

人工规范势下三阱玻色-爱因斯坦凝聚系统的动力学研究*

王强¹⁾ 叶冲^{2)†}

1) (北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100190)

2) (中国工程物理研究院研究生部, 北京 100088)

(2012 年 3 月 6 日收到; 2012 年 6 月 26 日收到修改稿)

研究了人工规范势下三阱中的冷原子系统. 首先给出了无相互作用的单粒子系统和多粒子系统的能谱性质: 在单粒子系统中, 随着等效磁场的变化, 不同动量的本征态将轮流成为系统的基态; 而对于多粒子系统, 能级则由粒子数布居决定. 在纯量子框架下讨论了系统的动力学演化, 发现在排斥相互作用下隧穿和排斥相互作用比值 r'_* 的从小到大变化可以导致系统从局域到非局域转变, 转变的临界点是 $r'_* = 1$, 以及等效磁场引起的宏观旋转效应. 讨论了无相互作用系统各格点粒子数布居的表述曲线 $(n_2 + n_3) - (n_2 - n_3)$ 的边界效应, 并讨论了相互作用对这一效应的影响.

关键词: 冷原子, 人工规范势, 三阱

PACS: 03.65.Vf, 05.30.Jp, 67.85.-d

1 引言

1995 年玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensate, BEC) 在实验上的实现开启了原子物理学中一个全新的领域. 此后, 大量的工作从各个方面对凝聚体的新奇物理性质展开研究, 如 Landau-Zener 隧穿^[1-3]、Bloch 震荡^[4,5]、Josephson 效应^[6-9]、自囚禁效应^[10]等等. 其中双阱 BEC 系统在实验上和理论上引起很多关注^[8-14], 因为它为研究凝聚态物理中的介观尺度的量子行为提供了实验上可实现的模型, 并且其自身形式简单而又物理丰富. 同样三阱 BEC 系统也引起了关注, 如从 SU(3) 自旋模型的角度^[15], 从介观量子行为的角度^[16]等等. 另一方面, 最近相对于旋转光晶格对相互作用玻色子产生的等效磁场^[17,18], 实验上利用光与原子内态相互作用在中性原子系统可以

产生更大的等效的磁场^[19]. 在合适的晶格结构下, 这样的磁场可使得系统达到量子霍尔效应区域, 从而能在实验上研究拓扑量子计算. 这一突破激发了人们研究人工规范势下的冷原子系统的热情. 然而, 等效磁场中的三阱 BEC 系统还没有被研究过, 因此本文中引入这样的模型, 研究它的能谱和动力学性质. 我们发现这个系统也存在和双阱情况下类似的自囚禁现象, 并且由于磁场的调制, 它的能谱和动力学演化呈现出一些新颖的现象.

2 模型

三角格子的光晶格可以由一个平面内三个相互夹角为 120° 的驻波场形成. 这里用如 (1) 式所示的势场叠加得到如图 1 所示的三阱.

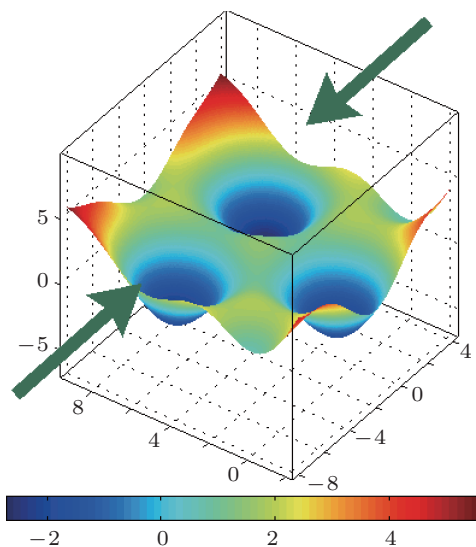
$$V = -V_0 (\cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}))$$

* 国家重点基础研究项目特别基金 (批准号: 2011CB921502, 2012CB821305, 2009CB930701, 2010CB922904)、国家自然科学基金 (批准号: 10934010, 60978019) 和国家自然科学基金委员会与香港研究资助局联合科研基金 (批准号: 11061160490, 1386-N-HKU748/10) 资助的课题.

† E-mail: yechong1987@gmail.com

$$+ \cos(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r})) + V_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^4 - V_2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2, \quad (1)$$

其中驻波场和二次、四次势能的强度 V_0, V_1, V_2 大于零, $\mathbf{r}_0$ 是环形势的中心, 我们令它位于



三角格子中的三个格点的中心, 波矢为 $\mathbf{k}_1(1, 0)$, $\mathbf{k}_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\mathbf{k}_3\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

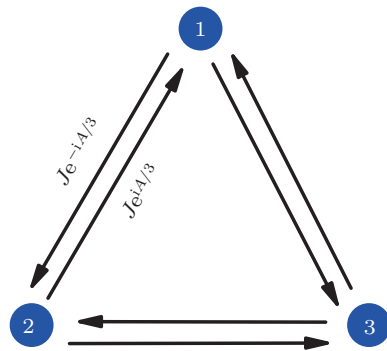


图1 实验及模型示意图

可以把冷原子在这三个势阱里面的运动等效成粒子在格点上的运动^[16,20]. 另外再利用激光与原子的相互作用产生对中性原子的等效的磁场^[19]. 这样的系统可以用下面的哈密顿量描述

$$H = -J \left[e^{iA/3} (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1) + e^{-iA/3} (a_2^\dagger a_1 + a_3^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_3) \right] + \frac{U_0}{2} \sum_{i=1}^3 n_i (n_i - 1), \quad (2)$$

其中 $a_i(a_i^\dagger)$ 是格点 i 上的玻色子湮灭(产生)算符; J 是格点之间隧穿几率; 粒子跃迁时会因为等效磁场的存在而给波函数带来依赖跃迁方向的相位, 这里我们取特殊规范使相邻跃迁产生的等效相位相等, 都是 $A/3$; U_0 是两个粒子处于同一个格点时的相互作用. $N = \sum_{i=1}^3 a_i^\dagger a_i$ 是总粒子数. Hilbert 空间维度是 $\text{Dim} = C_{N+2}^2 = (N+1)(N+2)/2$, 对于粒子数在 100 左右的情况, 可以直接对角化哈密顿量, 得到想知道的性质. 另外, 定义 Fourier 变换 $a_m = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k a_k e^{ikr_m}$, $r_{i+1} = r_i + r_0$, $L = 3$ 是格点数, $k = 0, \pm 2\pi/3$ (本文中令 $\alpha = 0, \beta = 2\pi/3$,

$\gamma = -2\pi/3$). 则哈密顿量可以写成

$$H = H_0 + H_I, \\ H_0 = \sum_k -2J \cos\left(\frac{A}{3} + k\right) a_k^\dagger a_k, \\ H_I = \frac{U_0}{2} \frac{1}{3} \sum_{k,k',q} a_{k+q}^\dagger a_{k'-q}^\dagger a_k a_{k'}. \quad (3)$$

3 计算结果

3.1 能谱

在无相互作用的情况下, $H = H_0$, 问题化简为单体问题. 系统的能谱由 $H = H_0 = \sum_k -2J \cos\left(\frac{A}{3} + k\right) a_k^\dagger a_k$ 决定. $N = 1$ 系统有三个能级 $-2J \cos\left(\frac{A}{3} + k\right)$, $k = 0, \pm \frac{2\pi}{3}$. A 对此能谱有调制作用. $A = 0$ 的时候, 基态为 $a_\alpha^\dagger |\text{vac}\rangle$, $|\text{vac}\rangle$ 是真空态. 在实空间基态写为 $\frac{1}{\sqrt{3}} (a_1^\dagger + a_2^\dagger + a_3^\dagger) |\text{vac}\rangle$, 此时本征态 $a_\beta^\dagger |\text{vac}\rangle$, $a_\gamma^\dagger |\text{vac}\rangle$ 是简并的. 随着 A 的增加, 动量 α 的态的能量将上升, 动量 γ 的态的能量将下降, 在 $A = \pi$

的时候这两个态的能量简并. 当 $\pi < A < 3\pi$ 的时候态 γ 将成为系统基态. 如此, 随着 A 的变化, 不同动量的态将轮流具有最低能量而成为基态, 如图 2 所示. 系统随 A 的周期为 6π . 在 $A = (2n+1)\pi$ 的时候, 基态是简并的.

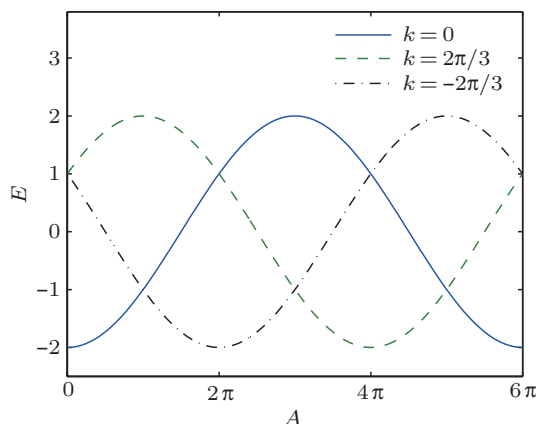


图 2 在无相互作用的时候的单粒子能谱, 取 $J=1$ 当 A 变化时不同动量的态将轮流成为基态

如果系统里面俘获了多个粒子, 能谱可以由单粒子能谱叠加得到. 本征态可以写为 $|n_\alpha, n_\beta, n_\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_\alpha!n_\beta!n_\gamma!}} (a_\alpha^\dagger)^{n_\alpha} (a_\beta^\dagger)^{n_\beta} (a_\gamma^\dagger)^{n_\gamma} |\text{vac}\rangle$, 非负整数 $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma = N - n_\alpha - n_\beta$ 是动量态 α, β, γ 上的粒子数布居. $|n_\alpha, n_\beta, n_\gamma\rangle$ 有 $\text{Dim} = (N+1)(N+2)/2$ 个取值, 即系统能谱有 Dim 个能级, 如图 3 所示. 在零温的时候, 所有的粒子都布居在基态上, 每个格点上的平均粒子数为 $N/3$, 当 $A = (2n+1)\pi$ 时, 基态是 $N+1$ 重简并的.

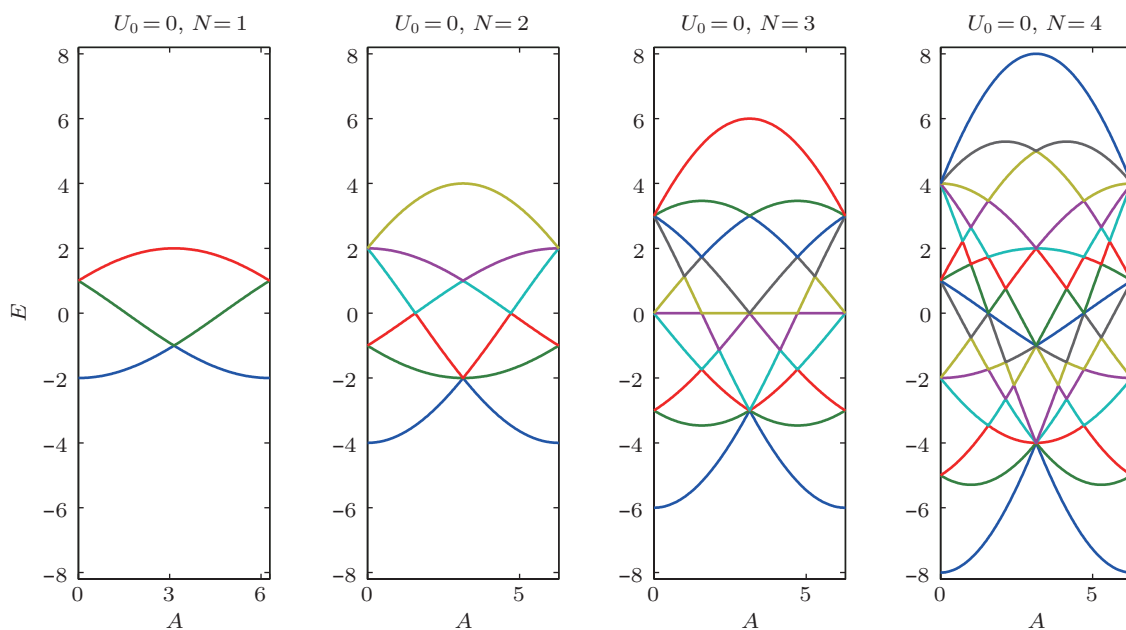


图 3 在无相互作用的时候的多粒子能谱, 能级由粒子数布居决定, $E = \sum_k -2J \cos\left(\frac{A}{3} + k\right) n_k$, 取 $J=1$

由于系统的内部对称性, $A = \pi$ 时的能谱都可以由 $A = 0$ 时的能谱反转再平移得到. 对于多粒子系统, 随着 A 的变化, 能谱的简并情况不断在改变. 下面我们讨论 $0 < A < \pi$ 的情况. 令 $J=1$, 单粒子能级 $E_k = -2 \cos\left(\frac{A}{3} + k\right)$. 多粒子态 $|n_\alpha, n_\beta, n_\gamma\rangle$ 的能量为 $E_{n_\alpha, n_\beta, n_\gamma} = E_\gamma N + E_{\alpha\gamma} n_\alpha + E_{\beta\gamma} n_\beta$, 其中 $E_{\alpha\gamma} = E_\alpha - E_\gamma = -3 \cos \frac{A}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{A}{3}$, $E_{\beta\gamma} = E_\beta - E_\gamma = 2\sqrt{3} \sin \frac{A}{3}$. 定义 $\Gamma \equiv \frac{E_{\beta\gamma}}{E_{\alpha\gamma}} = \frac{2\sqrt{3} \sin \frac{A}{3}}{-3 \cos \frac{A}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{A}{3}}$. 假设两个态 $|n_\alpha, n_\beta, n_\gamma\rangle$ 和 $|n'_\alpha, n'_\beta, n'_\gamma\rangle$ 具有相同的能量,

$$\begin{aligned} E_\gamma N + E_{\alpha\gamma} n_\alpha + E_{\beta\gamma} n_\beta &= E_\gamma N + E_{\alpha\gamma} n'_\alpha + E_{\beta\gamma} n'_\beta, \\ E_{\alpha\gamma} \Delta n_\alpha &= -E_{\beta\gamma} \Delta n_\beta, \\ \frac{\Delta n_\alpha}{\Delta n_\beta} &= -\Gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

如果 Γ 是有理数, 当 N 足够大的时候, 一定存在合适的 $|n_\alpha, n_\beta, n_\gamma\rangle$ 和 $|n'_\alpha, n'_\beta, n'_\gamma\rangle$ 使得 (4) 式有解, 即存在简并的态.

以上我们讨论的都是无相互作用情况下, 即 $U_0 = 0$ 时的能谱. 在 $U_0 \neq 0$ 时, 动量 k 不再是好量子数, 问题成为多体问题. 相互作用会使得一些简并打开, 影响能谱的统计性质. 我们常用量子系统能级的统计来研究与量子混沌相关的问题.

3.2 动力学性质

对于双势阱中的凝聚体的研究已经很多, 其宏观量子隧穿现象如约瑟夫森效应, 相互作用导致的自囚禁效应等^[10]. 由于磁场和相互作用的调制, 三阱 BEC 系统也有丰富的动力学性质值得我们研究. 在文献 [15] 中, 利用半经典的方法研究了无磁场、吸引相互作用情况下的动力学行为. 利用 Schwinger 玻色子表述, 三模玻色子模型 (2) 可以映射到一个 SU (3) 自旋模型. SU (3) 群的群生成元 $\{X_k, Y_k, Z_k\}$ 定义为

$$X_1 = a_2^\dagger a_2 - a_3^\dagger a_3, \quad (5a)$$

$$Y_k = i(a_k^\dagger a_j - a_j^\dagger a_k), \quad (5b)$$

$$X_2 = \frac{1}{3}(a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3 - 2a_1^\dagger a_1), \quad (5c)$$

$$Z_k = (a_k^\dagger a_j + a_j^\dagger a_k). \quad (5d)$$

与 $k = 1, 2, 3$, 对应的 $j = 2, 3, 1$. $Y_1 + Y_2 + Y_3$ 是角动量. $Y_1 = i(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1)$, $Y_2 = i(a_2^\dagger a_3 - a_3^\dagger a_2)$, $Y_3 = i(a_3^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_3)$, 文献 [15] 得到了局域化的临界值 $r_* \equiv J/(N|U_0|) = 1/3$. 当 $r < r_*$, 即吸引相互作用强度比较大的时候, 粒子会趋向于局域. 这里我们在全量子的框架下, 研究排斥相互作用下有磁场存在的情况.

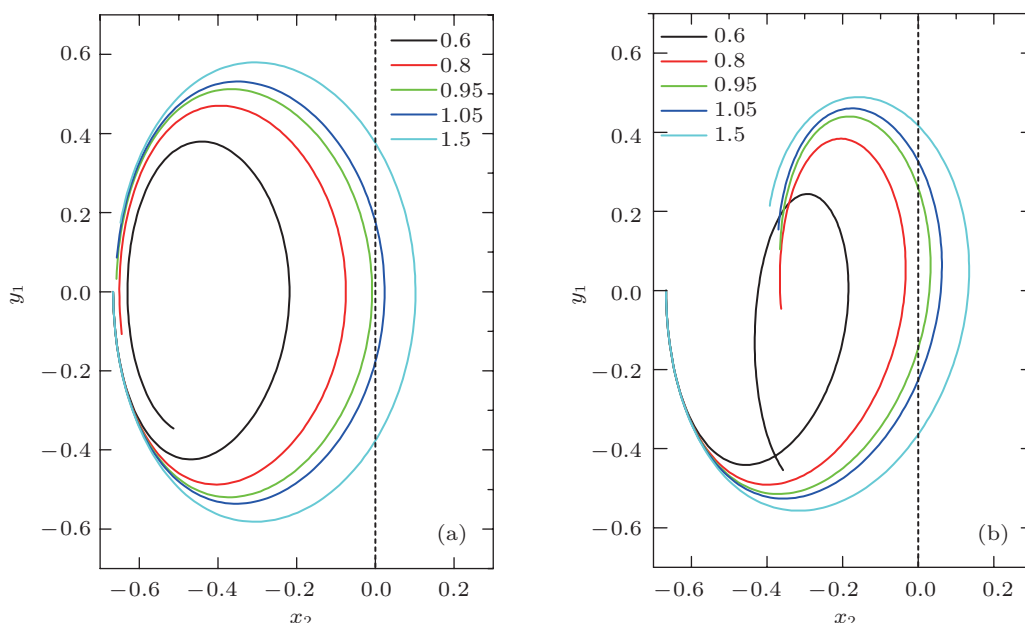


图4 $N = 30$, $|\psi(0)\rangle = |30, 0, 0\rangle$, 不同颜色的曲线代表不同的 r' (a) $A = 0$, 临界点 $r'_* = 1$; (b) $A = 0.6\pi$, 临界点 $\sim r'_* < 1$

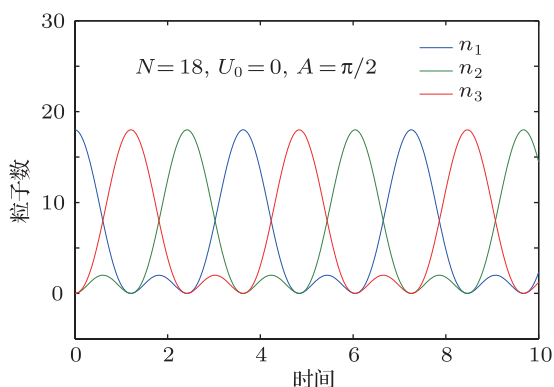


图5 $N = 18$, $|\psi(0)\rangle = |18, 0, 0\rangle$, 在 $A = \frac{\pi}{2}$, $U_0 = 0$ 时, 可以看到宏观的旋转效应, 此时 $\Gamma = -1$, 系统只有两个特征频率

初始波函数 $|\psi(0)\rangle$, 经过时间 t 的演化后系

统的波函数为 $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$. 设初始时刻把粒子都放在格点 (1) 上. $|\psi(0)\rangle = |N, 0, 0\rangle$. 在 $U_0 = 0$ 时, 多粒子系统的演化与单粒子系统的相同. 我们可以解析地得到粒子数分布随时间的演化.

$$\frac{n_1(t)}{N} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} [\cos(\omega_{12}t) + \cos(\omega_{13}t) + \cos(\omega_{23}t)], \quad (6a)$$

$$\frac{n_2(t)}{N} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \left[\cos\left(\omega_{12}t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega_{13}t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega_{23}t + \frac{2\pi}{3}\right) \right], \quad (6b)$$

$$\frac{n_3(t)}{N} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \left[\cos\left(\omega_{12}t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega_{13}t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega_{23}t - \frac{2\pi}{3}\right) \right], \quad (6c)$$

$$\omega_{ij} = E_i - E_j. \quad (6d)$$

对于排斥相互作用, 定义 $r' \equiv J/(NU_0)$. 为了考察系统随时间的演化, 计算平均值 $x_2 \equiv \langle X_2 \rangle/N$ 和 $y_1 \equiv \langle Y_1 \rangle/N$. 取有限的粒子数 $N = 30$, 对于无磁场和有磁场的情况, 在图 4 中给出系统短时间内在相空间 y_1-x_2 中的轨迹. 如图 4(a), 对于无磁场情况, 我们可以得出临界点为 $r'_* = 1$, 即

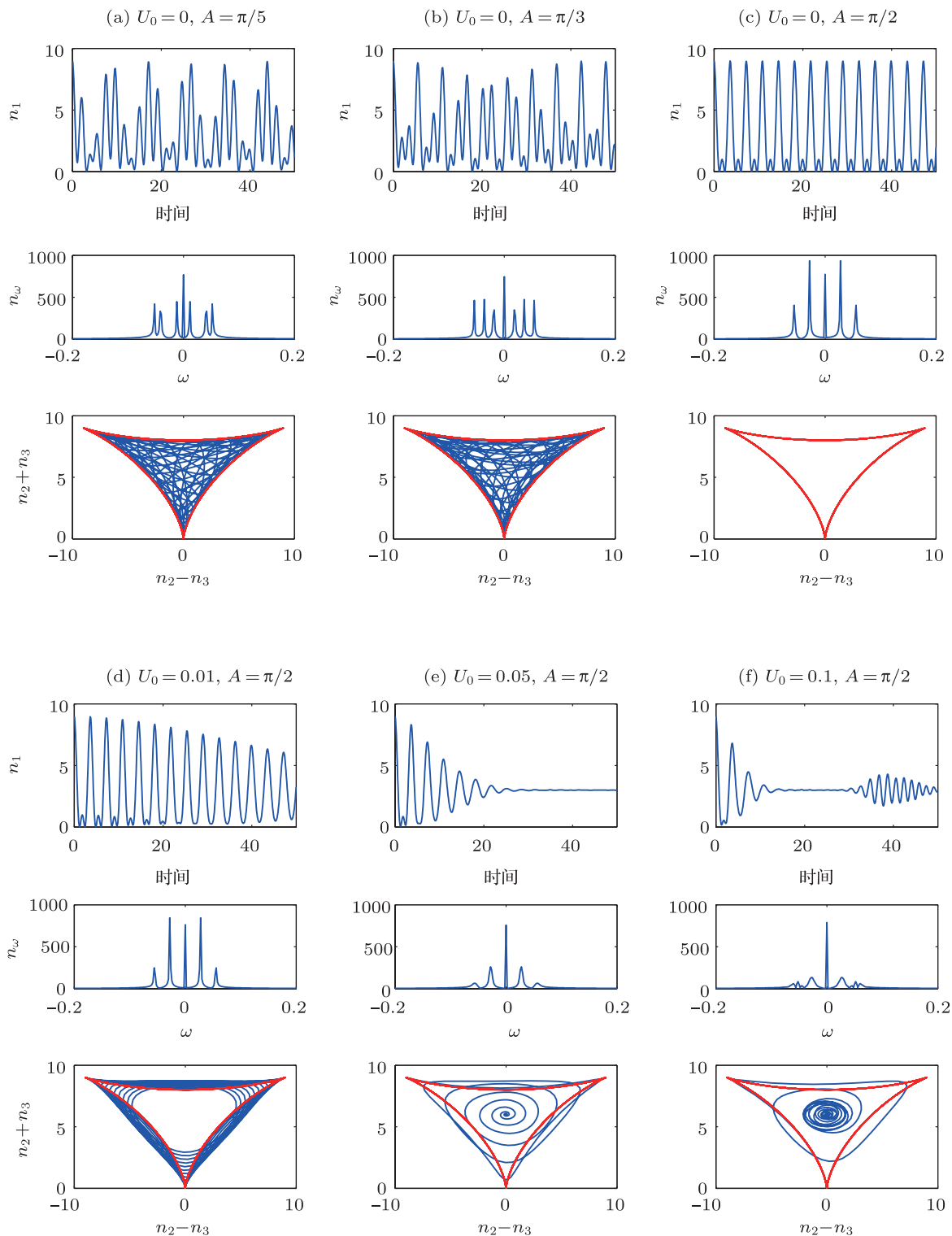


图 6 $N = 9$, $\psi(0) = |9, 0, 0\rangle$, 在 $U_0 = 0$ 的时候, 系统的演化由 (6) 式决定, $(n_2 + n_3)-(n_2 - n_3)$ 的曲线存在边界, 即红色曲线; 在 $U_0 \neq 0$ 的时候, 系统的演化突破了这个边界的限制

当 $J/(NU_0) < 1$ 时, 系统将始终处在相平面的左半边, 保持 $\langle x_2(t) \rangle < 0$, 这说明足够大的相互作用能够使粒子局域化; 当 $J/(NU_0) > 1$ 时, 系统可以到达相平面的右边, 即相互作用比较小的时候, 系统去局域化. 另一方面, 在存在磁场的情况下, 如图 4(b), 临界点的值 $r'_* < 1$. 即磁场增强了粒子的巡游性. 在没有磁场的情况下, 由于对称性, $Y_1 = -Y_3$, $Y_2 = 0$, 角动量 $Y_1 + Y_2 + Y_3$ 为零. 在有磁场时角动量不再保持为零.

在取参数 $A = \pi/2$, $U = 0$ 的情况下, 粒子数分布的最大值 $n_{\max} = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ 将按一定的顺序轮流到达各个格点. 磁场诱发了粒子在三阱之中旋转, 可以看到宏观的旋转效应, 如图 5 所示.

下面我们从另一个角度来看. 取粒子数 $N = 9$, 初态为 $\psi(0) = |9, 0, 0\rangle$. 在图 6 中给出了 $n_1(t)$. 为了更清楚地显示 $n_1(t)$ 的含时特征, 对 $n_1(t)$ 做离散的 Fourier 变换, 得到不同频率的幅度 n_ω , n_ω 依赖于能谱. 零频表示 $n_1(t)$ 整体对零的偏移. 我们关心的是 $n_{\omega \neq 0}$, 所以, 在做 Fourier 变换前, 先对 $n_1(t)$ 整体平移以减小 $n_{\omega=0}$. 在 $U_0 = 0$ 时, $n_1(t)$ 呈现明显的周期性. 一般情况下 n_ω 只有三个非零值. 随着 A 的调制, 单粒子能谱允

许的能级差可能会出现简并, 比如在 $A = \pi/2$ 时, 能级差只有两个取值, 这时 n_ω 也只有两个取值. 我们还给出 $(n_2 + n_3) - (n_2 - n_3)$ 的曲线. 由 (6) 式知道, $A = \pi/2$, $U_0 = 0$ 时, $n_2 + n_3 = \frac{2N}{3} - \frac{2N}{9} [2 \cos(\omega_{12}t) + \cos(2\omega_{12}t)]$, $n_2 - n_3 = \frac{2\sqrt{3}N}{9} [-2 \sin(\omega_{12}t) + \sin(2\omega_{12}t)]$, 即图中红色曲线, 并且可以证明此红线就是 $A \neq \pi/2$ 情况时曲线的边界. 关于这个现象我们将在其他文章中讨论. 在 $U_0 \neq 0$ 时, 因为系统的能谱成为粒子数依赖的, 所以 n_ω 有多个取值, 并且依赖于粒子数. 如图 6 所示, $n_1(t)$ 也变得不再规律, 出现量子拍. 这时候的 $(n_2 + n_3) - (n_2 - n_3)$ 曲线将不再束缚在 $A = \pi/2$ 时的边界之内了.

4 结 论

本文从能谱和纯量子动力学分析两方面研究了虚拟磁场中的三阱系统. 给出了无相互作用下等效相位 A 对单粒子系统基态的调制和粒子数布居对多粒子系统的影响. 另外研究了系统的动力学性质, 观察到了自囚禁现象、宏观旋转效应. 最后还提出了三阱系统的动力学演化的边界问题.

-
- [1] Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023402
 - [2] Liu J, Fu L B, Ou B Y, Chen S G, Dae-II Choi, Wu B, Niu Q 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023404
 - [3] Wang G F, Liu B, Fu L B, Zhao H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3733 (in Chinese) [王冠芳, 刘彬, 傅立斌, 赵鸿 2007 物理学报 **56** 3733]
 - [4] Anderson B P, Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
 - [5] Bronski J C, Carr L D, Deconinck B, Kutz J N 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 1402
 - [6] Raghavan S, Smerzi A, Fantoni S, Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620
 - [7] Albiez M, Gati R, Fölling J, Hunsmann S, Cristiani M, Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
 - [8] Levy S, Lahoud E, Shoroni I, Steinhauer J 2007 *Nature* **449** 579
 - [9] Gati R, Oberthaler M K 2007 *J. Phys. B* **40** R61
 - [10] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S, Shenoy S R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950
 - [11] Milburn G J, Corneey J, Wright E M, Walls D F 1997 *Phys. Rev. A* **55** 4318
 - [12] Shin Y, Saba M, Pasquini T A, Ketterle W, Pritchard D E, Leharhardt A E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 050405
 - [13] Weiss C, Teichmann N 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 140408
 - [14] Qiu H B, Tian J, Fu L B 2010 *Phys. Rev. A* **81** 043613
 - [15] Nemoto K, Holmes C A, Milburn G J, Munro W J 2000 *Phys. Rev. A* **63** 013604
 - [16] Lahaye T, Pfau T, Santos L 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 170404
 - [17] Tung S, Schweikhard V, Cornell E A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 240402
 - [18] Williams R A, Al-Assam S, Foot C J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 050404
 - [19] Lin Y J, Compton R L, Jimenez-Garcia K, Porto J V, Spielman I B 2009 *Nature* **462** 628
 - [20] Wright E, Eilbeck J C, Hays M H, Miller P D, Scott A C 1993 *Physica D* **65** 18

Dynamics of Bose-Einstein condensate trapped in a triple-well with synthetic gauge field*

Wang Qiang¹⁾ Ye Chong²⁾†

1) (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

2) (*National Laboratory of Science and Technology on Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*)

(Received 6 March 2012; revised manuscript received 26 June 2012)

Abstract

We study bosonic atoms trapped in a triple-well with synthetic gauge field. The energy spectrum of the system can be tuned by an effective magnetic field. For a non-interacting system, eigen-states with different momenta will be the ground state with the magnetic field varying. In the full quantum scheme, we find the critical ratio between the tunneling and interaction strength for localization of system under the repulsive interaction. We also discuss the macro-rotation effect induced by the magnetic field and the boundary effect of the temporal evolution for a non-interacting system.

Keywords: bosonic atoms, synthetic gauge field, triple-well potential

PACS: 03.65.Vf, 05.30.Jp, 67.85.-d

* Project supported by the National Key Basic Research Special Foundation of China (Grants Nos. 2011CB921502, 2012CB821305, 2009CB930701, 2010CB922904), the National Natural Science Foundation of China (Grants Nos. 10934010, 60978019), and the National Natural Science Foundation of China/Research Grant Council (RGC) Joint Research Scheme of Hong Kong (Grants Nos. 11061160490, 1386-N-HKU748/10).

† E-mail: yechong1987@gmail.com