(2+1) 维广义 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程的无穷序列类孤子解*

套格图桑†

(内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)

(2013 年 6 月 13 日收到; 2013 年 8 月 5 日收到修改稿)

为了构造高维非线性发展方程的无穷序列类孤子新解, 研究了二阶常系数齐次线性常微分方程, 获得了新结论. 步骤一, 给出一种函数变换把二阶常系数齐次线性常微分方程的求解问题转化为一元二次方程和 Riccati 方程的求解问题. 在此基础上, 利用 Riccati 方程解的非线性叠加公式, 获得了二阶常系数齐次线性常微分方程的无穷序列新解. 步骤二, 利用以上得到的结论与符号计算系统 Mathematica, 构造了 (2+1) 维广义 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (GCBS) 方程的无穷序列类孤子新解.

关键词: 常微分方程, 非线性叠加公式, 高维非线性发展方程, 无穷序列类孤子新解

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.62.210201

1 引 言

求解孤子系统的精确解是非线性数学物理问题的重要研究内容之一. 目前, 在该领域提出了诸多求解方法. 文献 [1—3] 提出 Bäcklund 变换和变量分离相结合的一种方法, 获得了非线性发展方程的无穷序列精确解. 文献 [4—26] 用辅助方程法, 构造了非线性发展方程的有限多个新精确解. 文献 [27] 总结了辅助方程法的构造性和机械化性特点, 构造了非线性发展方程 (组) 的无穷序列新精确解.

构造高维非线性发展的类孤子精确解在孤立子理论中具有重要意义. 比如: 文献 [4—14] 用 Riccati 方程获得了高维非线性发展的类孤子新精确解. 文献 [15—19] 用 $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ 展开法, 构造了非线性发展方程的类孤子解.

本文为了构造非线性发展方程的无穷序列新精确解, 在文献 [27] 的基础上, 研究了二阶常系数齐次线性常微分方程, 获得了该方程的新解. 这些解通过下列两个步骤, 能够获得非线性发展方程的无穷序列新精确解.

1) 给出一种函数变换, 将二阶常系数齐次线性常微分方程的求解问题转化为一元二次代数方程与 Riccati 方程的求解问题. 在此基础上, 利用 Riccati 方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式 [27], 获得了二阶常系数齐次线性常微分方程的新解.

2) 选择非线性发展方程的形式解, 在二阶常系数齐次线性常微分方程的新解和符号计算系统 Mathematica 的帮助下, 构造了 (2+1) 维广义 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程的 [28,29] 无穷序列类孤子新解

$$\alpha u_{xt}+\beta u_x u_{xy}+\delta u_y u_{xx}+u_{xxxy}=0, \tag{1}$$

其中 $\alpha\neq 1$, β 和 δ 是任意非零常数.

因为, Bogoyavlenskii-Schiff(BS) 方程、Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) 方程和爆破孤子方程是 (2+1) 维广义 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (GCBS) 方程的特殊情况. 因此, 研究 (2+1) 维

* 国家自然科学基金 (批准号: 11361040)、内蒙古自治区高等学校科学研究基金 (批准号: NJZY12031) 和内蒙古自治区自然科学基金 (批准号: 2010MS0111) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: tgts@imnu.edu.cn

GCBS 方程有非常重要意义.

$$4u_{xt}+4u_xu_{xy}+2u_yu_{xx}+u_{xxxy}=0, \tag{2}$$

$$4u_{xt}+8u_xu_{xy}+4u_yu_{xx}+u_{xxxy}=0, \tag{3}$$

$$u_{xt}-4u_xu_{xy}-2u_yu_{xx}+u_{xxxy}=0. \tag{4}$$

2 二阶常系数齐次线性常微分方程的无穷序列新解

把函数变换 (5) 代入常微分方程 (6), 并令 $\exp(\lambda\xi)$ 和 $\exp(\int z(\xi)\mathrm{d}\xi)$ 的系数为零后得到代数方程 (7) 和 Riccati 方程 (8).

$$G(\xi)=\exp(\lambda\xi)+\exp(\int z(\xi)\mathrm{d}\xi), \tag{5}$$

$$aG''(\xi)+bG'(\xi)+cG(\xi)=0, \tag{6}$$

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0, \tag{7}$$

$$a\big(z'(\xi)+z^2(\xi)\big)+bz(\xi)+c=0. \tag{8}$$

这里 λ 是待定的常数, a,b,c 是常数, $z(\xi)$ 是 Riccati 方程 (8) 的解.

经计算获得了二阶常系数线性常微分方程 (6) 的如下形式的解:

$$\begin{aligned}G(\xi)=&C_1\exp\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right)\\&+C_2\exp\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right)\\&+\exp\left(\int z(\xi)\mathrm{d}\xi\right),\quad (b^2-4ac>0),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}G(\xi)=&\left(C_1+C_2\xi\right)\exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right)\\&+\exp\left(\int z(\xi)\mathrm{d}\xi\right),\quad (b^2-4ac=0),\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}G(\xi)=&\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)\right.\\&\left.+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)\right]\exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right)\\&+\exp\left(\int z(\xi)\mathrm{d}\xi\right),\quad (b^2-4ac<0).\end{aligned} \tag{11}$$

在 (9)—(11) 式中 $z(\xi)$ 由 Riccati 方程 (8) 来确定. 根据文献 [27] 给出的结论, 可以获得 Riccati 方程 (8) 的下列几种结论.

结论1 Riccati 方程 (8) 的解.

$$z(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b+a\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad (b^2-4ac>0), \tag{12}$$

$$z(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b+a\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\coth\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad (b^2-4ac>0), \tag{13}$$

$$z(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b-a\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad (b^2-4ac<0), \tag{14}$$

$$z(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b+a\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\cot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad (b^2-4ac<0), \tag{15}$$

$$z(\xi)=\frac{2c\left[d_1\exp\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)+d_2\right]}{a\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\left[d_1\exp\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)-d_2\right]+b\left[d_1\exp\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)\right]+d_2},\quad (b^2-4ac>0), \tag{16}$$

$$z(\xi)=\frac{2c\left[d_1\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)+d_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right]}{a\left[D_1\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)+D_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right]},\quad (b^2-4ac<0), \tag{17}$$

$$z(\xi)=-\frac{b^2(d_1+d_2\xi)}{2a[2ad_2+b(d_1+d_2\xi)]},\quad (b^2-4ac=0). \tag{18}$$

这里 $D_1=-\frac{b}{a}d_1-d_2\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}+\frac{4c}{a}}, D_2=d_1\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}+\frac{4c}{a}}-\frac{b}{a}d_2, d_1, d_2$ 是不全为零的任意常数.

结论2 Riccati 方程 (8) 的 Bäcklund 变换.

若 $z(\xi)$ 是 Riccati 方程 (8) 的解, 则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (8) 的解:

$$\bar{z}(\xi)=\frac{cB-anz(\xi)}{-bB-an-aBz(\xi)}, \tag{19}$$

$$\bar{z}(\xi)=-\frac{b}{a}+\frac{bA}{aA+amz(\xi)-bBz^2(\xi)}. \tag{20}$$

结论3　Riccati 方程 (8) 解的非线性叠加公式.

若 $z_1(\xi),z_2(\xi),z_3(\xi)$ 是 Riccati 方程 (8) 的三个解, 则下面给出的 $\bar{z}(\xi)$ 也是 Riccati 方程 (8) 的解:

$$\bar{z}(\xi)=\frac{-cNz_3(\xi)+[c(L+N)+(cn+bN)z_2(\xi)+(cl+bL)z_3(\xi)]z_1(\xi)+a\Upsilon(\xi)z_2(\xi)}{-cnz_3(\xi)+[c(l+n)-aNz_2(\xi)-aLz_3(\xi)]z_1(\xi)+[-cl+a(L+N)z_3(\xi)]z_2(\xi)}, \tag{21}$$

在 (17), (18) 式中 $z(\xi)=-\frac{c}{a}L-\left[\frac{c}{a}(l+n)+\frac{b}{a}(L+N)\right]z_3(\xi),a,b,c,N,L,m,n,l,A,B$ 是任意常数.

结论4　计算 $\exp\left(\int z(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$ 的几种结果.

把解 (12)—(18) 分别代入如下 (22)—(24) 式后得到函数序列 $\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$. 这些函数序列在构造非线性发展方程的无穷序列复合型新精确解方面发挥非常重要作用.

$$\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left[\int\left[-\frac{b}{a}+\frac{bA}{aA+amz_{n-1}(\xi)-bBz_{n-1}^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right],\quad (n=1,2,\cdots), \tag{22}$$

$$\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left[\int\left[-\frac{b}{a}+\frac{bA}{aA+amz_{n-1}(\xi)-bBz_{n-1}^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right],\quad (b^2-4ac=0,n=1,2,\cdots), \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\\ =&\exp\left[\int\left[\frac{-cNz_{n-1}(\xi)+[c(L+N)+(cM+bN)z_{n-2}(\xi)+(cl+bL)z_{n-1}(\xi)]z_{n-3}(\xi)+\Upsilon(\xi)}{-cMz_{n-1}(\xi)+[c(l+M)-aNz_{n-2}(\xi)-aLz_{n-1}(\xi)]z_{n-3}(\xi)+\Psi(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right].\end{aligned} \tag{24}$$

在 (21) 式中 $\bar{z}(\xi)=\big[-cL-[c(l+M)+b(L+N)]z_{n-1}(\xi)\big]z_{n-2}(\xi)$, $\Psi(\xi)=[-cl+a(L+N)z_{n-1}(\xi)]z_{n-2}(\xi)$, $(n=1,2,\cdots),a,b,c,M,N,L,m,l,A,B$ 是不全为零的任意常数.

3　(2+1) 维广义 GCBS 方程的无穷序列类孤子新解

选择 (2+1) 维广义 GCBS 方程的如下形式解, 构造无穷序列类孤子新解:

$$u(x,y,t)=g_0(y)+g_1(t)+\frac{g_2(y)G''\big(p(y)+q(x,t)\big)}{G\big(p(y)+q(x,t)\big)}. \tag{25}$$

这里 $g_0(y),g_1(t),g_2(y),p(y)$ 和 $q(x,t)$ 是 x,y,t 的待定函数.

将 (25) 式和辅助方程 (6) 一起代入 (2+1) 维 GCBS 方程 (1), 并令 $G^s(\xi)\big(G'(\xi)\big)^h(s=0,1,2,3,4;h+s=5)$ 的系数为零后得到一个 $g_0(y),g_1(t),g_2(y),p(y),a,b,c,q(x,t)$ 为未知量的非线性超定微分方程组 (未列出). 用符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的如下解:

$$\begin{aligned}&g_2(y)=-\frac{12aq_x}{b(\beta+\delta)},\delta=-3\beta,p(y)=\int\left\{\frac{a^2\big[-b\alpha q_tq_x+a\alpha q_{xt}+3\beta g_0'(y)[bq_x^2-aq_{xx}]\big]}{(b^3-4abc)q_x^3+3a(-b^2+4ac)q_xq_{xx}+a^2bq_{xxx}}\right\}\mathrm{d}y,\\ &g_0(y)=-\int\left\{\frac{\alpha\big[(b^2-4ac)q_x^3q_{xt}-3(b^2-4ac)q_tq_x^2q_{xx}+a^2q_{xt}q_{xxx}\big]}{3\beta q_{xx}\big[2(b^2-4ac)q_x^3-a^2q_{xxx}\big]}\right\}\mathrm{d}y;\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&g_2(y)=-\frac{12aq_x}{b(\beta+\delta)},\delta=-3\beta,p(y)=\int\left\{\frac{a^2q_x\big[-\alpha q_t+3\beta g_0'(y)q_x\big]}{(b^2-4ac)q_x^3+a^2q_{xxx}}\right\}\mathrm{d}y,\\ &g_0(y)=-\int\left\{\frac{\alpha\big[(b^2-4ac)q_x^3q_{xt}-3(b^2-4ac)q_tq_x^2q_{xx}+a^2q_{xt}q_{xxx}\big]}{3\beta q_{xx}\big[2(b^2-4ac)q_x^3-a^2q_{xxx}\big]}\right\}\mathrm{d}y;\end{aligned} \tag{27}$$

$$g_2(y) = -\frac{12aq_x}{b(\beta+\delta)}, \delta = -3\beta, p(y) = \int \left\{ \frac{a^2\left[-3b\alpha q_x q_t + a\alpha q_{xt} + 3\beta g_0'(y)(3bq_x^2 - aq_{xx})\right]}{3[(b^3-4abc)q_x^3 + a(-b^2+4ac)q_x q_{xx} + a^2 b q_{xxx}]} \right\} \mathrm{d}y,$$

$$g_0(y) = -\int \left\{ \frac{\alpha\left[(b^2-4ac)q_x^3 q_{xt} - 3(b^2-4ac)q_t q_x^2 q_{xx} + a^2 q_{xt} q_{xxx}\right]}{3\beta q_{xx}\left[2(b^2-4ac)q_x^3 - a^2 q_{xxx}\right]} \right\} \mathrm{d}y; \tag{28}$$

$$g_2(y) = -\frac{12aq_x}{b(\beta+\delta)}, \delta = -3\beta,$$

$$g_0(y) = -\int \left\{ \frac{\alpha\left[(b^2-4ac)q_x^3 q_{xt} - 3(b^2-4ac)q_t q_x^2 q_{xx} + a^2 q_{xt} q_{xxx}\right]}{3\beta q_{xx}\left[2(b^2-4ac)q_x^3 - a^2 q_{xxx}\right]} \right\} \mathrm{d}y,$$

$$p(y) = \int \left\{ \frac{a^2\left[-(b^2+2ac)\alpha q_x q_t + ab\alpha q_{xt} + 3\beta g_0'(y)[(b^2+2ac)q_x^2 - abq_{xx}]\right]}{(b^4-2ab^2c-8a^2c^2)q_x^3 + 3ab(-b^2+4ac)q_x q_{xx} + a^2(b^2+2ac)q_{xxx}} \right\} \mathrm{d}y; \tag{29}$$

$$g_2(y) = -\frac{12aq_x}{b(\beta+\delta)}, \delta = -3\beta, c = \frac{b^2}{4a}, g_0(y) = \int \frac{\alpha q_{xt}}{3\beta q_{xx}} \mathrm{d}y,$$

$$p(y) = \int \left\{ \frac{1}{bq_{xxx}}\left[-b\alpha q_t q_x + a\alpha q_{xt} + 3\beta g_0'(y)[bq_x^2 - aq_{xx}]\right] \right\} \mathrm{d}y; \tag{30}$$

$$g_2(y) = -\frac{12aq_x}{b(\beta+\delta)}, \delta = -3\beta, c = \frac{b^2}{4a}, g_0(y) = \int \frac{\alpha q_{xt}}{3\beta q_{xx}} \mathrm{d}y,$$

$$p(y) = \int \left\{ \frac{q_x}{q_{xxx}}\left[-\alpha q_t + 3\beta g_0'(y) q_x\right] \right\} \mathrm{d}y; \tag{31}$$

$$g_2(y) = -\frac{12aq_x}{b(\beta+\delta)}, \delta = -3\beta, c = \frac{b^2}{4a}, g_0(y) = \int \frac{\alpha q_{xt}}{3\beta q_{xx}} \mathrm{d}y,$$

$$p(y) = \int \left\{ \frac{1}{3bq_{xxx}}\left[-3b\alpha q_t q_x + a\alpha q_{xt} + 3\beta g_0'(y)[3bq_x^2 - aq_{xx}]\right] \right\} \mathrm{d}y; \tag{32}$$

$$g_2(y) = -\frac{12aq_x}{b(\beta+\delta)}, \delta = -3\beta, c = \frac{b^2}{4a}, g_0(y) = \int \frac{\alpha q_{xt}}{3\beta q_{xx}} \mathrm{d}y,$$

$$p(y) = \int \left\{ \frac{1}{3bq_{xxx}}\left[-3b\alpha q_t q_x + 2a\alpha q_{xt} + 3\beta g_0'(y)[3bq_x^2 - 2aq_{xx}]\right] \right\} \mathrm{d}y. \tag{33}$$

将 (26)—(33) 式分别代入 (25) 式后得到 $(2+1)$ 维广义 GCBS 方程的如下形式解:

$$u(x,y,t) = g_0(y) + g_1(t) + \frac{g_2(y)G''\big(p(y)+q(x,t)\big)}{G\big(p(y)+q(x,t)\big)}. \tag{34}$$

这里 $g_0(y), g_2(y), p(y)$ 是由 (26)—(33) 式来确定. $g_1(t)$ 是 t 的任意函数, $q = q(x,t)$ 是 x,t 的任意函数.

根据以上结果, 可以构造 $(2+1)$ 维广义 GCBS 方程的无穷序列类孤子新精确解.

3.1 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的有限多个类孤子新精确解

当 $z(\xi) = \lambda$ 时, 可以获得 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的有限多个类孤子精确解.

1) 指数函数型有限多个类孤子精确解.

把下列 (35) 代入解 (34) 后可以获得 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的指数函数型有限多个类孤子精确解.

$$G(\xi) = C_1 \exp\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right) + C_2 \exp\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right), \quad (b^2-4ac>0). \tag{35}$$

2) 三角函数与有理函数复合的限多个类孤子新精确解.

把下列 (36) 式代入解 (34) 后可以获得 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的三角函数与有理函数复合的限多个类孤子新精确解.

$$G(\xi) = \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)\right] \exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right), \quad (b^2-4ac<0). \tag{36}$$

3) 指数函数与有理函数复合的限多个类孤子新精确解.

把下列 (37) 代入解 (34) 式后可以获得 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的指数函数与有理函数复合的限多个类孤子新精确解.

$$G(\xi)=(C_1+C_2\xi)\exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right),\quad (b^2-4ac=0). \tag{37}$$

3.2 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的复合函数型无穷序列类孤子新精确解

当 $z(\xi)$ 不是常数时, 可以获得 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的无穷序列复合函数型类孤子新精确解.

1) 指数函数型无穷序列类孤子新精确解.

将下列函数序列代入解 (34) 后可以获得 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的无穷序列复合函数型类孤子新精确解.

$$\begin{aligned}
&G_n(\xi)=C_1\exp\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right)+C_2\exp\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\xi\right)+\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right),\\
&\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left[\int\left[-\frac{b}{a}+\frac{bA}{aA+amz_{n-1}(\xi)-bBz_{n-1}^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right],\quad (n=1,2,\cdots),\\
&z_0(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b+a\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad (b^2-4ac>0).
\end{aligned} \tag{38}$$

2) 三角函数与指数函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

将下列函数序列代入解 (34) 后可以获得 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的三角函数与指数函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

$$\begin{aligned}
&G_n(\xi)=\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\xi\right)\right]\exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right)+\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right),\\
&\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left[\int\left[-\frac{b}{a}+\frac{bA}{aA+amz_{n-1}(\xi)-bBz_{n-1}^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right],\quad (n=1,2,\cdots),\\
&z_0(\xi)=\frac{1}{2a}\left[-b-a\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b^2+4ac}{a^2}}\xi\right)\right],\quad (b^2-4ac<0).
\end{aligned} \tag{39}$$

3) 有理函数与指数函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

将下列函数序列代入解 (34) 后可以获得 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的有理函数与指数函数复合的无穷序列类孤子新精确解.

$$\begin{aligned}
&G_n(\xi)=(C_1+C_2\xi)\exp\left(\frac{-b}{2a}\xi\right)+\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right),\\
&\exp\left(\int z_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)=\exp\left[\int\left[-\frac{b}{a}+\frac{bA}{aA+amz_{n-1}(\xi)-bBz_{n-1}^2(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi\right],\quad (n=1,2,\cdots),\\
&z_0(\xi)=-\frac{b^2(d_1+d_2\xi)}{2a[2ad_2+b(d_1+d_2\xi)]},\quad (b^2-4ac=0).
\end{aligned} \tag{40}$$

4 结 论

文献 [4—26] 未能获得辅助方程的 Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式. 因此, 选择了非线性发展方程比较复杂的形式解, 获得了新精确解. 这种方法不仅计算量大, 而且只获得有限多个新精确解. 本文给出一种函数变换, 获得了二阶常系数齐次线性常微分方程的无穷序列新解. 因此, 可以选择比较简单的形式解, 在符号计算系统 Mathematica 的帮助下构造了非线性发展方程的新解. 这种方法不仅计算量小, 而且能够获得单函数型和复合函数型无穷序列新精确解. 比如, 可以选择 $(2+1)$ 维 GCBS 方程的如下形式解, 获得无穷序列类孤子新精确解:

$$u(x,y,t)=g_0(y)+g_1(t)$$

$$+\frac{g_2(y)G''\big(Kx+q(y,t)\big)}{G\big(Kx+q(y,t)\big)}. \tag{41}$$

这里 $g_0(y)$, $g_1(t)$, $g_2(y)$ 和 $q(y,t)$ 是 x,y,t 的待定函数, K 是常数.

将 (41) 式和辅助方程 (6) 一起代入 $(2+1)$ 维广义 GCBS 方程 (1), 并令 $G^s(\xi)\big(G'(\xi)\big)^h$ $(s=0,1,2,3,4;\ h=5,4,3,2,1)$ 的系数为零后得到一个 $g_0(y)$, $g_1(t)$, $g_2(y)$, $K,a,b,c,q(y,t)$ 为未知量的非线性超定微分方程组 (未列出). 借助符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的如下解, 而且用本文给出的方法, 可以获得 $(2+1)$ 维广义 GCBS 方程的无穷序列类孤子新精确解 (未列出).

$$g_0(y)=-\int\left\{\frac{a^2\alpha q_t+(b^2-4ac)K^2q_y}{a^2K\delta}\right\}\mathrm{d}y,$$

$$g_2(y)=-\frac{12aK}{b(\beta+\delta)}; \tag{42}$$

$$g_0(y)=-\int\frac{\alpha q_t}{K\delta}\,\mathrm{d}y,$$

$$g_2(y)=-\frac{12aK}{b(\beta+\delta)},\quad c=\frac{b^2}{4a}. \tag{43}$$

这里 $q=q(y,t)$ 是 y,t 的任意函数.

[1] Lou S Y 2000 *Phys. Lett.* A **277** 94

[2] Tang X Y, Liang Z F 2006 *Phys. Lett.* A **351** 398

[3] Ying J P, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1448

[4] Ma S H, Fang J P 2012 *Acta. Phys. Sin.* **61** 180505 (in Chinese) [马松华, 方建平 2012 物理学报**61** 180505]

[5] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 940

[6] Li D S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 143

[7] Ma S H, Fang J P, Zhu H P 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 4319 (in Chinese) [马松华, 方建平, 朱海平 2007 物理学报 **56** 4319]

[8] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese) [马松华, 吴小红, 方建平, 郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]

[9] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **40** 137

[10] Xie F D, Chen J, Lü Z S 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 585

[11] Li D S, Zhang H Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1377

[12] Lü Z S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 405

[13] Xie F D, Gao X S 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 353

[14] Chen Y, Li B 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 1

[15] Li B Q, Ma Y L 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 4373 (in Chinese) [李帮庆, 马玉兰 2009 物理学报 **58** 4373]

[16] Ma Y L, Li B Q, Sun J Z 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 7403 (in Chinese) [马玉兰, 李帮庆, 孙践知 2009 物理学报 **58** 7403]

[17] Li B Q, Ma Y L, Xu M P 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 1409 (in Chinese) [李帮庆, 马玉兰, 徐美萍 2010 物理学报 **59** 1409]

[18] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett.* **A372** 417

[19] Mustafa Inca, Esma Ulutas, Anjan Biswasc 2013 *Chin. Phys.* B **22** 060204

[20] Sirendaoreji, Sun J 2003 *Phys. Lett.* **A309** 387

[21] Khaled A Gepreel, Saleh Omran 2012 *Chin. Phys.* B **21** 110204

[22] Zhang S 2007 *Phys. Lett.* A **368** 470

[23] Pan Z H, Ma S H, Fang J P 2010 *Chin. Phys.* B **19** 100301

[24] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2767

[25] Shi L F, Chen C S, Zhou X C 2011 *Chin. Phys.* B **20** 100507

[26] Qiang J Y, Ma S H, Fang J P 2010 *Chin. Phys.* B **19** 090305

[27] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2010 *Chin. Phys.* **19** 080303

[28] Zhang H P, Chen Y, Li B 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 7393 (in Chinese) [张焕萍, 陈勇, 李彪 2003 物理学报 **58** 7393]

[29] Bogoyavlenskii O I 1990 *Math. USSR. Izv.* **34** 247

New infinite sequence soliton-like solutions of $(2+1)$-dimensional generalized Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation*

Taogetusang†

(*The College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot* 010022, *China*)

(Received 13 June 2013; revised manuscript received 5 August 2013)

Abstract

This paper will study in detail homogeneous linear ordinary differential equation with constant coefficients of second order and draw new conclusion to construct new infinite sequence soliton-like solutions of high-dimensional nonlinear evolution equations. Step one: the solving of a homogeneous linear ordinary differential equation with constant coefficients of second order is changed into the solving of the quadratic equation with one unknown and the Riccati equation. Based on this, new infinite sequence solutions of homogeneous linear ordinary differential equation with constant coefficients of second order are found by using nonlinear superposition formula for the solutions to Riccati equation. Step two: new infinite sequence soliton-like solutions to $(2+1)$-dimensional generalized Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation are constructed using the above conclusion and the symbolic computation system Mathematica.

Keywords: ordinary differential equation, the nonlinear superposition formula, high-dimensional nonlinear evolution equation, infinite sequence soliton-like solution

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.62.210201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11361040), the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZY12031), and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. 2010MS0111).

† Corresponding author. E-mail: tgts@imnu.edu.cn