

# 从光晶格中释放的超冷玻色气体密度-密度关联函数研究\*

李艳†

(湖南文理学院物理与电子科技学院, 常德 415000)

(2013年10月18日收到; 2013年11月13日收到修改稿)

利用量子旋转场理论详细研究了从光晶格中释放的超冷玻色气体的空间密度-密度关联函数. 由于量子旋转场理论充分考虑了光晶格中冷原子气体的粒子数涨落和相位效应, 该理论能有效应用于具有强相互作用的冷原子系统, 从而光晶格处于超流态到绝缘态逐渐过渡过程中的超冷原子气体的关联特性在这一理论体系下都得到了很好的描述. 结果表明: 随着超冷玻色气体逐渐从绝缘态向超流态过渡, 其密度-密度关联图样中连续对角斜线也逐渐向分散的尖峰过渡, 理论结果与目前实验观测到的结果符合. 除此以外, 上述密度-密度关联的结果中还包含了超冷原子系统量子耗散效应, 相关结论与目前已有的理论和实验一致.

**关键词:** 超冷玻色气体, 光晶格, 密度-密度关联函数

**PACS:** 67.85.Hj, 03.75.Kk, 05.30.Jp, 67.10.Ba

**DOI:** 10.7498/aps.63.066701

## 1 引言

近年来, 光晶格中冷原子的实验研究获得了很大进展. 囚禁于光晶格中的冷原子系统是一个非常纯净的强关联量子多体系统. 具有强量子涨落的强关联系统在关于稀薄量子气体的实验研究中发挥着越来越重要的作用<sup>[1]</sup>. 光晶格实验系统提供了研究某些基础物理理论的实验平台, 也是揭示量子多体体系特性的有效途径<sup>[2,3]</sup>.

众所周知, 处于光晶格中的具有排斥相互作用的超冷玻色气体体系的基态可以是超流态 (superfluid state), 也可以是绝缘态 (mott insulating state)<sup>[4,5]</sup>. 当玻色子在晶格间的跳转效应 (hopping) 被压制下来时, 系统会从超流态 (典型的特征是每个晶格中的粒子数涨落很大) 经历相变至绝缘态 (每个晶格中的粒子都是整数, 无粒子数涨落). 由于序参数的相位和粒子数是一对共轭量, 因此它们满足不确定性原理  $\Delta\phi\Delta n \sim \hbar$ , 而玻色系统的本征态可以是相位或者是粒子数算符的本征态. 相位

算符的本征态即是超流态, 而粒子数算符的本征态则是绝缘态.

光晶格中的超冷玻色气体可以用 Bose-Hubbard 模型描述<sup>[1,6]</sup>, 而针对这一模型的理论研究较多, 如粗粒化方案 (coarse graining)<sup>[7]</sup>、强耦合展开理论 (strong-coupling expansion)<sup>[8,9]</sup>、中场理论<sup>[10]</sup> 都被成功应用于一维、二维、三维超冷原子-光晶格系统的求解. 另外一种超越中场理论基于 Gutzwiller 波函数和系统强耦合展开的方法也被应用于该系统的求解并获得了实验验证<sup>[11,12]</sup>, 然而这个理论进展主要得益于用来处理量子蒙特卡罗数值计算的计算机性能的提升. 基于光晶格中冷原子体系的特性, Polak 等<sup>[13]</sup> 在中场近似理论的基础上发展了一套更为强大的量子规范旋转场理论 (quantum phase field  $U(1)$  rotor field)<sup>[13]</sup>, 这一理论可以有效地描述处于光晶格中的强关联的冷原子系统. 这个理论的核心思想是把关于超流态到绝缘态转变的相关场变量分解为玻色场部分和相位部分, 而相位部分的效应在传统的中场近似中

\* 国家自然科学基金理论物理专项 (批准号: 11247299) 和湖南文理学院博士启动基金 (批准号: 13101038) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liyan\_2001@126.com

是没有考虑的. 该理论的优点在于使原本复杂定性的相图变得定量化, 因此基于该模型的理论分析过程通常都是解析的. 量子旋转场理论提供了一个自洽的并适用于求解各种情形下 (包括强相互作用下) 的超冷原子-晶格系统. 量子旋转场理论已被成功地用于研究处于光晶格中强关联冷原子体系的各种特性. 如量子旋转场理论及其相关扩展理论可以有效地计算处于光晶格势阱的冷原子气体, 包括玻色子<sup>[14,15]</sup>、费米子<sup>[16]</sup>、玻色-费米混合气体<sup>[17]</sup>的相图. 量子规范旋转场理论也可以揭示光晶格中的冷原子气体的关联特性, 如可用来计算系统的飞行时间光谱 (time-of-flight patterns)<sup>[18]</sup>、谱函数 (spectral functions)<sup>[19]</sup>等. 利用量子旋转场理论得到的理论结果也得到了其他理论的支持<sup>[20,21]</sup>, 包括蒙特卡罗数值计算方法<sup>[22]</sup>和图表微扰理论<sup>[23]</sup>.

量子涨落对量子相干性具有重要影响, 研究量子系统相干性的一种重要的手段是密度-密度关联函数 (二阶关联函数)<sup>[24,25]</sup>, 其定义式如下:

$$G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}') \rangle - \langle n(\mathbf{r}) \rangle \langle n(\mathbf{r}') \rangle, \quad (1)$$

这里  $n(\mathbf{r}) = a^\dagger(\mathbf{r})a(\mathbf{r})$  为空间密度算符, 场算符  $a(\mathbf{r})$  表示在位置  $\mathbf{r}$  处湮灭一个粒子;  $G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  表示在位置  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{r}'$  均探测原子的联合概率,  $G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$  代表没有纠缠的粒子, 而  $G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') > 1 (< 1)$  则表示原子有聚集 (离散) 的特性, 典型的例子如玻色子 (费米子);  $\langle \rangle$  代表量子统计平均, 实验室可以通过对同一物理过程多次测量并取平均得到. 实验上, 超冷原子的密度-密度关联函数可以通过如下技术手段得到: 超冷原子气体从势阱中释放后经过一段定时的自由飞行 (time-of-flight) 后, 再通过饱和吸收的共振光谱记录下超冷原子气体的密度分布. 通过多次测量所得到的结果就可以分析得到超冷原子密度的涨落之间的关联, 即密度-密度关联. 理论和实验都表明以上的密度-密度关联函数可以揭示超冷原子气体的多体关联特性<sup>[26-34]</sup>.

目前大多数的理论和实验研究都着重于研究光晶格中处于绝缘态或超流态的超冷原子气体的密度-密度关联函数<sup>[35-38]</sup>, 但很少并且也缺乏一个统一的理论可以研究从超流态到绝缘态逐渐过渡过程中的超冷原子气体的高阶关联特性. 本文利用量子旋转场理论并结合 Bogoliubov 理论来研究处于光晶格的超冷玻色气体的密度-密度关联函数,

在此基础上展示了从超流态到绝缘态转变的过程中原子气体密度-密度关联函数的变化. 实验观察到的从光晶格释放的超冷原子气体密度-密度关联函数的一切特性在均包含在本文的理论结果中, 例如处于绝缘态和超流态的冷原子气体的关联特性、量子耗散对密度-密度关联函数的影响、冷原子气体背对背关联  $G^{(2)}(\mathbf{r}, -\mathbf{r})$  (back to back) 和同线关联  $G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$  (collinear correlation) 等<sup>[35,39,40]</sup>. 本文的结果与已有的其他相关理论结果亦完全相符.

## 2 理论模型和分析

处于光晶格中的超冷玻色气体的哈密顿量可用如下的 Bose-Hubbard 模型描述<sup>[6]</sup>:

$$H = -t \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} [a^\dagger(\mathbf{r})a(\mathbf{r}') + a^\dagger(\mathbf{r}')a(\mathbf{r})] + \frac{U}{2} \sum_{\mathbf{r}} n^2(\mathbf{r}) - \bar{\mu} \sum_{\mathbf{r}} n(\mathbf{r}), \quad (2)$$

这里算符  $a(\mathbf{r})$  和  $a^\dagger(\mathbf{r})$  分别代表在位置  $\mathbf{r}$  处湮灭和产生一个粒子; 而  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle$  表示相邻近的格点;  $n(\mathbf{r}) = a^\dagger(\mathbf{r})a(\mathbf{r})$  是密度算符; 这里常数  $t$  代表邻近晶格间原子跳转 (hopping) 的强度, 当一个玻色子从一个晶格跳转至另一个邻近晶格将获得能量  $t$ ; 常数  $U$  则代表处于同一晶格中的玻色子之间的相互作用强度, 将一个玻色子加入该晶格将消耗能量  $U$ ; 公式中的  $\bar{\mu} = \mu + \frac{U}{2}$ , 这里  $\mu$  是系统的化学势.

(1) 式所定义的系统的量子统计平均可以用如下的关于场变量  $a(\mathbf{r}\tau)$  的路径积分来描述:

$$Z = \int [\mathcal{D}\bar{a}\mathcal{D}a] e^{-S[\bar{a}, a]}, \quad (3)$$

这里  $a(\mathbf{r}\tau)$  是关于“虚拟时间” $\tau$ :  $0 \leq \tau \leq \beta \equiv 1/k_B T$  的函数 ( $k_B$  是玻尔兹曼常数, 而  $T$  表示温度) 且满足周期性条件:  $a(\mathbf{r}\tau) = a(\mathbf{r}\tau + \beta)$ , 作用量  $S$  表示为

$$S_a[\bar{a}, a] = \int_0^\beta d\tau \left[ \mathcal{H}(\tau) + \sum_{\mathbf{r}} \bar{a}(\mathbf{r}\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} a(\mathbf{r}\tau) \right]. \quad (4)$$

对场变量  $a(\mathbf{r}\tau)$  进行局域规范变换

$$a(\mathbf{r}\tau) = b(\mathbf{r}\tau) e^{i\phi(\mathbf{r}\tau)}, \quad (5)$$

于是玻色场包含了玻色部分  $b(\mathbf{r}\tau)$  和附加的“通量”  $e^{i\phi(\mathbf{r}\tau)}$ , 则 (3) 式变为

$$Z = \int [\mathcal{D}\bar{b}\mathcal{D}b][\mathcal{D}\phi] e^{-S[\bar{b}, b, \phi]}. \quad (6)$$

系统的量子统计平均积分也可以通过对玻色部分和相位部分的作用量分别积分再相乘得到, 两部分作用量表示如下:

$$\mathcal{S}_\phi[\phi] = -\ln \int [\mathcal{D}\bar{b}\mathcal{D}b] e^{-S[\bar{b}, b, \phi]}, \quad (7)$$

$$\mathcal{S}_b[\bar{b}, b] = -\ln \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S[\bar{b}, b, \phi]}. \quad (8)$$

于是

$$\begin{aligned} Z &= \int [\mathcal{D}\phi] e^{-\mathcal{S}_\phi[\phi]} \\ &= \int [\mathcal{D}\bar{b}\mathcal{D}b] e^{-\mathcal{S}_b[\bar{b}, b]}. \end{aligned} \quad (9)$$

由于相位场变量  $\phi(\mathbf{r}\tau)$  是三角变量, 在实际计算中较难处理. 为了计算的方便, 引入一个新的场变量  $z(\mathbf{r}\tau) = \exp[i\phi(\mathbf{r}\tau)]$ , 这样相位部分的作用量变为  $\mathcal{S}_z[\bar{z}, z]$ , 而相应的路径积分  $\mathcal{D}\phi$  则变成  $\mathcal{D}\bar{z}\mathcal{D}z$ . (1) 式的量子统计平均定义为

$$\langle \cdots \rangle_x = \frac{\int [\mathcal{D}x] \cdots e^{-\mathcal{S}_x[x]}}{\int [\mathcal{D}x] e^{-\mathcal{S}_x[x]}}, \quad (10)$$

这里  $x$  可以是  $a, b, \phi$ , 或  $z$ , 而其相对应的作用量分别是  $\mathcal{S}_a[\bar{a}, a]$ ,  $\mathcal{S}_b[\bar{b}, b]$ ,  $\mathcal{S}_\phi[\phi]$ ,  $\mathcal{S}_b[\bar{b}, b]$  或  $\mathcal{S}_z[\bar{z}, z]$ , 因此, 玻色场的序参数可以计算为

$$\begin{aligned} \Psi_B &= \langle a(\mathbf{r}\tau) \rangle \\ &= \langle b(\mathbf{r}\tau) \rangle_b \langle \exp[i\phi(\mathbf{r}\tau)] \rangle_\phi. \end{aligned} \quad (11)$$

当  $\Psi_B$  不等于 0 时, 系统具有长程相干性. 对于玻色部分的作用量  $\mathcal{S}_b[\bar{b}, b]$ , 通过近似把玻色部分场算符分解为宏观玻色凝聚 Bogoliubov 体部分  $b_0 = \sqrt{N}$  和非凝聚体涨落部分  $b_d(\mathbf{r}\tau)$ , 即

$$b(\mathbf{r}\tau) = b_0 + b_d(\mathbf{r}\tau), \quad (12)$$

因此超流序参数可以表示为

$$\Psi_B = b_0 m_0, \quad (13)$$

这里  $m_0 = \langle \exp[i\phi(\mathbf{r}\tau)] \rangle$ .

基于 (10) 式, 可以求得下面几个格林函数的值 [18]:

$$\begin{aligned} G_{\phi d}(\mathbf{k}, \omega_p) &= \langle \bar{z}(\mathbf{k}, \omega_p) z(\mathbf{k}, \omega_p) \rangle \\ &= \frac{1}{4t|b_0|^2 - 2tb_0^2\varepsilon_{\mathbf{k}} + U[v(\bar{\mu}/U)]^2 - U[v(\bar{\mu}/U) + i\omega_p/U]^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$G_{bd}(\mathbf{k}, \omega_p) = \langle \bar{b}(\mathbf{k}, \omega_p) b(\mathbf{k}, \omega_p) \rangle = \frac{2t(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\mathbf{k}}) + U|b_0|^2 + i\omega_p}{E_{\mathbf{k}}^2 - (i\omega_p)^2}, \quad (15)$$

$$G_{cd}(\mathbf{k}, \omega_p) = \langle b(\mathbf{k}, \omega_p) b(-\mathbf{k}, \omega_p) \rangle = \langle \bar{b}(-\mathbf{k}, \omega_p) \bar{b}(\mathbf{k}, \omega_p) \rangle = -\frac{U|b_0|^2}{E_{\mathbf{k}}^2 - (i\omega_p)^2}, \quad (16)$$

这里  $\omega_p = 2\pi p/\beta$  ( $p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ ) 是 Bose-Matsubara 频率 [16], 场量  $b(\mathbf{k}\omega_p)$  ( $\bar{b}(\mathbf{k}\omega_p)$ ),  $z(\mathbf{k}\omega_p)$  ( $\bar{z}(\mathbf{k}\omega_p)$ ) 分别是场量  $b(\mathbf{r}\tau)$  ( $\bar{b}(\mathbf{r}\tau)$ ),  $z(\mathbf{r}\tau)$  ( $\bar{z}(\mathbf{r}\tau)$ ) 的傅里叶变换. 函数  $v(x) \equiv x - [x] - 1/2$  ( $[x]$  指取实数  $x$  的整数部分), 而  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \cos(ak_x) + \cos(ak_y)$  和  $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{2t(2 - \varepsilon_{\mathbf{k}})[2t(2 - \varepsilon_{\mathbf{k}}) + 2U|b_0|^2]}$ .

### 3 结果与讨论

根据 (11) 式, 如下四体关联函数可以分解为

$$\begin{aligned} G_{jklm} &= \langle \bar{a}(\mathbf{r}_j\tau) a(\mathbf{r}_k\tau) \bar{a}(\mathbf{r}_l\tau') a(\mathbf{r}_m\tau') \rangle \\ &= \langle \bar{b}(\mathbf{r}_j\tau) b(\mathbf{r}_k\tau) \bar{b}(\mathbf{r}_l\tau') b(\mathbf{r}_m\tau') \rangle_b \\ &\quad \times \langle z(\mathbf{r}_j\tau) \bar{z}(\mathbf{r}_k\tau) z(\mathbf{r}_l\tau') \bar{z}(\mathbf{r}_m\tau') \rangle_z. \end{aligned} \quad (17)$$

同理, 两体关联函数

$$C_{jk} = \langle \bar{a}(\mathbf{r}_j\tau) a(\mathbf{r}_k\tau) \rangle$$

$$= \langle \bar{b}(\mathbf{r}_j\tau) b(\mathbf{r}_k\tau) \rangle_b \langle \bar{z}(\mathbf{r}_j\tau) z(\mathbf{r}_k\tau) \rangle_z. \quad (18)$$

光晶格中的玻色子在动量空间的密度-密度关联函数可以通过下式计算:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= \int_0^\beta \int_0^\beta G_{jklm} \sum_{jklm} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \\ &\quad + i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_m)] d\tau d\tau' \\ &\quad - n(\mathbf{k})n(\mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$n(\mathbf{k}) = \int_0^\beta C_{jk} \sum_{jk} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)] d\tau$$

是玻色子在动量空间的密度分布. 按照文献 [18] 的计算方法, 可以算得

$$G_{jklm} = B_{jklm} X_{jklm}, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned}
 B_{jklm} &= \langle \bar{b}(\mathbf{r}_j\tau)b(\mathbf{r}_k\tau)\bar{b}(\mathbf{r}_l\tau')b(\mathbf{r}_m\tau') \rangle_b \\
 &= m_0^4 + m_0^2[A(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, 0) + A(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_m, 0) \\
 &\quad + A(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_k, \tau' - \tau) + A(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m, \tau - \tau')] \\
 &\quad + A(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, 0)A(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_m, 0) \\
 &\quad + A(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_k, \tau' - \tau) \\
 &\quad \times A(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m, \tau - \tau'), \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{jklm} &= \langle \bar{z}(\mathbf{r}_j\tau)z(\mathbf{r}_k\tau)\bar{z}(\mathbf{r}_l\tau')z(\mathbf{r}_m\tau') \rangle_z \\
 &= b_0^4 + b_0^2[B(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, 0) + B(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_m, 0)] \\
 &\quad + b_0^2[B(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_k, \tau' - \tau) \\
 &\quad + B(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m, \tau - \tau')] \\
 &\quad + b_0^2[C(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_k, \tau' - \tau) \\
 &\quad + C(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l, \tau - \tau')] \\
 &\quad + B(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k, 0)B(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_m, 0) \\
 &\quad + B(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_k, \tau' - \tau)B(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_m, \tau - \tau') \\
 &\quad + C(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_k, \tau' - \tau) \\
 &\quad \times C(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l, \tau - \tau'), \quad (22)
 \end{aligned}$$

这里  $A$ ,  $B$ ,  $C$  三个函数定义如下:

$$\begin{aligned}
 A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Delta) &= \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{k}, p} G_{\phi d}(\mathbf{k}, \omega_p) \\
 &\quad \times \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - i\omega_p\Delta], \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Delta) &= \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{k}, p} G_{bd}(\mathbf{k}, \omega_p) \\
 &\quad \times \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - i\omega_p\Delta], \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Delta) &= \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{k}, m} G_{cd}(\mathbf{k}, \omega_p) \\
 &\quad \times \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - i\omega_p\Delta]. \quad (25)
 \end{aligned}$$

现在, 我们可以研究原子气体从光晶格中释放并在空间中自由膨胀一段时间后在实空间的二阶关联函数, 而此时实空间中的二阶关联函数仍旧包含了初始光晶格中冷原子的关联信息. 经过时间为  $t$  的自由膨胀后, 实空间的密度-密度关联函数可以通过下式计算:

$$\begin{aligned}
 G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \left(\frac{m}{\hbar t}\right)^6 |W(\mathbf{k})|^2 |W(\mathbf{k}')|^2 \\
 &\quad \times G^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|_{\mathbf{k}=\frac{m\mathbf{r}}{\hbar t}, \mathbf{k}'=\frac{m\mathbf{r}'}{\hbar t}}, \quad (26)
 \end{aligned}$$

这里  $m$  是原子的质量,  $W(\mathbf{k})$  则是 Wannier 函数的傅里叶变换. 因为外加势阱通常可以用简谐势阱近似, 所以  $W(\mathbf{k})$  具有如下形式

$$\left|W\left(\frac{m\mathbf{r}}{\hbar t}\right)\right|^2 \approx \frac{1}{\pi^{3/2}w_t} \exp\left(-\frac{r^2}{w_t^2}\right), \quad (27)$$

这里  $w_t = \frac{\hbar t}{mw_0}$  表示经过  $t$  秒的自由演化之后 Wannier 函数在空间上的分布宽幅.

图 1 给出了从二维平方晶格中释放的超冷玻色气体在各种不同情形下沿着对角方向  $Q(\mathbf{r}) = (nb_x, nb_y)$  (这里  $Q(\mathbf{r}) = \frac{m\mathbf{r}}{\hbar t}$  具有动量的量纲,  $b_x$  和  $b_y$  代表平方晶格在二维空间的倒格矢长度) 的关联函数  $G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . 当  $U \gg t$  时, 我们可以忽略原子在晶格间的跳转效应, 这时整个冷原子系统处于绝缘态. 在这种情况下, 冷原子的关联函数的一个突出的特点是在对角方向即  $Q(\mathbf{r}_1) = Q(\mathbf{r}_2) + j(b_x, b_y)$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 方向表现出强劲的关联信号. 这表明此种状态下的冷原子系统无长程相干性, 只显示了典型的玻色子的聚集效应 (bunching). 当冷原子体系处于超流态时, 即  $U \ll t$  时, 密度-密度关联图样中散落在角落的尖峰则反映了冷原子系统的长程相干性, 图片显示干涉尖峰分布在  $Q(\mathbf{r})$  等于晶格的倒格矢量的位置.

由于粒子间相互作用的存在, 超冷玻色子气体不可能处于纯超流态, 体系中总是存在着一定量的量子损耗 (quantum depletion), 即总有一部分粒子处于非零的动量态. 在图 2 中, 我们取  $G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  的对数值并重绘了图 1(c) 和 (d) 的结果. 当超冷原子气体处于超流态时, 除了表明强关联的尖峰之外, 从图 2 中还可以观察到量子损耗部分造成的关联效应: 1) 同线关联——沿着对角方向的亮纹来源于玻色子的统计效应, 即玻色聚集效应; 2) 背对背关联——沿着反对角线方向即  $Q(\mathbf{r}_1) = -Q(\mathbf{r}_2) + j(b_x, b_y)$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 的亮纹则表示两个相反方向的粒子的关联, 这一部分关联信息则来自于超冷原子系统的二元弹性碰撞<sup>[28,29]</sup>. 上述超冷原子气体处于超流态的关联函数特性与适用于超流态 (弱相互作用) 的 Bogoliubov 理论得出的结论是完全一致的<sup>[28]</sup>. 而与处于超流态的冷原子气体形成强烈对比的是处于绝缘



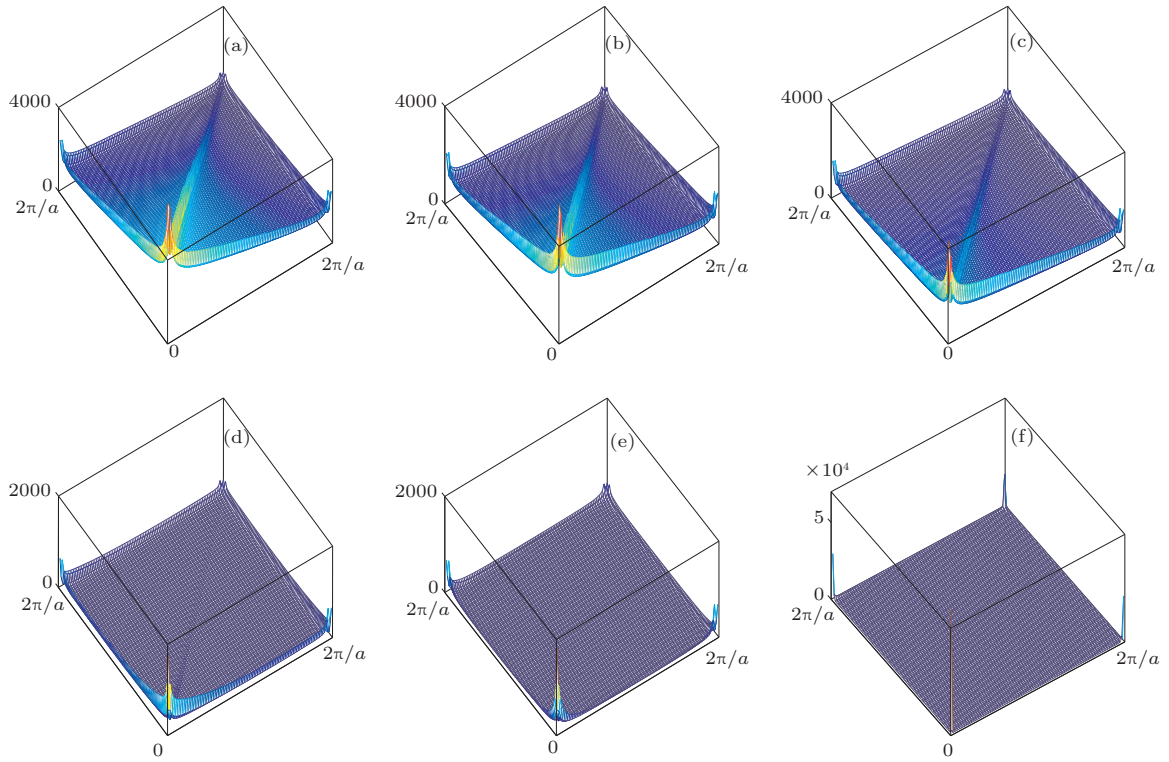


图1 从二维平方晶格中释放的超冷玻色气体在从绝缘态到超流态过渡过程中的密度-密度关联函数, 图中(a)–(f) 参数  $t/U$  分别为 0.005, 0.007, 0.05, 0.5, 1, 1.3, 而参数  $\mu/U = 0.5$

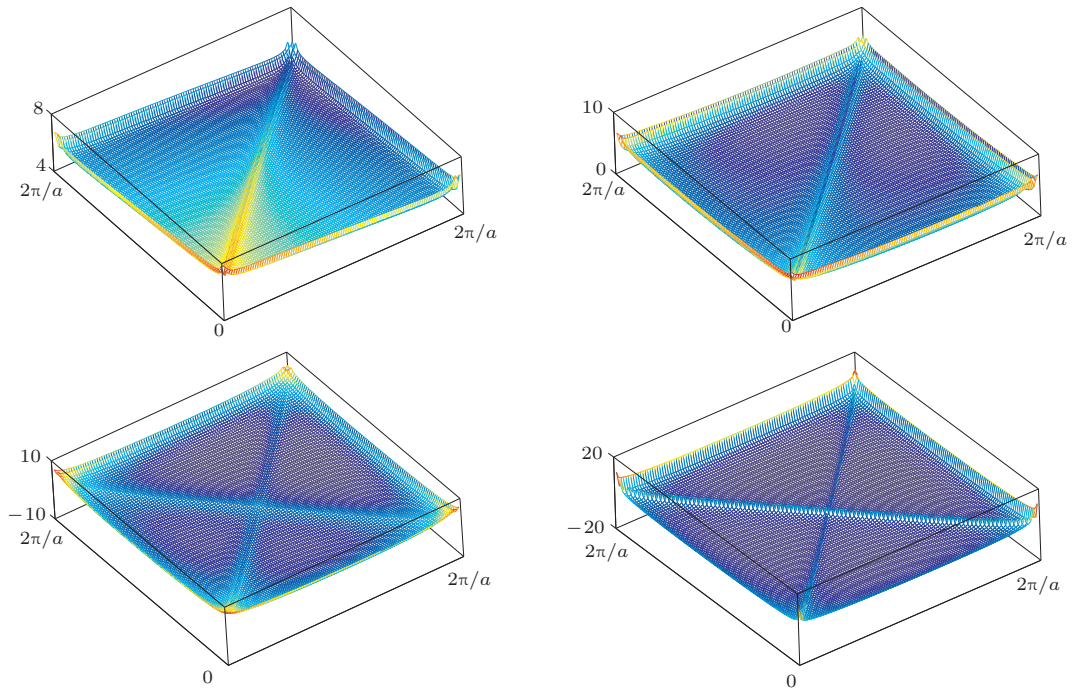


图2 图1(c)–(f)中关联函数取对数值的结果, 当超冷原子气体处于超流态时, 可以清楚看到两个相反方向的量子损耗部分的粒子的关联 (背对背关联)

态的超冷原子气体则只有同线关联, 而无显著的背对背关联效应.

为了刻画从绝缘态到超流态转变过程的超冷原子气体的关联特点, 我们定义如下函数

$$\alpha = \frac{\bar{G}_{x,-x}}{G_{\min}} - 1, \quad (28)$$

这里  $\bar{G}_{xx}$ ,  $\bar{G}_{x,-x}$ , 和  $G_{\min}$  分别表示关联函数  $G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  在沿着对角方向的平均值、反对角方

向的平均值和关联函数的最小值. 图3描绘了参量 $\alpha$ 与参数 $t/U$ 的关系. 结果表明, 当超冷原子处于超流态时, 背对背关联效应较强, 表明系统具有长程序. 而当超冷原子气体处于绝缘态时, 背对背关联效应非常微弱, 表明系统强相互作用导致的相位涨落破坏了系统的长程序<sup>[40]</sup>.

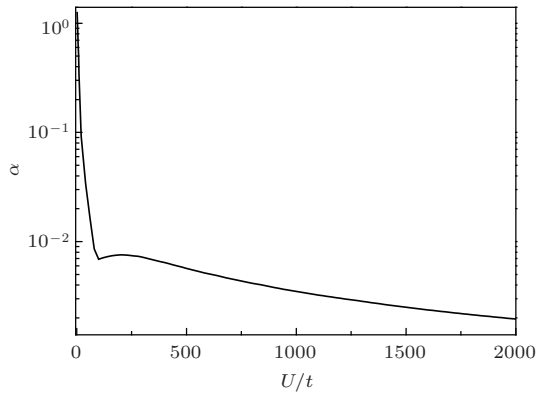


图3 参量 $\alpha$ (28)式) 随着参数 $U/t$ 的变化趋势, 计算中 $\mu/U = 0.5$

## 4 结 论

本文利用量子旋转规范理论详细研究了从二维光晶格中释放的超冷原子气体的空间密度-密度关联函数. 由于量子旋转规范理论这一理论体系可以定性处理处于一切参数情形下的Bose-Hubbard模型, 原则上可以计算初始处于光晶格中任意状态下的超冷玻色气体在释放过程中的密度-密度关联函数. 本文展示了当超冷玻色气体逐渐从绝缘态向超流态过渡的过程中超冷原子气体密度-密度关联函数的特性. 本文的理论结果符合相应的实验观测结果, 与现有的其他理论的结果亦是符合的.

## 参考文献

- [1] Greiner M, Mandel O, Esslinger T, Hansch T W, Bloch I 2002 *Nature* **415** 39
- [2] Bloch I 2005 *Nat. Phys.* **1** 23
- [3] Hen I, Rigol M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043634
- [4] Xu Z J, Wang D M, Li Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3076 (in Chinese)[徐志君, 王冬梅, 李珍 2007 物理学报 **56** 3076]
- [5] Xu Z J, Chen C, Yang H S, Wu Q, Xiong H W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2835 (in Chinese)[徐志君, 程成, 杨欢, 武强, 熊宏伟 2004 物理学报 **53** 2835]
- [6] Jaksh D, Bruder C, Ciria J I, Gardiner C W, Zoller P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3108

- [7] Kampf A P, Zimanyi G T 1993 *Phys. Rev. B* **47** 279
- [8] Freeriks J K, Monien H 1996 *Phys. Rev. B* **53** 2691
- [9] Elstner N, Monien H 1999 *Phys. Rev. B* **59** 12184
- [10] Sheshadri K, Krishnamurthy H R, Pandit R, Ramakrishnan T V 1993 *Europhys. Lett.* **22** 257
- [11] Sengupta K, Dupuis N 2005 *Phys. Rev. A* **71** 033629
- [12] Spielman I B, Phillips W D, Porto J V 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 080404
- [13] Polak T P, Kopeć T K 2007 *Phys. Rev. B* **76** 094503
- [14] Polak T P, Kopeć T K 2009 *Annalen der Physik* **17** 947
- [15] Polak T P, Kopeć T K 2009 *J. Phys. B* **42** 095302
- [16] Kopeć T K 2004 *Phys. Rev. B* **70** 054518
- [17] Polak T P, Kopeć T K 2010 *Phys. Rev. A* **81** 043612
- [18] Polak T P, Kopeć T K 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053613
- [19] Zaleski T A 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043611
- [20] Polak T P, Zaleski T A 2012 *Acta Phys. Pol. A* **121** 1312
- [21] Zaleski T A, Polak T P 2011 *Phys. Rev. A* **83** 023607
- [22] Capogrosso-Sansone B, Söyler S G, Prokof'ev N, Svistunov B 2008 *Phys. Rev. A* **77** 015602
- [23] Teichmann N, Hinrichs D, Holthaus M, Eckardt A 2009 *Phys. Rev. B* **79** 100503
- [24] Li Y Y, Cheng M T, Zhou H J, Liu S D, Wang Q Q 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2960
- [25] Chen L M, Cao L, Wu D J 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2500
- [26] Schellekens M, Hoppeler R, Perrin A, Gomes J V, Boiron D, Aspect A, Westbrook C I 2005 *Science* **310** 648
- [27] Fölling S, Gerbier F, Widera A, Mandel O, Gericke T, Bloch I 2005 *Nature* **434** 481
- [28] Spielman I B, Phillips W D, Porto J V 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 080404
- [29] Rom T, Best T, Oosten D, Schneider U, Fölling S, Paredes B, Bloch I 2006 *Nature* **444** 733
- [30] Wang M Y, Liang J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 060305
- [31] Xu Z J, Liu X Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120305 (in Chinese)[徐志君, 刘夏吟 2011 物理学报 **60** 120305]
- [32] Xu Z J, Li P H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5607 (in Chinese)[徐志君, 李鹏华 2007 物理学报 **56** 5607]
- [33] Huang J S, Chen H F, Xie Z W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3435 (in Chinese)[黄劲松, 陈海峰, 谢征微 2008 物理学报 **57** 3435]
- [34] Teng F, Xie Z W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 026701 (in Chinese)[滕斐, 谢征微 2013 物理学报 **62** 026701]
- [35] Toth E, Rey A M, Blakie P B 2008 *Phys. Rev. A* **78** 013627
- [36] Hu Y H, Wang J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 014203
- [37] Xu Z J, Zhang D M, Liu X Y 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 010305
- [38] Wu Z S, Zhang G 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 114208
- [39] Kheruntsyan K V, Jaskula J C, Deuar P, Bonneau M, Partridge G B, Ruaudel J, Lopes R, Boiron D, Westbrook C I 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 260401
- [40] Bouchoule I, Arzamasov M, Kheruntsyan K V, Gangardt D M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 033626

# Theory of density-density correlations between ultracold Bosons released from optical lattices<sup>\*</sup>

Li Yan<sup>†</sup>

(School of Physics and Electronics, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

( Received 18 October 2013; revised manuscript received 13 November 2013 )

## Abstract

The density-density correlations of ultracold Bosons released from a two-dimensional square optical lattice are investigated based on the quantum phase field  $U(1)$  rotor field. With the effects of the particle number fluctuations and the phase degrees of freedom taken into consideration, the theory can be used to describe the cold atom system with strong interaction. Using this theory, the characteristics of ultracold atom gas in the process in which the superfluid state of optical lattice transits to insulating state, are well described. The results show that in the patterns of the density-density correlations, the continuous diagonal lines gradually transit to scattered peaks. The results match the experimental ones. In addition, the effects of the quantum depletion on the density-density correlation are also included in the result, and the relevant conclusions are also consistent with the existing theoretical and experimental results.

**Keywords:** ultracold Bosonic gas, optical lattice, density-density correlations

**PACS:** 67.85.Hj, 03.75.Kk, 05.30.Jp, 67.10.Ba

**DOI:** 10.7498/aps.63.066701

---

<sup>\*</sup> Project supported by the “Special Program for Theoretical Physics” of the Chinese Academy of Sciences, the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11247299) and the Doctoral Fund of Hunan University of Arts and Science, China (Grant No. 13101038).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [liyan\\_2001@126.com](mailto:liyan_2001@126.com)