

沿时间逐步求解应力的拉格朗日分析方法研究*

陶为俊[†] 浣石

(广州大学工程抗震中心, 广州 510405)

(2012 年 3 月 14 日收到; 2012 年 4 月 16 日收到修改稿)

拉格朗日分析方法是通过测量各个拉格朗日位置处的物理量历程来分析材料内部该位置处的其他物理量的变化, 进而认识材料的动态力学性能. 但现有的拉格朗日分析方法在已知粒子速度情况下, 求解方法仍有不足. 针对这一情况, 提出了沿时间逐步求解方法, 该方法能够在不做任何假定的情况下求解出应力, 从而从根本上解决了只测量粒子速度这一物理量时求解应力的困难. 并利用该方法对一组混凝土在冲击作用下的实验数据进行了处理, 计算得到了相应的应变波形、应力波形以及加、卸载全过程的应力-应变曲线, 进而揭示出混凝土材料与应变率相关的弹-塑性本构关系的特征.

关键词: 拉格朗日分析, 本构关系, 应力-应变, 混凝土

PACS: 07.05.kf, 62.20.F-, 62.50.-p

1 引言

近年来, 随着人们安全认识的提高, 对于固体材料在高应变率下的本构模型开展了越来越多的研究^[1-4]. 拉格朗日分析方法主要就是在事先不做任何本构假定的情况下, 通过测量材料不同位置处的某些力学信息 (应力、应变或粒子速度等) 的变化, 由冲击动力学的三个守恒方程经过适当的数学推演及数值计算, 求得其他未知的力学量. 该方法主要用来研究分析材料对冲击加载的动态力学响应形态^[5].

拉格朗日分析方法最早由 Fowles 和 Williams^[6,7] 在 20 世纪 70 年代初期提出, 但是由于难以实现而未能得到实际应用. Cowperthwaite 和 Williams^[8] 将这一方法的应用范围做了进一步推广. 1973 年 Grady^[9] 在 Fowles 的基础上提出了路径线法, 用来计算拉格朗日分析中所需要的导数. 在此基础上, Seaman^[10] 提出了曲面拟合法, 即根据实验测量的波形特征进行分区曲面拟合, Seaman 假定所拟合的曲面是单调光滑的, 且沿径线的三阶

全导数 $d^3\sigma/dh^3 \equiv 0$. 反解法^[11-13] 避开了 Seaman 假定而求得应力场, 但由于其结果依赖于假定的未知应力函数形式而可能产生非惟一解, 事实上, 此方法已被 Seaman^[10] 否定. Gupta^[14] 提出自洽检验法, 由于速度波形推应力波形时需要做一定的假设, 因此该方法通过应力场再反过来反推速度场, 从而验证结果的可靠性. 1989 年 Forest^[15] 提出了冲量时间积分函数法, 并将其应用于数据处理和方差估计中, 但是当测量的量完全不涉及应力时, 要建立精确的函数形式仍有困难. 王礼立等^[16,17] 利用拉格朗日分析方法结合分离式霍普金森压杆技术测量了应力、质点速度等初始条件, 但在利用气体炮试验测量粒子速度并进行拉格朗日分析时, 难以得到应力初始条件.

拉格朗日分析方法中需要已知各个拉格朗日位置处的试验数据, 在试验中可以通过嵌入在材料内部不同拉格朗日位置处的传感器测量试件的应力时程、应变时程或粒子速度时程. 因此, 通过拉格朗日分析方法来研究材料率型本构关系的研究, 具体可以有三种求解途径: 1) 当测量的物理量为应力时程时, 根据拉格朗日分析方法来求解可以得到

* 国家自然科学基金 (批准号: 10972060) 和高等学校博士学科点科研基金 (批准号: 20104410110003) 资助的课题.

[†] E-mail: twj2012@hotmail.com

粒子速度、应变等时程关系,该方法不存在数学上的计算障碍;2)当测量的物理量为粒子速度时程时,根据拉格朗日分析方法来求解得到应力、应变时程关系,在求解应力时程关系时还需要已知初始位置处的一条应力时程作为初始条件,然而在同一个位置难以同时测量两个物理量;3)当测量的物理量为应变时程时,根据拉格朗日分析方法来求解粒子速度、应力时程关系,不仅需要已知初始位置处的一条粒子速度时程作为初始条件来求解粒子速度时程关系,还需要已知初始位置处的一条应力时程作为初始条件来求解应力时程关系.因此,对于拉格朗日分析的三种方法,第一种方法最易于实现;第二种方法需要已知一个应力初始条件;第三种方法最为困难,需要已知一个应力、一个粒子速度初始条件.

传统的方法均是采用第一种方法,即通过锰铜传感器来测量应力并求解出其他物理量.但是,粒子速度计的时间响应比测量应力的锰铜传感器好,有效记录时间也长一些,因此,粒子速度计更适合测量冲击波后流场的信息.针对实验中不能同时测量应力、粒子速度时程这一困难,本文在前人研究的基础上利用应力初始条件,提出了沿时间的逐步求解方法,计算过程中无须做任何假定,不仅保证了数据的惟一性,而且该方法只涉及物理量的一阶导数、偏导数,这大大降低了试验数据局部抖动对数据处理结果的影响.

2 拉格朗日方法

有关拉氏分析的基本原理, Fowles^[18] 于 1973 年已经做过较全面的阐述,在忽略热传导、体积力、内部能源和能穴的假定条件下,一维平面波拉格朗日坐标下的守恒方程为(应力应变以压为正,相速度以右行波为正)

$$\text{动量守恒 (运动方程): } \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial h} = 0, \quad (1)$$

$$\text{质量守恒 (连续方程): } \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial h} = 0, \quad (2)$$

$$\text{能量守恒: } \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\sigma}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial h} = 0, \quad (3)$$

式中 ε , u , σ 分别表示应变、粒子速度和应力, E 表示比内能, h 和 t 分别表示拉格朗日坐标和时间, ρ_0 表示试件的初始密度.

根据路径线法,将沿等时线的计算转化为沿径

线和沿迹线的计算,即

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial h} \right)_t = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial h} \right)_J - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)_h \left(\frac{\partial t}{\partial h} \right)_J, \quad (4)$$

式中下标 t 表示沿时间的偏导数,下标 J 表示沿径线的偏导数,下标 h 表示沿迹线的偏导数. (4) 式中 $(\partial/\partial h)_J$ 是变量沿路径线 J 的偏导数,因此可以用全导数 (d/dh) 来代替.通过路径线法,将路径线 J 表示为 h 和 t 的函数.显然,对于某一确定的路径线 $J(h, t)$,当 h 一定时, J 和 t 有确定的对应关系,故可以用 J 代替 t ,即将应力函数 $\sigma(h, t)$ 表示为 $\sigma(h, J)$.

将 (1) 式按照路径法即可表示为

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_h + \frac{d\sigma}{dh} - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)_h \left(\frac{dt}{dh} \right) = 0. \quad (5)$$

测量了各个拉格朗日位置处的粒子速度曲线 $u(h, t)$,可以直接求解出 dt/dh ,粒子速度 $u(h, t)$ 在各个拉格朗日位置处 h_i ($i = 1, 2, \dots, m$, 其中 m 为迹线数目) 的偏导数 $(\partial u/\partial t)_h$ 也可以求出来.根据 (5) 式,由于应力曲线 $\sigma(h, t)$ 未知,因此,应力沿路径线的全导数 $d\sigma/dh$ 以及对时间的偏导数 $(\partial \sigma/\partial t)_h$ 需要待定,而应力的函数形式也是不确定的,一个方程难以求解出两个未知数.

基于上述原因,这里引入应力初始条件 $\sigma(h_i, 0) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$),则对于第一条路径线 ($J = 1$) 而言,应力 $\sigma(h_i, J_1)$ 已知,显然 $\sigma(h_i, J_1)$ 沿路径线的全导数 $d\sigma(h_i, 0)/dh$ 在各个拉格朗日位置 h_i 处的值可以求解出来,在第一条路径线 ($J = 1$) 上, (5) 式中只有 $(\partial \sigma/\partial t)_h$ 未知,因此将 (5) 式变成

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)_h = \left[\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_h + \frac{d\sigma}{dh} \right] / \left(\frac{dt}{dh} \right). \quad (6)$$

根据 (6) 式即可以求解出第一条路径线上各个拉格朗日位置 h_i 处的应力沿时间的偏导数 $(\partial \sigma/\partial t)_h$,在 $\Delta J = J_2 - J_1$ 间隔内的积分可以近似地表示为

$$\sigma(h, J_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)_h dt. \quad (7)$$

根据 (7) 式即可以求解出第二条路径线 ($J = 2$) 在各个拉格朗日位置处 h_i 的应力 $\sigma(h_i, J_2)$.

同理,对于任意一条路径线 $J = J_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$, 其中 n 为迹线上数据数目),如图 1 所示, p_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 表示在路径线 $J = J_j$ 上各条迹线的数据点位置.根据 (7) 式求解出该路径线上的应力 $\sigma(h_i, J_j)$,将 $\sigma(h_i, J_j)$ 沿路径线 $J = J_j$

的全导数 $d\sigma(h_i, J_j)/dh$ 在各个拉格朗日位置处 h_i 的值也求解出来. 由于已知粒子速度曲线 $u(h, t)$, 那么可以直接求解出 dt/dh , 粒子速度 $u(h, t)$ 在各个拉格朗日位置处 h_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 的偏导数 $(\partial u/\partial t)_h$ 也可以求出来. 将上述已知量代入 (6) 式, 那么就可以求解出在该路径线上应力 $\sigma(h_i, J_j)$ 沿时间的偏导数 $(\partial\sigma(h, J_j)/\partial t)_h$, 再根据 (7) 式就可以求解出下一条路径线上的应力 $\sigma(h_i, J_{j+1})$, 即图 1 中 q_i 所对应的各个位置的应力值. 依次类推, 即可以求解出整个流场中的应力 $\sigma(h, J)$.

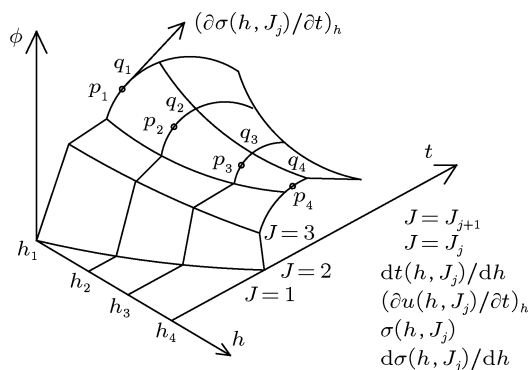


图 1 路径线示意图

关于应变的求解直接采用传统拉格朗日方法, 首先根据路径线方法, 将 (2) 式写成如下形式:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_h + \frac{du}{dh} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_h \left(\frac{dt}{dh}\right) = 0. \quad (8)$$

由于实验中测量到了粒子速度 $u(h, t)$, 可以直接求解出 dt/dh 以及粒子速度 $u(h, t)$ 沿路径线的导数 du/dh 在各个拉格朗日位置 h_i 处的值, 同时沿时间的偏导数 $(\partial u/\partial t)_h$ 也相应地可以确定, 则在 $\Delta J = J_2 - J_1$ 间隔内的积分可以近似地表示为

$$\varepsilon(h, J_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_h dt, \quad (9)$$

根据 (9) 式就可以求解出下一根路径线上的应变 $\varepsilon(h, J_2)$. 依此类推, 就可以求解出整个流场中的应变 $\varepsilon(h, J)$.

同理, 跟据路径线方法, 将 (3) 式写为

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_h + \frac{\sigma}{\rho_0} \left[\frac{du}{dh} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_h \left(\frac{dt}{dh}\right)\right] = 0, \quad (10)$$

式中, 应力 $\sigma(h, t)$ 已经求解出来, dt/dh , du/dh , $(\partial u/\partial t)_h$ 均为已知, 因此根据 (10) 式就可以求解出 $(\partial E/\partial t)_h$. 在 $\Delta J = J_2 - J_1$ 间隔内的积分可以近似地表示为

$$E(h, J_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_h dt, \quad (11)$$

根据 (11) 式就可以求解出下一根路径线上的应变 $E(h, J_2)$. 依此类推, 就可以求解出整个流场中的比内能 $E(h, J)$.

至此, 利用第一条路径线上各个拉格朗日位置处的应力为零这一初始条件, 根据动量守恒方程 (1) 逐步求解出下一条路径线上各个拉格朗日位置处的应力, 从而最终求解出整个流场中的应力. 所提出的求解方法中无须做任何假定, 因此, 该方法比 Seaman 法的 3 阶导数为零具有更好的计算精度, 且计算过程中只需要涉及物理量的一阶偏导数, 大大降低了试验曲线局部抖动对数据处理结果的敏感性.

3 拉格朗日分析方法实例

根据上述提出的沿时间逐步求解应力的计算方法, 这里对具体的一组实验数据进行分析. 实验数据通过直径为 100 mm 一级气体炮实验得到. 实验装置如图 2 所示, 图中飞片与靶板试件均为混凝土材料, 飞片安装在弹丸的端部, 飞片直径为 98.0 mm, 厚度为 6.0 mm, 靶板试件直径为 98.0 mm, 厚度为 12.0 mm. 在靶板试件中, 大约每间隔为 3.2 mm 位置处设置一粒子速度计来测量该位置处的速度波形, 试验中一共设置测量了 4 个位置的粒子速度波形. 具体实验的靶板安装如图 3 所示.

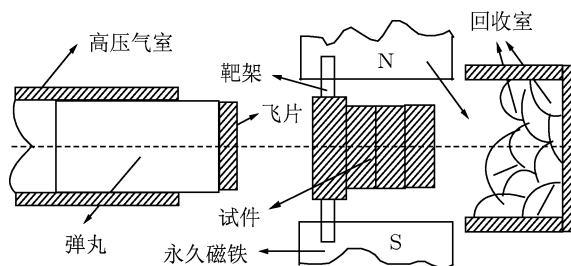


图 2 轻气炮实验装置及测试系统示意图

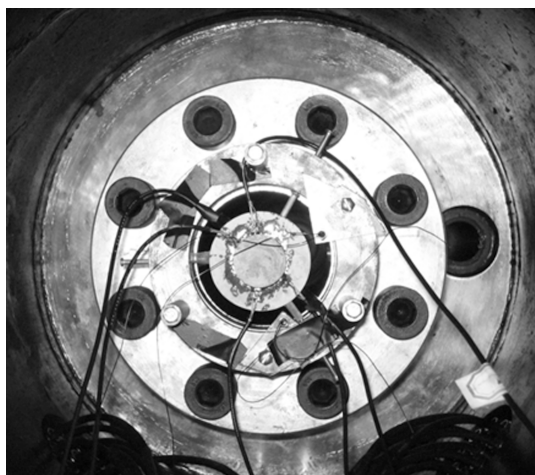


图3 实验靶板实物图

图4为通过一组粒子速度计测量到的各个拉格朗日位置(分别为0, 3.2, 6.4和9.6 mm)处的粒子速度历程, 四个拉格朗日位置的粒子速度波形在图中分别用 g1, g2, g3, g4 表示.

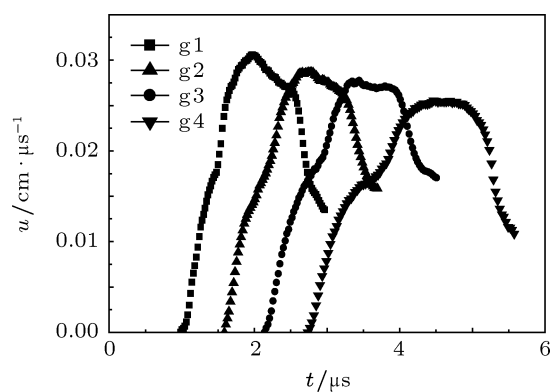


图4 粒子速度历程

将试验测得的粒子速度作为初始输入量, 利用上述方法编制相应的计算程序. 对于路径线的构造, 本文首先将各波形的特征点连成径线, 按照其特征把流场分成弹性区、塑性区、平台区和卸载区. 在各个区域中按照等时间平均划分 100 个间隔, 那么四个区域总共划分 400 个间隔, 相应的数据点为 401 个, 即构造了 401 条路径线. 在构造了路径线以后, 按照本文提出的计算方法进行计算, 分别得到了应力历程、应变历程和比内能历程, 具体如图5—图7所示.

从图5所示的应力历程来看, 同一发试验中的4个拉格朗日位置的峰值应力随位置的增大而减小, 这符合应力波在惰性介质中传播是逐渐衰减

的这一规律. 同时, 从各个拉格朗日位置到达应力峰值所需要的上升时间来看, 随着应力波的传播上升时间明显增大, 这与混凝土材料的黏性本构特性在应力波形上的表现相一致.

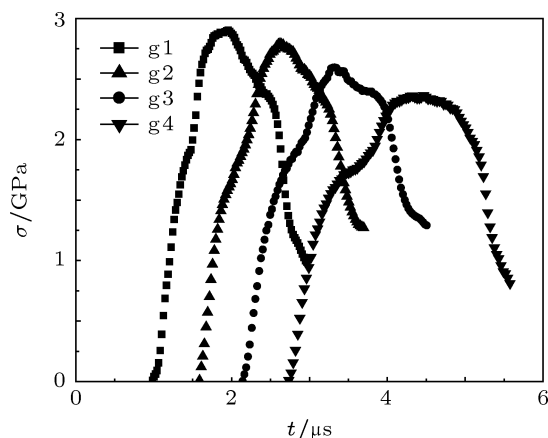


图5 应力历程

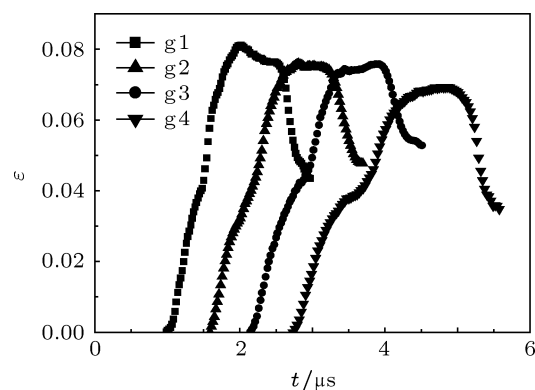


图6 应变历程

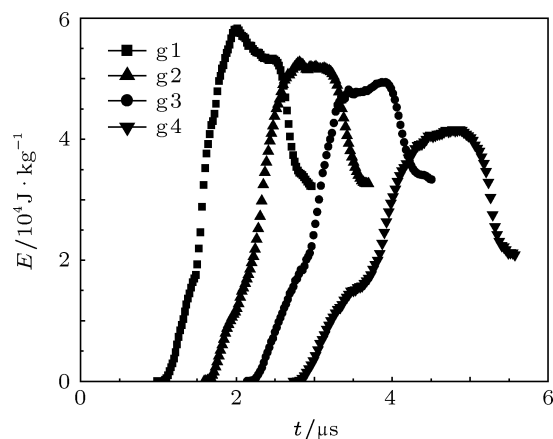


图7 比内能历程

根据应力历程、应变历程即可以得到混凝土材料在冲击加载、卸载过程的应力-应变曲线, 如

图 8 所示, 其应力-应变曲线具有明显的速率相关效应. 从图 8 中还可以看到冲击波卸载后混凝土中存在残余应变.

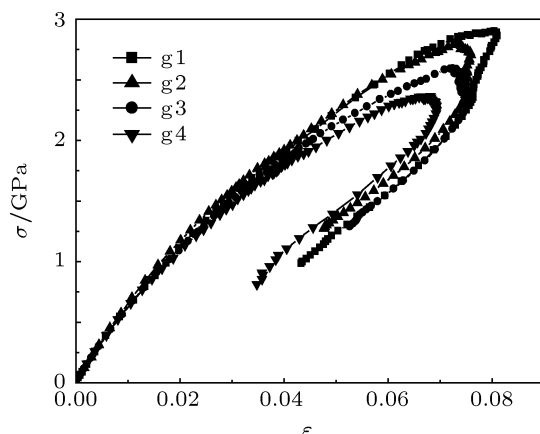


图 8 应力-应变曲线

4 结 论

拉格朗日分析方法是一种研究材料的动态力学性能, 特别是研究材料率型本构关系的常用方法. 在已知粒子速度求解应力时需要一条应力初始条件这一问题, 本文提出了沿时间逐步求解的拉格朗日分析方法, 避免了同一个拉格朗日位置测量两个物理量的问题, 该方法无需做任何假定, 保证了应力计算结果的有效性; 同时, 该方法只需要物理量的一阶导数、偏导数, 大大降低了数据处理结果对试验数据精度的依赖性. 并根据气体炮冲击加载实验, 将混凝土实验测量的粒子速度作为输入量, 计算得到了流场中其他物理量历程 (应力、应变、比内能等), 且所得到的应力波形能够很好地反映应力波在混凝土材料中传播的特性.

- [1] Wang Y G, Zhang Y P, Wang L L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7789 (in Chinese) [王永刚, 张远平, 王礼立 2008 物理学报 **57** 7789]
- [2] Chen D N, Fan C L, Hu J W, Wu S X, Wang H R, Tan H, Yu Y Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2612 (in Chinese) [陈大年, 范春雷, 胡金伟, 吴善幸, 王焕然, 谭华, 俞宇颖 2009 物理学报 **58** 2612]
- [3] Peng J X, Jing F Q, Wang L L, Li D H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2194 (in Chinese) [彭建祥, 经福谦, 王礼立, 李大红 2005 物理学报 **54** 2194]
- [4] Hu J B, Yu Y Y, Dai C D, Tan H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5750 (in Chinese) [胡建波, 俞宇颖, 戴诚达, 谭华 2005 物理学报 **54** 5750]
- [5] Sun C W, Wei Y Z, Zhou Z K 2000 *The Applied Detonation Physics* (Vol. 1) (Beijing: National Defence Industry Press) p348 (in Chinese) [孙承伟, 卫玉章, 周之奎 2000 应用爆轰物理 (第一版) (北京: 国防工业出版社) 第 348 页]
- [6] Fowles R, Williams R F 1970 *J. Appl. Phys.* **41** 360
- [7] Fowles R 1970 *J. Appl. Phys.* **41** 2740
- [8] Cowperthwaite M, Williams R F 1971 *J. Appl. Phys.* **42** 456
- [9] Grady D E 1973 *Geo. Res.* **78** 1299
- [10] Seaman L 1974 *J. Appl. Phys.* **45** 4303
- [11] Li X L 1985 *Explosion and Shock Waves* **5** 46 (in Chinese) [李孝兰 1985 爆炸与冲击 **5** 46]
- [12] Cai H Y, Tang Z P 1990 *J. China Univ. Sci. Technol.* **20** 48 (in Chinese) [柴华友, 唐志平 1990 中国科学技术大学学报 **20** 48]
- [13] Cai H Y, Tang Z P 1992 *Explosion and Shock Waves* **12** 259 (in Chinese) [柴华友, 唐志平 1992 爆炸与冲击 **12** 259]
- [14] Gupta Y M 1984 *Polym. Eng. Sci.* **24** 851
- [15] Forest C A, Wackerle J, Dick J J 1989 *Proc. of 9th Int. Symp. on Detonation* Portland, USA, August 28–September 1, 1989 p683
- [16] Wang L L, Zhu J, Lai H W 2010 *Chinese Journal of High Pressure Physics* **24** 279 (in Chinese) [王礼立, 朱珏, 赖华伟 2010 高压物理学报 **24** 279]
- [17] Wang L L, Zhu J, Lai H 2011 *Strain* **47** 173
- [18] Fowles R 1973 *Dynamic Response of Materials to Intense Impulsive Loading* (1st Ed.) (Ohio: Wright Patterson Air Force Base, Air Force Materials Laboratory) p416

Study on Lagrangian analysis for solving the stress gradually along the time*

Tao Wei-Jun[†] Huan Shi

(Earthquake Engineering Research and Test Center, Guangzhou University, Guangzhou 510405, China)

(Received 14 March 2012; revised manuscript received 16 April 2012)

Abstract

Lagrangian analysis method is re-analyzed, in which by measuring the physical variables of each Lagrangian positions the other physical variables of these positions of the material is analyzed, and then the dynamic mechanical properties of materials can be determined. However, the existing Lagrangian analysis methods are still inadequate when the particle velocity is known. In this paper, a new Lagrangian analysis method, with only particle velocity known, is developed, which is called step by step method along the time. The method does not make any assumption, and it can solve the problem when only particle velocity wave profiles are measured. A set of experimental data of concrete under impact is processed with the method, and the corresponding strain wave, stress wave, and stress-strain relations of the whole process of loading and unloading are calculated. Thus the strain rate dependent elastic-elastic constitutive characteristics of the concrete are revealed.

Keywords: Lagrangian analysis, constitutive relation, stress-strain, concrete

PACS: 07.05.kf, 62.20.F-, 62.50.-p

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972060) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20104410110003).

[†] E-mail: twj2012@hotmail.com