

基于节点负荷失效的网络可控性研究*

肖延东[†] 老松杨 侯绿林 白亮

(国防科技大学信息系统与管理学院, 长沙 410073)

(2013年3月19日收到; 2013年6月3日收到修改稿)

Liu 和 Barabasi 将现代控制理论应用到线性系统的网络可控性问题上, 提出了最小驱动节点集的计算方法, 解决了复杂网络控制的可计算问题. 针对现实网络中存在的节点因负荷过载而失效的问题, 本文提出了基于节点负荷失效的网络可控性模型. 通过对网络采用介数和 Weibull 失效模型, 在随机和目标失效机制下进行仿真, 研究结果表明: 维持无标度网络可控性的难度要明显大于随机网络; 在目标节点失效机制下, 即使对网络输入极少的失效信号, 也能极大地破坏网络的可控性; 使高介数节点失效要比使度高节点失效更能破坏网络的可控性, 说明高介数节点在维持网络可控性上发挥着重要作用; 对不同的负荷失效模型, 要合理采取措施, 防止网络发生阶跃性全不可控现象.

关键词: 网络可控性, 结构可控性, 节点失效

PACS: 02.30.Yy, 89.75.Fb, 89.75.Hc

DOI: 10.7498/aps.62.180201

1 引言

近十年来, 随着复杂网络理论研究的兴起, 吸引了来自社会学、物理学、生物学和工程应用等诸多领域的关注和研究, 使得网络科学迎来了蓬勃的发展. 人类对未知领域的探索, 特别像基因调控网络、蛋白质作用网络这种复杂巨系统, 复杂网络为人们提供了一种描述系统组元和组元之间关系的工具, 通过对网络演化模型的探索来加强对复杂系统认识的深度, 继而掌握复杂系统的控制方法, 最终能够控制复杂系统朝着人们期望的方向发展. 因此, 研究复杂网络的控制技术在近年来越来越受关注^[1-6]. 牵制控制^[2]是复杂网络控制技术的代表. 牵制的思想是在网络中选取若干节点输入控制信号, 以驱动网络达到控制的目标. 网络控制技术的核心在于解决可行性和有效性两个问题: 可行性是研究一个网络到底能不能被控制; 有效性则回答了最少需要输入多少信号, 网络才能达到全局可控. 但是系统地将现代控制理论的方法和原理应用到网络科学上, 建立复杂网络的控制理论仍是一个难题.

2011 年 Nature 杂志上发表了一篇关于复杂网络可控性 (network controllability, NC) 的文章, 作为一项开拓性的工作, 迅速引起了人们的关注和研究. Liu 和 Barabasi^[3]利用线性系统的控制理论建立了复杂网络的可控性模型 (network controllability model, NCM), 提出了计算任意拓扑结构网络的最小驱动节点集的方法. 网络的可控性就是控制网络所需最少的驱动节点是多少. NCM 针对线性时不变系统, 解析的推导出: 1) 最小驱动节点集与网络的度分布有关. 对随机网络, $n_D \sim e^{-\langle k \rangle / 2}$, 对无标度网络, $n_D \sim \exp \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma - 1} \right) \langle k \rangle \right]$; 2) 网络中驱动节点往往趋向于避开度较高的节点. 这个结论颠覆了传统的研究结论^[7]——认为只要控制网络中有影响力的节点就可以控制网络的状态, 而网络中有影响力的节点往往是度较高的节点.

NCM 的研究对象是线性时不变系统, 假设网络中的节点只要接收到从外部输入的控制信号就转发给邻居节点. 但是真实网络中却存在着阻断信号传播的节点, 如传染病网络中的免疫节点不能传播其接收到的病毒信号, 通信或电力网络中由于过载而造成的节点失效也不能传输信号. 文献 [8] 研

* 国家自然科学基金 (批准号: 60902094) 和全军军事学研究生课题 (批准号: 2010JY0072-046) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: xiaoyandong08@gmail.com

究了在传播免疫过程中的可控性问题, 而免疫过程与节点失效不同, 必然对网络的可控性造成不同的影响. 因此, 本文研究网络中因节点过载而失效后网络可控性的变化情况.

2 线性系统的网络可控性

如果要控制一个网络朝着期望的状态发展, 就要能控制网络中所有节点的状态, 需要对某些节点输入外加的信号. 输入的信号称为控制信号. 需要输入控制信号的节点称为驱动节点. 对最少的驱动节点输入控制信号就能使网络完全可控的集合称为最小驱动节点集. 求解出最小驱动节点集就解决了网络控制中最关心的可行性和有效性的问题. NCM 提出了一种通过结构可控性定理^[9] (Lin's structural controllability theorem) 和最小输入定理^[3] (minimum inputs theorem) 求解最小驱动节点集的方法.

2.1 结构可控性判据

对于线性时不变系统, 其动力学方程描述为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$ 表示 t 时刻网络中节点的状态, $\mathbf{A}$ 为网络节点的邻接关系矩阵, $\mathbf{B}$ 为控制信号与节点的连接关系矩阵, $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t))^T$ 表示 t 时刻输入的控制信号的状态. 结构可控性判据就是判断一个线性时不变系统的结构可控性.

定理 1 结构可控性定理. 下列条件是等价的:

- 1) 一个线性系统 $G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是结构可控的;
- 2) i) $G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 中不包含不可达 (inaccessibility) 节点; ii) $G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 中不包含膨胀 (dilation) 结构;
- 3) $G(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 由 cacti 结构生成.

不可达节点是指外部输入的信号无法通过有向路径到达的节点. 如果 $\mathbf{A}$ 的一个子集 S , 使得 $|T(S)| < |S|$, 则认为 $\mathbf{A}$ 包含一个膨胀, $T(S)$ 是子集 S 的邻居集合. cacti 是既不含不可达节点又不含膨胀的网络结构, 若去除其中任意一条边将会导致不可达节点或膨胀的出现.

结构可控性定理说明, 如果网络中存在不可达的节点, 由于这些节点不能接收控制信号导致节点状态不能被外部输入的信号所影响, 那么整个网络

就不是结构可控的. 此外, 如果一个网络有膨胀结构, 系统也是结构不可控的. 比如在一个有向星形网络中, 中央父节点指向许多的叶节点构成了一个膨胀结构, 如果仅仅控制中央节点, 由于不能独立地控制任何两个有差异的叶节点的状态变量, 所以系统是可控的. 总而言之, 为了充分控制网络中所有节点, 则要删除所有的膨胀结构以及孤立的不可达节点. 如果网络中存在这样的结构, 则要对部分节点输入控制信号. NCM 将网络可控性的求解转化成了根据结构可控性定理求解网络的结构可控性问题.

2.2 最小驱动节点集求解

求解最小驱动节点集, 在 NCM 中已经被证明——根据最小输入定理, 网络的结构可控性问题可以转化成研究有向图的最大匹配问题^[10].

定理 2 最小输入定理. 网络的最小输入集 (N_I) 等价于最小驱动节点集 (N_D). 如果网络是完美匹配, 最小输入集是网络中的任意一个节点; 否则, 它等于网络最大匹配后未被匹配的节点集. 定理 2 可用 (2) 式表示:

$$|N_I| = |N_D| = \max\{1, N - |M^*|\}, \quad (2)$$

$|M^*|$ 为有向网中最大匹配的节点数目.

求解有向图的最大匹配, 首先要将有向图转化成二部图. 考虑一个有向图 $G(\mathbf{A})$, 与它对应的二部图为 $H(\mathbf{A}) = (V_A^+, V_A^-, \Gamma)$. V_A^+ 和 V_A^- 是二部图的两个点集, $V_A^+ = \{x_1^+, x_2^+, \dots, x_N^+\}$, $V_A^- = \{x_1^-, x_2^-, \dots, x_N^-\}$. Γ 是它的边集, $\Gamma = \{(x_i^+, x_j^-) | a_{ij} \neq 0\}$, 如果在 $G(\mathbf{A})$ 中节点 i 有边指向 j , 则在 $H(\mathbf{A})$ 中对应 x_i^+ 到 x_j^- 的有向边. 根据二部图的最大匹配算法, 计算出 $H(\mathbf{A})$ 的最大匹配边. 有最大匹配边指向的节点称为匹配节点, 没有最大匹配边指向的节点称为非匹配节点. 最小输入定理已经证明了网络的最大匹配中非匹配节点就是网络的驱动节点^[3].

综上所述, NCM 的贡献就是解决了网络结构可控性的可计算问题. NCM 根据结构可控性定理将网络可控性问题转化为求解网络的结构可控性, 一般认为一个网络如果是结构可控的, 那么这个网络就是可控的. 而网络的结构可控性问题依据最小输入定理又被证明是一个有向图的最大匹配问题. 图 1 示出了网络可控性的求解框架.

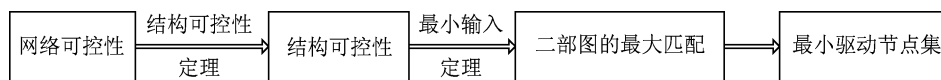


图1 Liu 和 Barabasi 提出的网络可控性求解框架

3 基于节点失效的网络可控性模型

在城市交通网、电力网、Internet 等真实网络中, 节点常常会出现因为负荷过载而失效的现象. 针对这种网络中出现的失效现象, 在复杂网络的可控性问题中引入失效节点的概念, 研究和完善网络的可控性模型.

3.1 节点失效的网络可控性模型

文献 [8] 通过去除特定节点出边的方法阻断网络中信号传播, 研究了传播免疫过程中网络的线性系统可控性问题. 这种方法避免了信号因一定概率被转发, 引起的不确定性不满足线性系统的可叠加性. 为此我们仍采用文献 [8] 的控制信号的定义, 但重新定义了节点失效信号.

定义 1 若信号对于网络中任意节点一旦接收即可转发, 则称为控制信号, 记为 $\mathbf{u}^+(t) = (u_1^+(t), u_2^+(t), \dots, u_M^+(t))^T$. $u_1^+(t), u_2^+(t), \dots, u_M^+(t)$ 是对 N 个节点中的 M 个节点输入的控制信号, 这些被输入控制信号的节点称为驱动节点, 节点集记为 N_D , 驱动节点的比例 $n_D = N_D/N$.

定义 2 对网络中的节点施加信号之后, 造成节点的负荷超过其容量 (安全阈值) 而导致节点失效, 这类信号称为失效信号, 记为 $\mathbf{u}^-(t) = (u_1^-(t), u_2^-(t), \dots, u_M^-(t))^T$. 失效可以发生在网络中的任意节点上, 但是由于一个节点失效必然影响该节点的局部连接, 引起其余节点负荷或容量变化, 某些节点可能因负荷超出其容量而失效. 这个过程反复进行, 受影响的节点可能逐渐扩散, 从而产生级联失效. 当所有节点的负荷都小于其容量时达到稳定状态. 节点一旦失效会使该节点的边从网络中移除. 由于失效节点已成为不可达节点, 需要对其输入控制信号. 此时为了维持网络的可控性, 需要对网络中的 S 个节点输入控制信号. 这 S 个节点中有 P 个是非失效节点, Q 个失效节点, 控制信号记为 $\mathbf{u}^+(t) = \mathbf{u}_C^+(t) \cup \mathbf{u}_F^+(t) = (u_1^C(t), u_2^C(t), \dots, u_P^C(t))^T \cup (u_1^F(t), u_2^F(t), \dots, u_Q^F(t))^T$.

由于对网络施加了失效信号, 使部分节点发生故障失效从网络中移除, 则这些节点不能再对控制信号进行转发, 相反它们还需要额外输入控制信号,

这就排除了信号因节点转发概率而引起的不确定性 [8], 故此时系统依然是线性系统. 因此, 基于节点失效的线性控制系统的模型可以表示为

$$\mathbf{x}'(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_C^+\mathbf{u}_C^+(t) + \mathbf{B}_F^+\mathbf{u}_F^+(t), \quad (3)$$

$\bar{\mathbf{A}}$ 为输入失效信号网络结构改变后的新邻接矩阵, $\mathbf{B}_C^+$ 为对非失效节点输入的控制信号, $\mathbf{B}_F^+$ 为对失效节点输入的独立控制信号. 失效后的网络依然可以用结构可控性定理判断网络可控的可行性, 用最小输入定理计算网络可控的有效性问题. 图 2 说明了失效节点的可控性问题, 图中网络包含 20 个节点. 图 2(a) 中红色节点为通过 NCM 计算出的驱动节点, 蓝色箭头为输入的控制信号; 图 2(b) 中若对节点 6 输入失效信号, 同时造成了节点 1 和 3 的级联失效; 图 2(c) 中为失效状态稳定后, 网络中驱动节点的分布发生的变化. 假设初始 N 个节点的网络中有 K 个驱动节点, 若对网络中的 M 个节点输入失效信号后, 造成了 $Q(Q \geq M)$ 个节点失效. 失效后由于网络结构发生了变化, 驱动节点重新分布, 此时有 S 个驱动节点, 这些驱动节点中有 P 个是非失效节点, 有 Q 个是失效节点. 定义失效信号输入前后驱动节点的变化比例为

$$\Delta n_D = n_D - n'_D = (S - K)/N, \quad (4)$$

从 Δn_D 的变化上看出在输入失效信号后要维持网络可控的难度有多大. Δn_D 越小, 说明维持可控的难度较小; Δn_D 越大, 说明维持可控的难度较大.

3.2 节点负荷失效模型

负荷 - 容量的节点失效模型最为常见, 也是与实际最为相符的失效模型. 这类模型通常都会赋予网络中每个节点一定的初始负荷和容量 (安全阈值). 当某个节点由于某种原因其负荷超过安全阈值时, 该节点发生故障失效. 它一旦失效必然会影响到该节点局部连接, 引起节点的负荷或容量重新进行分配, 导致某些节点的负荷因超出其安全阈值而失效. 这个过程反复进行, 受影响的节点逐渐扩散发生级联失效, 直至所有节点的负荷都小于其容量而达到稳定状态.

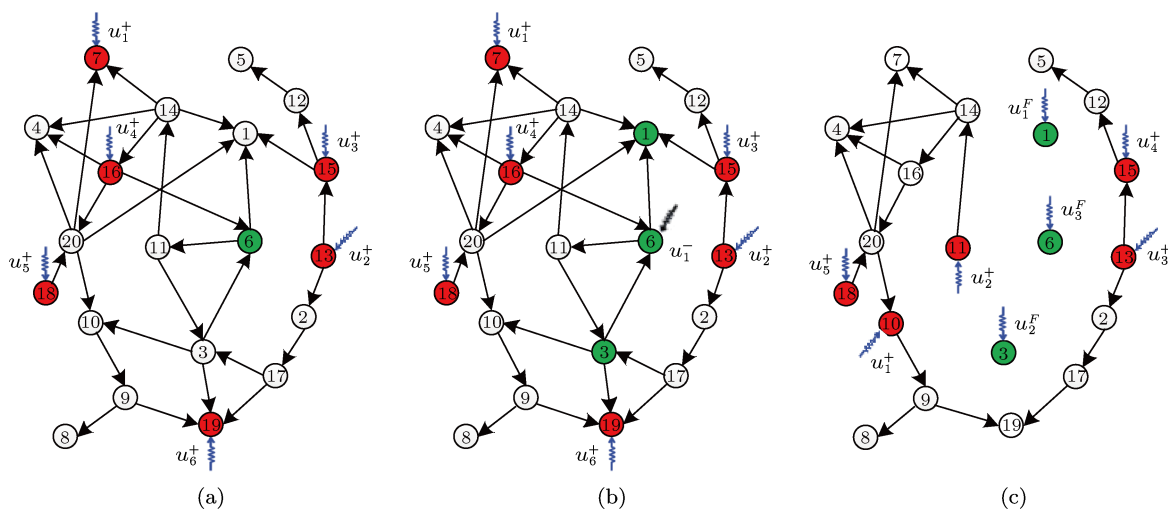


图2 输入失效信号后网络中驱动节点的分布变化 网络中绿色为失效节点, 红色和白色为非失效节点; (a) 初始网络和初始驱动节点分布; (b) 对节点6输入失效信号后造成了节点1和3的级联失效; (c) 失效状态稳定后的驱动节点分布, 失效前 $N_D = K = 6$, 失效后 $N_D = S = 8$. 这8个驱动节点中节点10, 11, 13, 15和18是网络中的非失效节点, 节点1, 3和6是失效节点

3.2.1 介数模型

介数模型是由 Motter^[11,12] 提出, 认为各个节点的负荷由各自的介数^[13] (betweenness centrality, BC) 决定. 假设信息或者能量总是在节点对之间沿着最短路径传输, 节点 i 的介数定义为网络中所有的节点对之间的最短路径中经过节点 i 的路径数量. 因此, 节点 i 在时刻 t 的负荷就是该节点在此刻的介数 $b_i(t)$, 而每个节点的最大安全阈值 C_i 正比于初始负荷, 即

$$C_i = (1 + \alpha)b_i(0) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

其中 α 称为容忍系数, 决定了节点的最大的容量. 当网络中节点发生故障失效从网络中移除后, 可能导致网络中最短路径发生变化使得节点的 BC 改变. 这就造成某些节点因为此时刻的负荷超出其最大容量引发级联失效, 使节点从网络中移除, 直到所有的节点都满足负荷小于最大容量, 网络状态才能稳定下来.

3.2.2 阈值分布模型

阈值分布模型是由 Moreno 等^[14] 提出, 认为初始时刻每个节点被赋予了一个满足 Weibull 分布的安全阈值 $\omega_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 且初始时刻每个节点承担相同的负荷 $\sigma = F/N$, F 为初始时刻整个网络的总负荷. 如果某时刻节点的负荷超过其安全阈值, 即 $\sigma_i(t) > \omega_i$, 节点 i 过载失效从网络中移除, 同时其节点上承担的负荷将被均匀地分配给与它直接相连的邻居节点. 负荷的重新分配可能导致其邻居节点也因过载而相继失效, 依此类推, 直到所有的

节点的负荷小于其安全阈值, 网络状态才能稳定下来. Weibull 分布为

$$P(\omega_i) = 1 - e^{-(\omega_i)^\rho}, \quad (6)$$

ρ 为 Weibull 指数, 控制安全阈值的分布情况, ρ 越大, 阈值分布的跨度越窄, 说明网络更容易因为一个节点的失效而引起其他节点发生大规模的级联失效.

4 实验与分析

4.1 介数实验

介数失效模型的特点是它的初始负荷是节点的介数, 当输入失效信号之后, 节点负荷的变化与网络结构的变化有关, 同时也与容忍系数有关. 因此当我们输入失效信号之后, 驱动节点的变化会因网络结构、容忍系数的差异而不同.

实验 1 NC 随容忍系数和网络平均度的变化情况

图 3 表示了介数失效模型在随机网络 (ER)^[15] 和无标度网络 (SF)^[16] 中因为不同的容忍系数和网络的平均度, 驱动节点增长比例的变化情况. 实验 1 中随机对网络中 10% 的节点输入了失效信号. 在图 3(a) 和 (b) 中, α 较小时, 驱动节点的增长比例很大, 说明网络的容忍系数较低造成了节点的级联失效, 极大地破坏了网络的可控性. 当 $\alpha \geq 1$ 时, 驱动节点的增长逐渐稳定下来, $\Delta n_D \approx 0.1$, 说明网络中的其余节点并没有因为部分节点失效而引起大规模

的级联失效, 这是网络的容忍系数较高, 使得节点的安全阈值变大. 对比图 3(a) 和 (b), 发现当 $\alpha < 1$ 时, ER 网络和 SF 网络在相同容忍系数条件下, 受到失效信号后的网络可控性差异很大. 这是因为网络度分布不同造成的, 当平均度较小时, ER 网络比较稀疏且度分布较为分散, 即使输入失效信号, 节点失效后对网络介数的分布没有太大变化; 而 SF 网络的度分布呈现幂律特性, 即使平均度较小, 输入失效信号后, 节点失效仍会对网络中的介数产生较大影响, 从而 SF 网络在节点失效后, 网络的可控性比 ER 网络更差. 在图 3(c) 和 (d) 中, 当 $\alpha = 0.5$

时, 对于 ER 网络, 随着平均度的增大, 驱动节点的增长也越大, 当平均度增大到一定程度后, 驱动节点的增长在减小; 当 $\langle k \rangle \geq 10$ 时, $\Delta n_D \approx 0.1$, 说明初始 10% 的节点失效没有影响其余节点的介数分布, 避免了发生更大规模的级联失效. 这是因为当网络的平均度增大后, 边的数量增多, 不仅降低了大规模级联失效发生的可能性, 而且网络可控的鲁棒性也随着增强^[17]. 而明显看到 SF 网络需要在更大的平均度下, 其可控性才能抵消失效带来的影响. 实验 1 的结果说明 SF 网络在受到失效信号后, 网络的控制难度要大于 ER 网络.

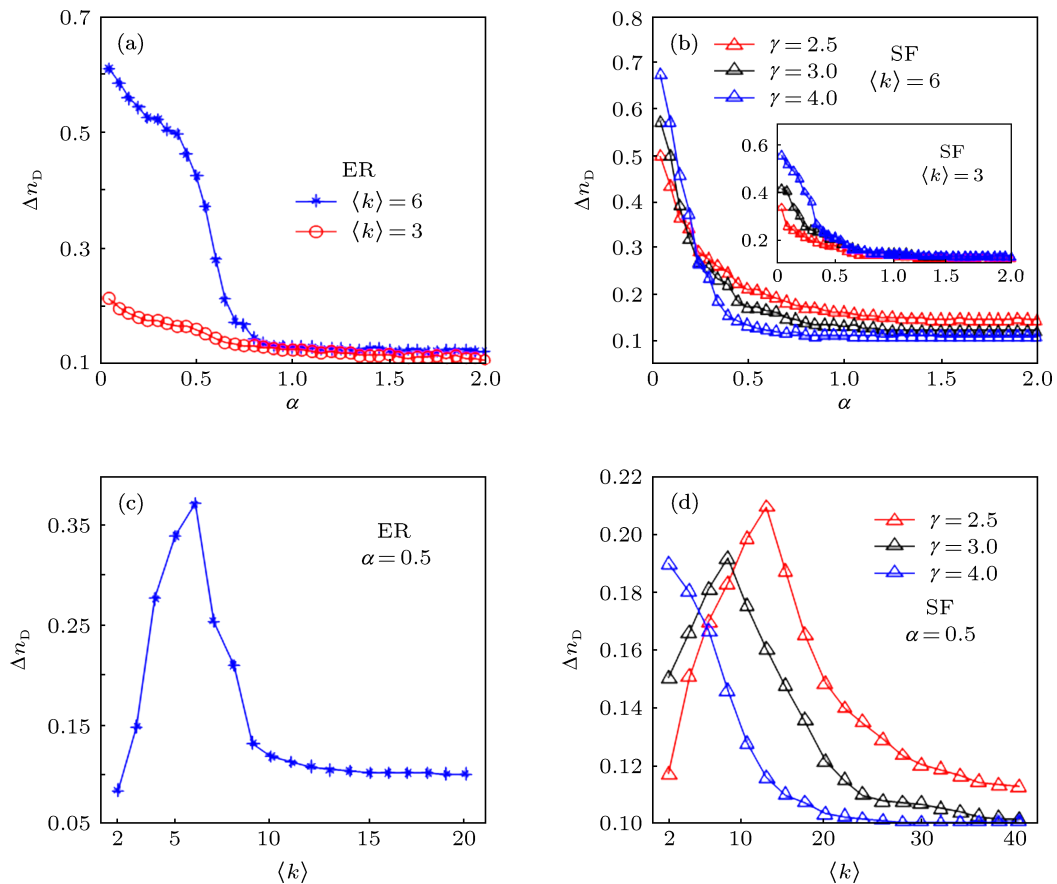


图 3 在随机失效机制下, Δn_D 随 α 和 $\langle k \rangle$ 变化的情况. 实验网络 $N = 1000$, 实验独立运行 50 次; (a) ER 网络在 $\langle k \rangle = 3, 6$ 下的实验结果; (b) $\gamma = 2.5, 3, 4$ 的 SF 网络在 $\langle k \rangle = 3, 6$ 下的实验结果; (c) ER 网络在 $\alpha = 0.5$ 下的实验结果; (d) $\gamma = 2.5, 3, 4$ 的 SF 网络在 $\alpha = 0.5$ 下的实验结果

实验 2 NC 随失效机制的变化情况

实验 1 研究了随机失效对网络可控性的影响, 但是介数刻画了网络中节点对信息流动的影响力^[18], 节点在网络中的重要性与介数是成正比的, 实验 2 将探究目标失效对网络可控性的影响, 目标节点选取网络中度或介数最大的节点, 分别称为介数目标失效和度目标失效. 实验假设每次只对当前网络中度或者介数最大的一个节点输入失效信号,

直到对目标节点输入失效信号后, 网络不会再发生级联失效则达到稳定状态, 计算此时网络的可控性与初始时刻的变化.

图 4 表示在目标失效机制下, 介数失效模型在 ER 和 SF 网络中因为不同的容忍系数和平均度, 驱动节点增长比例的变化情况. 从实验 2 的结果得到, 目标失效机制初始时刻仅对一个特定节点输入失效信号, 但是稳定状态时驱动节点增长的比例比随

机失效多. 对介数最大的节点失效造成的驱动节点增长比例要大于对度最大的节点失效. 在图 4(a) 和 (b) 中, ER 网络相对 SF 网络, 在目标失效的机制下, 只要较低的容忍系数就能维持网络的可控性不变. 在图 4(c) 和 (d) 中, SF 网络的可控性在目标失效机

制下要比 ER 网络更脆弱. 对于网络平均度较低时, 采用介数的目标失效机制, 容易破坏网络的可控性; 但当网络度较高时, 两种目标失效机制基本不能破坏网络的可控性.

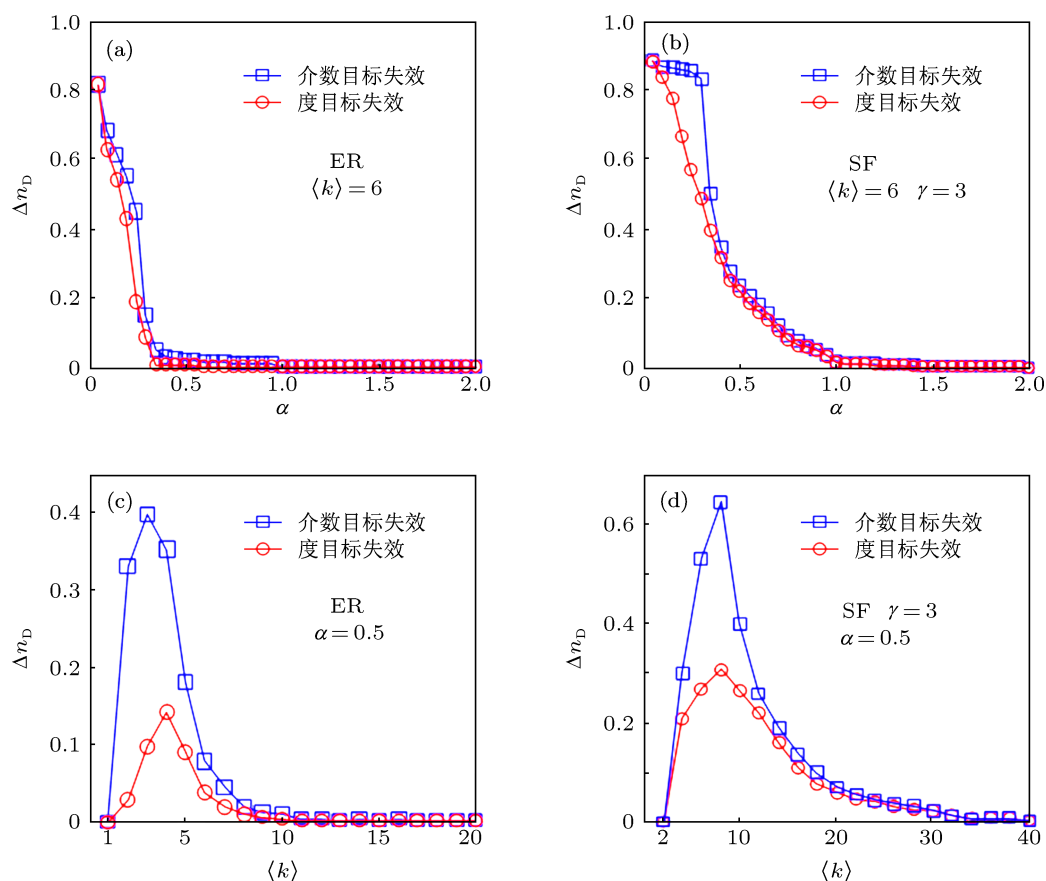


图 4 在目标失效机制下, Δn_D 随 α 和 $\langle k \rangle$ 变化的情况. 实验网络 $N = 1000$, 实验独立运行 50 次; (a) ER 网络在 $\langle k \rangle = 6$ 时随 α 变化的实验结果; (b) $\gamma = 3$ 的 SF 网络在 $\langle k \rangle = 6$ 时随 α 变化的实验结果; (c) ER 网络在 $\alpha = 0.5$ 时随 $\langle k \rangle$ 变化的实验结果; (d) $\gamma = 3$ 的 SF 网络在 $\alpha = 0.5$ 时随 $\langle k \rangle$ 变化的实验结果

4.2 阈值分布实验

阈值分布的特点是它的初始负荷相同, 但它的容量是一个满足 Weibull 的分布, 且随着节点失效负荷不断变化. 因此当我们输入失效信号之后, 驱动节点的变化会因网络结构、节点负荷、Weibull 指数的差异而不同.

实验 3 NC 随初始负荷和网络平均度的变化情况

图 5 表示阈值分布的失效模型在 ER 和 SF 网络中因为不同的初始负荷和平均度, 驱动节点增长比例的变化情况. 从图 5(a) 和 (b) 的实验结果发现, 无论什么样的网络结构, 初始负荷决定了驱动节点增长的数量, Weibull 指数决定了驱动节点增长的速度.

度. 对初始的负荷变化, 实验发现 $0.2 \leq \sigma \leq 0.6$ 是驱动节点数量的增长阶段, 而且增长的速度随 ρ 的增大而大幅变化. 当初始负荷 $\sigma \leq 0.2$ 时, 网络的驱动节点增长几乎不增长, 说明节点失效对网络的可控性几乎没有影响; 当初始负荷 $\sigma \geq 0.6$ 时, 网络的驱动节点增长比例逼近 1, 说明网络已经几乎全部不可控. 当 ρ 越大时, 网络的驱动节点要么几乎不增长, 要么直接全部不可控. 当 $\rho \geq 5$ 时, 初始负荷一旦超过 0.6, 驱动节点呈现出阶跃性增长, 此时网络中节点状态全不可控. 这是因为 ρ 控制着安全阈值的分布情况, ρ 越大使得网络更容易发生节点的大规模级联失效, 从而使网络趋向于不可控. 比较图 5(a) 和 (b) 发现 SF 网络相比 ER 网络在受到失效信号的输入之后, 驱动节点的增长比例较大. 节

点失效之后 SF 网络的 Δn_D 大于 ER 网络, 说明 SF 网络可控的鲁棒性较差, 维持 SF 网络可控性的难度较大. 图 5(c) 和 (d) 说明不论什么样的网络模型, 当 $\rho = 2$ 时, 驱动节点的增加比例都呈现出先升后降再逐渐稳定的趋势; 当 $\langle k \rangle \in [6, 8]$, 驱动节点的增长比例最大, 当平均度增大时, 增长的比例不断减小并稳定下来. 这种现象是因为节点失效虽然改变

了邻居节点的负荷, 但由于网络的度较大, 所以附加给邻居节点的负荷就较小, 这使得大规模的级联失效不易发生. 图 5(c) 和 (d) 中的内框表示了 $\rho = 5$ 时驱动节点的增长比例, 由于 ρ 较大且初始负荷没有超过 0.6, 实验中驱动节点的增长比例很小, 可以认为此时驱动节点的增长受 $\langle k \rangle$ 的影响不大.

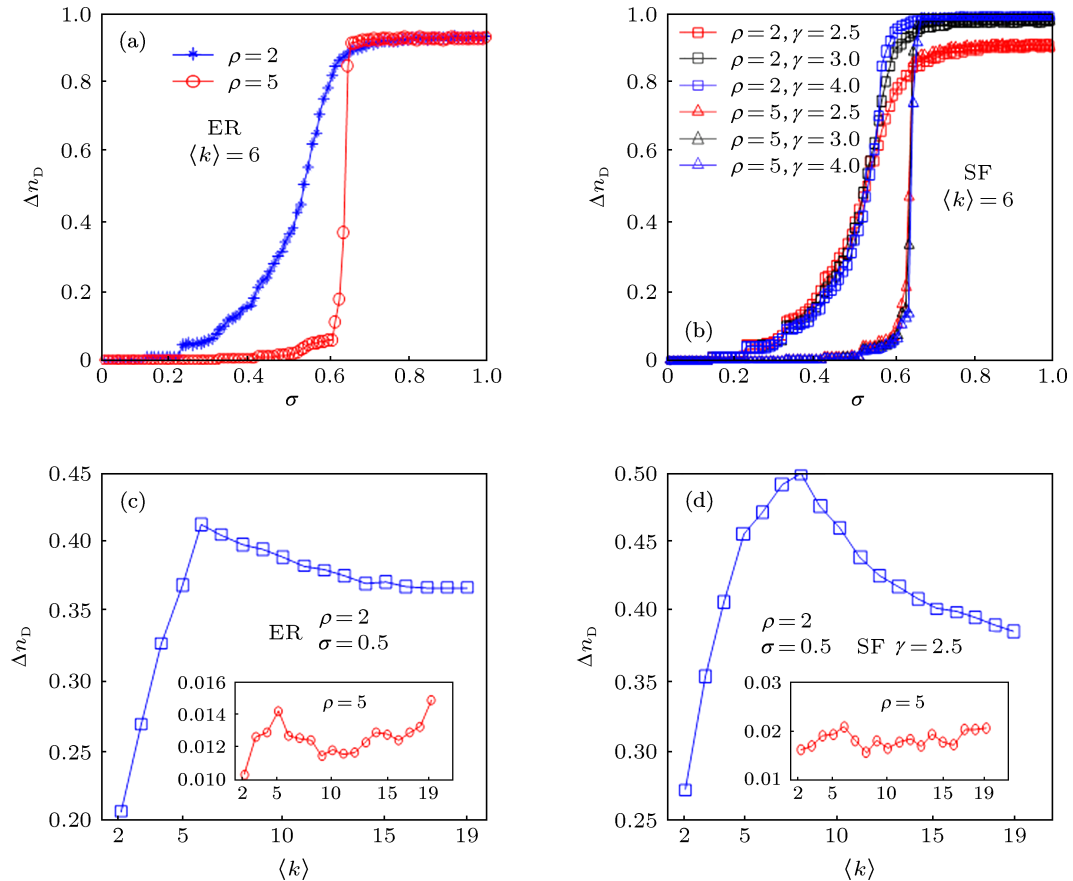


图 5 驱动节点的增长比例随 σ 和 $\langle k \rangle$ 变化的情况. 实验网络 $N = 1000$, 实验独立运行 50 次; (a) ER 网络在 $\langle k \rangle = 6$ 和 $\rho = 2, 5$ 时随 σ 变化的实验结果; (b) $\gamma = 2.5, 3, 4$ 的 SF 网络在 $\langle k \rangle = 6$ 和 $\rho = 2, 5$ 时随 σ 变化的实验结果; (c) ER 网络在 $\sigma = 0.5$ 和 $\rho = 2, 5$ 时随 $\langle k \rangle$ 变化的实验结果; (d) $\gamma = 2.5$ 的 SF 网络在 $\sigma = 0.5$ 和 $\rho = 2, 5$ 时随 $\langle k \rangle$ 变化的实验结果

5 结 论

本文对 Liu 和 Barabasi^[3] 提出的线性系统的网络可控性模型进行拓展, 针对网络中存在的节点失效问题, 提出了基于节点负荷失效的网络可控性模型. 研究表明, 受到节点失效后, 维持 SF 网络的可控性难度要明显大于 ER 网络, 说明 ER 网络的可控性更加鲁棒. 在目标节点失效机制下, 即使

对网络输入极少的失效信号, 也能极大地破坏网络的可控性; 同时使高介数节点失效要比使度高的节点失效更能破坏网络的可控性, 说明高介数节点在维持网络可控性上发挥着重要的作用, 这个结论是对 NCM 第二条结论的丰富和完善. 对不同的负荷失效模型, 要采取合理的防失效措施, 防止网络发生阶跃性全不可控现象.

- [1] Lombardi A, Hörnquist M 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056110
- [2] Sorrentino F, Bernardo M, Garofalo F, Chen G R 2007 *Phys. Rev. E* **75** 046103
- [3] Liu Y Y, Slotine J J, Barabási A L 2011 *Nature* **473** 167
- [4] Müller F J, Schuppert A 2011 *Nature* **478** E4
- [5] Egerstedt M 2011 *Nature* **473** 158
- [6] Hou L L, Lao S Y, Liu G, Bai L 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 108901
- [7] Albert R, Jeong H, Barabási A L 2000 *Nature* **406** 378
- [8] Lü T Y, Piao X F, Xie W Y, Huang S B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 170512 (in Chinese) [吕天阳, 朴秀峰, 谢文艳, 黄少滨 2012 物理学报 **61** 170512]
- [9] Lin C T 1974 *IEEE Trans. Automatic Control* **19** 201
- [10] Bollobás B 1985 *Random Graphs* (London: Academic)
- [11] Motter A E, Lai Y C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 065102
- [12] Motter A E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 098701
- [13] Newman M E J 2001 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **98** 404
- [14] Moreno Y, Gómez B J, Pacheco A F 2002 *Europhys. Lett.* **58** 630
- [15] Erdős P, Rényi A 1960 *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** 17
- [16] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [17] Pu C L, Pei W J, Andrew M 2012 *Physica A* **391** 4420
- [18] Freeman L C 1977 *Sociometry* **40** 35

Network controllability based on node overloaded failure*

Xiao Yan-Dong[†] Lao Song-Yang Hou Lü-Lin Bai Liang

(College of Information Systems and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 19 March 2013; revised manuscript received 3 June 2013)

Abstract

Liu and Barabasi applied the modern control theory to the network controllability of linear dynamical systems and proposed a method to calculate the minimal set of driver node which controls the states of all nodes in a linear time invariant complex network with any topology. The network controllability model solves the computable problems of the network controllability. Facing the problem of node overloaded failure in real networks, in the paper we investigate the model of network controllability based on node overloaded failure. Through the simulation of betweenness and Weibull failure model, the results demonstrate that the difficulty in maintaining the controllability of SF network is significantly greater than that of ER network. In the target failure mechanism, even if the failure signals input rarely to the networks, they can greatly increase the difficulty of network controllability. Besides, the node failure based high betweenness centrality is more efficient than failure based high degree on damaging network controllability, which indicates the nodes with high betweenness centrality play an important role in maintaining the network controllability. Furthermore, taking the reasonable measures for different load failure model can prevent the networks from inducing a step uncontrollable phenomenon.

Keywords: network controllability, structure controllability, node failure

PACS: 02.30.Yy, 89.75.Fb, 89.75.Hc

DOI: 10.7498/aps.62.180201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60902094), and the Military Science Foundation of China (Grant No. 2010JY0072-046).

[†] Corresponding author. E-mail: xiaoyandong08@gmail.com