} \quad (C3)$$

$$\begin{aligned} W_1 = & \sigma(1, 1, 1)\sigma(1, 2, 2) \\ & + \sigma(1, 1, 2)\sigma(1, 2, 1), \end{aligned} \quad (C4)$$

$$W_2 = (\sigma(1, 2, 2)\Lambda(1) - \sigma(1, 1, 2)\Lambda(2)), \quad (C5)$$

$$W_3 = (\sigma(1, 1, 1)\Lambda(2) - \sigma(1, 2, 1)\Lambda(1)), \quad (C6)$$

$$W_4 = -(\sigma(1, 1, 1) + \sigma(1, 2, 2)). \quad (C7)$$

- [1] Miao B, Zane R, Maksimovic D 2005 *IEEE Trans. Power Electron.* **20** 1093
- [2] Liu Y F, Sen P C 2005 *Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications* Toronto, Canada, August 28—31, 2005 p635
- [3] Robert B, Robert C 2002 *Int. J. Contr.* **75** 1356
- [4] Iu H H C, Robert B 2003 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **150** 1125
- [5] Robert B, Feki M, Iu H H C 2006 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **16** 113
- [6] Li M, Dai D, Ma X K 2008 *Circuits Syst. Signal Processing* **27** 811
- [7] Wang X M, Zhang B, Qiu D Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2248 (in Chinese) [王学梅、张波、丘东元 2009 物理学报 **58** 2248]
- [8] Hyosung K, Seung-Ki S 2005 *IEEE Trans. Power Electron.* **20** 1169

- [9] Escobar G, Valdez A A 2003 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **54** 504
- [10] Wang F Q, Zhang H, M X K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1522 (in Chinese) [王发强、张浩、马西奎 2008 物理学报 **57** 1522]
- [11] Zhang X T, Ma X K, Zhang H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6174 (in Chinese) [张笑天、马西奎、张浩 2008 物理学报 **57** 6174]
- [12] Tse C 2003 *Complex Behavior in Switching Power Converters* (Boca Raton, CRC) p59
- [13] Fan S J 1989 *Natural Science Journal of Hainan Teachers College* **2** 91 (in Chinese) [范盛金 1989 海南师范学院学报(自然科学版) **2** 91]
- [14] Mazumder S K, Nayfeh A, Boroyevich D 2001 *IEEE Trans. Power Electron.* **16** 201
- [15] Liu S H, Tang J S, Qin J Q, Yin X B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1691

# Analysis of oscillation phenomenon in digital controlled DC-AC H-bridge inverter\*

Lei Bo<sup>†</sup> Xiao Guo-Chun Wu Xuan-Lü Qi Yuan-Rui

(State Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment, School of Electrical Engineering,  
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 25 November 2010; revised manuscript received 27 December 2010)

## Abstract

The discrete-time iterative map of digitally controlled DC-AC H-bridge inverter with outer load-voltage loop and inter inductance-current loop plus voltage-reference feedforward loop is derived by considering the effect of the time delay problems inherent in digital control system. The type of the bifurcation point when the system loses stability is predicted in terms of the eigenvalues of the Jacobian matrix, and it is found that the type is of the Hopf bifurcation. The analytic expressions of the stability boundaries and the oscillation frequency are deduced, and the underlying mechanism of this nonlinear phenomenon is analyzed. Finally, the theoretical results are verified by simulations and circuit experiments.

**Keywords:** H-bridge, DC-AC inverters, digital control, discrete-time iterative map

**PACS:** 05.45.-a

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50877065).

† E-mail: leibo@stu.xjtu.edu.cn