物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 20 (2014) 200204

概率假设密度滤波的物理空间意义*

翟岱亮† 雷虎民 李海宁 李炯 邵雷

(空军工程大学防空反导学院, 西安 710051)

(2014 年 5 月 15 日收到; 2014 年 6 月 5 日收到修改稿)

为了深入理解概率假设密度滤波, 本文在 Ozgur Erdinc 对随机集的物理空间假设的基础上, 采用 Bayes 公式和全概率公式对概率假设密度滤波的迭代过程进行了推导. 为有效改善概率假设密度滤波的目标漏检问题提供了理论基础.

关键词: 随机集, 概率假设密度滤波, 多目标跟踪

PACS: 02.50.Ey, 42.50.Ex **DOI:** 10.7498/aps.63.200204

1 引言

在多目标环境中, 由于目标运动、出现、消失及衍生等过程的存在, 目标的状态和数目都是随时间变化的. 此外, 由漏检、虚警及量测误差等问题带来的量测信息的不确定性也给目标跟踪带来很大困难. 传统的基于单目标跟踪的滤波算法 (如卡尔曼滤波及其扩展算法 [1−3]、粒子滤波及其扩展算法 [4−6] 等) 已不再适用. 处理多目标跟踪问题的方法主要有联合概率数据关联及其改进算法 [7]、多假设跟踪及其改进算法 [8] 以及其他智能算法 [9] 等, 但是这些算法需要对量测与目标进行数据关联或建立映射关系, 计算量庞大. 而由 Mahler[10] 提出的随机有限集理论及其衍生的随机集算法由于不需要进行复杂的数据关联而受到高度重视. 概率假设密度 (PHD) 滤波采用多目标随机集概率分布的一阶矩 (即 PHD) 进行迭代运算, 将复杂的多目标状态空间问题转换为单目标状态空间问题. 它有效避免了数据关联问题, 在保证跟踪精度的基础上, 极大地提高了算法实时性.

由于 PHD 滤波在迭代过程中存在集积分运算, 计算上难以实现, 所以 Vo 等先后提出了粒子 PHD 滤波方法和高斯混合 PHD 滤波方法, 解决了算法的实现问题. 随后, 人们根据不同的问题研究了 PHD 滤波的各种改进算法, 但是这些研究大都集中在算法的应用问题上, 对 PHD 滤波算法本身进行研究的相关文献较少 [11−15]. 为了便于人们理解, Erdinc 等 [16,17] 在 2006 年和 2009 年两次对 PHD 滤波的物理空间意义进行了解释, 但是其推导过程仍然存在一些不当之处. 为此, 本文在 Erdinc 的基础上对 PHD 滤波进行了更详细的推导, 对其不当之处进行了修正, 对推导过程中的假设条件进行了说明.

2 随机集理论基础

在多目标跟踪系统中, 随机集是指集合中每个目标的状态矢量 (即集合元素) 和目标数目 (即集合维数) 均在变化的集合. 令多目标状态随机集表示为

$$\boldsymbol{X}_k = \{\boldsymbol{x}_{k,1}, \boldsymbol{x}_{k,2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{k,N_k}\} \in F(\chi),$$

其中, $\boldsymbol{x}_{k,i}$ 表示 k 时刻第 i 个目标的状态矢量; N_k 表示 k 时刻状态随机集中的目标数目; 多目标观测随机集表示为

$$\boldsymbol{Z}_k = \{\boldsymbol{z}_{k,1}, \boldsymbol{z}_{k,2}, \cdots, \boldsymbol{z}_{k,M_k}\} \in F(\psi),$$

* 航空科学基金 (批准号: 20130196004) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: quietzdl@126.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

其中, $\boldsymbol{z}_{k,j}$ 表示 k 时刻第 j 个目标的观测矢量, 考虑到虚警情况, $\boldsymbol{z}_{k,j}$ 可能是来自杂波的观测; M_k 表示 k 时刻观测到的目标数目. $F(\chi)$ 和 $F(\psi)$ 分别表示目标状态空间 χ 和观测空间 ψ 上所有有限子集的集合.

若已知 $k-1$ 时刻的目标状态随机集为 $\boldsymbol{X}_{k-1}$, 则 k 时刻的目标状态随机集为

$$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{S}_{k|k-1}(\boldsymbol{x}) \bigcup \boldsymbol{B}_{k|k-1}(\boldsymbol{x}) \bigcup \boldsymbol{\Gamma}_k, \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{S}_{k|k-1}(\boldsymbol{x})$ 表示 $k-1$ 时刻的目标 $\boldsymbol{x}_{k-1} \in \boldsymbol{X}_{k-1}$ 到 k 时刻仍然存活的目标状态随机集, 存活概率为 $Pr_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})$; $\boldsymbol{B}_{k|k-1}(\boldsymbol{x})$ 表示 k 时刻由目标 $\boldsymbol{x}_{k-1} \in \boldsymbol{X}_{k-1}$ 衍生出的目标状态随机集; $\boldsymbol{\Gamma}_k$ 表示 k 时刻新生的目标状态随机集.

考虑虚警情况下, k 时刻目标的观测随机集可表示为

$$\boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{K}_k \bigcup \boldsymbol{\Theta}_k(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{K}_k$ 表示杂波观测随机集, 杂波点概率密度为 $c(\boldsymbol{z})$; $\boldsymbol{\Theta}_k(\boldsymbol{x})$ 表示源于真实目标的观测随机集, 检测概率为 $Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x})$.

3 PHD的物理空间意义

根据点过程理论, 随机集 $\boldsymbol{X}$ 在物理空间上可等价的表示为 $\sum_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}} \delta_{\boldsymbol{x}}$, $\delta_{\boldsymbol{x}}$ 为中心在 $\boldsymbol{x}$ 的Dirac delta函数. PHD滤波是多目标Bayes滤波的近似算法, 它在每个时间点上传播的不是多目标后验密度, 而是后验密度的一阶矩(后验强度函数), 从而降低计算复杂度. 则对于状态空间 χ 上的一个概率密度函数为 $f(\boldsymbol{X})$ 的目标随机集 $\boldsymbol{X}$, 其PHD可表示为

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{x}) &= E\left[\sum_{\varsigma\in\boldsymbol{X}} \delta_{\varsigma}(\boldsymbol{x})\right] \\ &= \int \left(\sum_{\varsigma\in\boldsymbol{X}} \delta_{\varsigma}(\boldsymbol{x})\right) f(\boldsymbol{X}) \delta\boldsymbol{X}, \end{aligned} \tag{3}$$

$D(\boldsymbol{x})$ 在区域 V 上的积分等于集合 $\boldsymbol{X}$ 在该区域内元素个数的均值 $\hat{N}_V$, 即

$$\hat{N}_V = \int |\boldsymbol{X}\cap V| P(\mathrm{d}\boldsymbol{X}) = \int_V D(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

根据Erdinc对随机集的物理空间假设, 目标的存在区域 V 可由无限个互不相交、体积足够小的区域 v_i 的并表示[16,17]. 即

$$V = \bigcup_i v_i. \tag{5}$$

另外, 还需假设 v_i 足够小以至于每个 v_i 内最多只能包含一个假设为质点的目标, 目标的状态值为 $\boldsymbol{x}_i$; 一个目标最多只能产生一个量测值 $\boldsymbol{z}_i$. 定义指示函数为

$$U(i) \triangleq \begin{cases} 1 & (v_i\text{中目标存在}) \\ 0 & (v_i\text{中目标不存在}) \end{cases}.$$

则当 $|v_i| \to 0$ 时, 区域 V 内元素个数的均值又可表示为

$$\begin{aligned} \hat{N}_V &= \sum_i P(U(i)=1) \\ &= \lim_{|v_i|\to 0} \left(\sum_i \frac{P(U(i)=1)}{|v_i|}|v_i|\right) \\ &= \int_V \sum_i \lim_{|v_i|\to 0} \frac{P(U(i)=1)}{|v_i|} \delta_{\boldsymbol{x}_i}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中, $P(U(i)=1)$ 表示区域 v_i 中目标存在的概率; $|v_i|$ 表示区域 v_i 的超体积. 由(4)式和(6)式可以看出, 区域 v_i 内的PHD可定义为

$$D(\boldsymbol{x}_i) \triangleq \lim_{|v_i|\to 0} \frac{P(U(i)=1)}{|v_i|}. \tag{7}$$

又根据(5)式及假设条件可得, $D(\boldsymbol{x}_i)$ 满足

$$D(\boldsymbol{x}) = \sum_i D(\boldsymbol{x}_i)\delta_{\boldsymbol{x}_i}(\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

而Erdinc仅直接给出了 $D(\boldsymbol{x}_i)$ 的定义, 意义不明确, 且没有建立 $D(\boldsymbol{x}_i)$ 与 $D(\boldsymbol{x})$ 的关系, 不易于人们对PHD物理空间意义的理解.

4 PHD滤波的物理空间意义

4.1 预 测

由(1)式可知, 在 $k-1$ 时刻所有小区域 v_i 内含有目标情况已知的条件下, 当不考虑衍生目标时, k 时刻小区域 v_i 内如果含有目标, 则该目标可能来自新生目标或 $k-1$ 时刻小区域 v_j 内的目标. 则 k 时刻小区域 v_i 内的目标预测存在概率可表示为

$$\begin{aligned} & P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}) \\ &= b(U_k(i)=1) + \sum_j p(U_k(i)=1|\boldsymbol{x}_j) \\ &\quad \times Pr_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}_j) P(U_{k-1}(j)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}), \end{aligned} \tag{9}$$

其中, $b(U_k(i)=1)$ 表示 k 时刻小区域 v_i 内产生新目标的概率; $p(U_k(i)=1|\boldsymbol{x}_j)$ 表示目标 $\boldsymbol{x}_j$ 由小区域 v_j 转移到小区域 v_i 内的转移概率; $P(U_{k-1}(j)=$

$1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})$ 表示 $k-1$ 时刻小区域 v_j 内的目标后验存在概率.

这里仿照 (7) 式给出如下定义:

$$b(\boldsymbol{x}_i) \triangleq \lim_{|v_i|\to 0} \frac{b(U_k(i)=1)}{|v_i|}, \tag{10}$$

$$f(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j) \triangleq \lim_{|v_i|\to 0} \frac{p(U_k(i)=1|\boldsymbol{x}_j)}{|v_i|}, \tag{11}$$

(10) 和 (11) 式分别表示新生目标的强度函数和目标的状态转移概率密度. 对 (9) 式两边取极限可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{|v_i|\to 0} \frac{P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}{|v_i|} \\
&= \lim_{|v_i|\to 0} \frac{b(U_k(i)=1)}{|v_i|} \\
&\quad + \lim_{|v_i|\to 0} \left(\sum_j \frac{p(U_k(i)=1|\boldsymbol{x}_j)}{|v_i|} \times Pr_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}_j) \right. \\
&\quad \left. \times \frac{P(U_{k-1}(j)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}{|v_j|} |v_j| \right).
\end{aligned} \tag{12}$$

把 (7), (10) 和 (11) 式代入 (12) 式可得

$$\begin{aligned}
&D_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_i) \\
&= b(\boldsymbol{x}_i) + \int_V \sum\nolimits_j f(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j) Pr_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}_j) \\
&\quad \times D_{k-1|k-1}(\boldsymbol{x}_j)\delta_{\boldsymbol{x}_j}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= b(\boldsymbol{x}_i) + \int_V f(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}) Pr_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) \\
&\quad \times D_{k-1|k-1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{13}$$

4.2 更 新

根据 (2) 式, k 时刻小区域 v_i 内被检测的目标可能来自 v_i 内真实存在的目标, 也可能来自杂波. 这里首先定义:

$$V(i) \triangleq \begin{cases} 1 & (v_i\text{中的目标被检测到}) \\ 0 & (v_i\text{中的目标未被检测到}) \end{cases}.$$

则此时目标区域 V 内被检测到的目标数目可表示为

$$|\boldsymbol{Z}_k| = \sum_j U_k(j) V_k(j) + N_\lambda, \tag{14}$$

其中, N_λ 表示来自杂波的观测目标数目, 这里假设虚警数目服从均值为 μ_λ 的泊松分布. 另外, 当 $|v_i|$ 足够小时, V 内小区域的个数趋于无穷, 假设每个小区域 v_i 内的目标存在情况相互独立, 则 V 内的来自真实目标的观测目标数近似服从泊松分布, 均值为

$$\mu_t \approx \lim_{|v_i|\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}) Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i), \tag{15}$$

从而可得, V 内被检测到的目标数服从均值为 $\mu = \mu_t + \mu_\lambda$ 的泊松分布.

根据 Bayes 公式, 在得到直到 k 时刻的检测目标的情况下, 小区域 v_i 内目标存在的后验概率可表示为

$$\begin{aligned}
&P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^k) \\
&= P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_k, |\boldsymbol{Z}_k|=m, \boldsymbol{Z}_1^{k-1}) \\
&= \frac{f(\boldsymbol{Z}_k, |\boldsymbol{Z}_k|=m|U_k(i)=1, \boldsymbol{Z}_1^{k-1})}{f(\boldsymbol{Z}_k, |\boldsymbol{Z}_k|=m|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})} \\
&\quad \times P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}),
\end{aligned} \tag{16}$$

而 Erdinc 对此公式的推导较为烦琐.

假设观测到的目标数目与目标分布情况相互独立, 各目标之间观测独立, 则

1) 当 $|\boldsymbol{Z}_k| = m = 0$ 时,

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{Z}_k, |\boldsymbol{Z}_k|=m|U_k(i)=1, \boldsymbol{Z}_1^{k-1}) \\
&= f(m=0|U_k(i)=1, V_k(i)\neq 1, \boldsymbol{Z}_1^{k-1}) \\
&\quad \times f(V_k(i)\neq 1|U_k(i)=1) \\
&= f(m=0|V-v_i, \boldsymbol{Z}_1^{k-1}) \\
&\quad \times f(V_k(i)\neq 1|U_k(i)=1) \\
&= \mathrm{e}^{-\mu'}(1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)),
\end{aligned} \tag{17}$$

$$f(\boldsymbol{Z}_k, |\boldsymbol{Z}_k|=m|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}) = \mathrm{e}^{-\mu}, \tag{18}$$

其中

$$\mu' = \mu_t' + \mu_\lambda, \tag{19}$$

$$\mu_t' \approx \lim_{|v_i|\to 0} \sum_{j, j\neq i}^{\infty} P(U_k(j)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}) Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_j). \tag{20}$$

而 Erdinc 在其推导过程中却忽略了小区域 v_i 对整个区域 V 内观测目标平均数目的影响, 缺乏严密性.

把 (17) 和 (18) 式代入 (16) 式, 可得

$$\begin{aligned}
&P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^k) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mu'}(1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))}{\mathrm{e}^{-\mu}} P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}) \\
&= \mathrm{e}^{\mu-\mu'}(1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)) P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}) \\
&\approx (1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)) P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}),
\end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$\mu-\mu'=\lim_{|v_i|\to 0}P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)\\ \approx 0. \tag{22}$$

2) 当 $|\boldsymbol{Z}_k|=m\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{Z}_k,|\boldsymbol{Z}_k|=m|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &=f(\boldsymbol{Z}_k|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})f(|\boldsymbol{Z}_k|=m|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &=f(\boldsymbol{Z}_k|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\frac{\mu^m\,\mathrm{e}^{-\mu}}{m!}.\end{aligned} \tag{23}$$

根据全概率公式

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{Z}_k,|\boldsymbol{Z}_k|=m|U_k(i)=1,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ =&f(\boldsymbol{Z}_k,|\boldsymbol{Z}_k|=m|U_k(i)=1,V_k(i)=1,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &\times f(V_k(i)=1|U_k(i)=1)\\ &+f(\boldsymbol{Z}_k,|\boldsymbol{Z}_k|=m|U_k(i)=1,V_k(i)\neq 1,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &\times f(V_k(i)\neq 1|U_k(i)=1)\\ =&f(\boldsymbol{Z}_k,|\boldsymbol{Z}_k|=m|U_k(i)=1,V_k(i)=1,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &\times Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)\\ &+f(\boldsymbol{Z}_k,|\boldsymbol{Z}_k|=m|U_k(i)=1,V_k(i)\neq 1,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &\times(1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)).\end{aligned} \tag{24}$$

假设每个量测来自同一的目标的概率相等, 则(24)式中

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{Z}_k,|\boldsymbol{Z}_k|=m|U_k(i)=1,V_k(i)=1,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &=\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{m}f(\boldsymbol{z}_s|U_k(i)=1,V_k(i)=1)\\ &\quad\times f(\boldsymbol{Z}_k(s^{\mathrm{c}}),|\boldsymbol{Z}_k|=m-1|V-v_i,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &=\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{m}f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i)f(\boldsymbol{Z}_k(s^{\mathrm{c}})|V-v_i,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &\quad\times f(|\boldsymbol{Z}_k|=m-1|V-v_i,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &=\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{m}f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i)f(\boldsymbol{Z}_k(s^{\mathrm{c}})|V-v_i,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &\quad\times\frac{\mu'^{(m-1)}\,\mathrm{e}^{-\mu'}}{(m-1)!},\end{aligned} \tag{25}$$

其中, $\boldsymbol{Z}_k(s^{\mathrm{c}})$ 表示量测 $\boldsymbol{z}_s$ 对量测集 $\boldsymbol{Z}_k$ 的补集, 来自 $V-v_i$ 区域的真实目标或杂波. 这里Erdin仍然忽略了小区域 v_i 对整个区域 V 内观测目标平均数目的影响. 同理可得

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{Z}_k,|\boldsymbol{Z}_k|=m|U_k(i)=1,V_k(i)\neq 1,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &=f(\boldsymbol{Z}_k|U_k(i)=1,V_k(i)\neq 1,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &\quad\times f(|\boldsymbol{Z}_k|=m|U_k(i)=1,V_k(i)\neq 1,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &=f(\boldsymbol{Z}_k|V-v_i,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\frac{\mu'^m\,\mathrm{e}^{-\mu'}}{m!}.\end{aligned} \tag{26}$$

把(23)和(24)式代入(16)式, 可得

$$\begin{aligned}&P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^k)\\ &=\frac{1}{f(\boldsymbol{Z}_k|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\dfrac{\mu^m\,\mathrm{e}^{-\mu}}{m!}}\\ &\quad\times\Bigg(\sum_{s=1}^{m}f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i)f(\boldsymbol{Z}_k(s^{\mathrm{c}})|V-v_i,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &\quad\times\frac{\mu'^{(m-1)}\,\mathrm{e}^{-\mu'}}{m!}Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)\\ &\quad+f(\boldsymbol{Z}_k|V-v_i,\boldsymbol{Z}_1^{k-1})\\ &\quad\times\frac{\mu'^m\,\mathrm{e}^{-\mu'}}{m!}(1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))\Bigg)\\ &\quad\times P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}).\end{aligned} \tag{27}$$

又由于

$$\lim_{|v_i|\to 0}(V-v_i)=V, \tag{28}$$

所以, 当 $|v_i|\to 0$ 时, 把(22)和(28)式代入(27)式, 可得

$$\begin{aligned}D_{k|k}(\boldsymbol{x}_i)&=\lim_{|v_i|\to 0}\frac{P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^k)}{|v_i|}\\ &=\lim_{|v_i|\to 0}\Bigg(\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^m\mathrm{e}^{\mu-\mu'}\Bigg((1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))\\ &\quad+\sum_{s=1}^{m}\frac{f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i)f(\boldsymbol{Z}_k(s^{\mathrm{c}})|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}{\mu' f(\boldsymbol{Z}_k|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}\\ &\quad\times Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)\Bigg)\Bigg)\\ &\quad\times\lim_{|v_i|\to 0}\frac{P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}{|v_i|}\\ &=\Bigg((1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))+\sum_{s=1}^{m}\frac{Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)}{\mu}f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i)\\ &\quad\times\frac{f(\boldsymbol{Z}_k(s^{\mathrm{c}})|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}{f(\boldsymbol{Z}_k|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}\Bigg)D_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_i)\\ &=\Bigg((1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))+\sum_{s=1}^{m}\frac{Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)}{\mu}\\ &\quad\times\frac{f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i)}{f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{Z}_k(s^{\mathrm{c}}),\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}\Bigg)D_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_i)\\ &=\Bigg((1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))+\sum_{s=1}^{m}\frac{Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)}{\mu}\\ &\quad\times\frac{f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i)}{f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}\Bigg)D_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_i),\end{aligned} \tag{29}$$

式中, $f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})$中的$\boldsymbol{z}_s$可以来自目标, 也可以来自杂波, 根据目标观测独立假设, 它等于$f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{Z}_k(s^{\mathrm{c}}),\boldsymbol{Z}_1^{k-1})$, 而Erdinc对它们的等价性进行了推导, 但是推导过程中限定$\boldsymbol{z}_s$的来源, 不符合全概率公式.

根据全概率公式

$$
\begin{aligned}
& f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}) \\
&= c(\boldsymbol{z}_s)P(\text{量测来自虚警}) \\
&\quad + \sum_i f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i)P(\text{量测来自}\boldsymbol{x}_i) \\
&= c(\boldsymbol{z}_s)\frac{\mu_\lambda}{\mu_\lambda+\sum\limits_i^{\infty}P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)} \\
&\quad + \sum_i f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i) \\
&\quad \times \frac{P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)}{\mu_\lambda+\sum\limits_i^{\infty}P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

当$|v_i|\to 0$时, 把(15)式代入(30)式可得

$$
\begin{aligned}
& \lim_{|v_i|\to 0} f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}) \\
&= \frac{1}{\mu}\bigg(c(\boldsymbol{z}_s)\mu_\lambda + \lim_{|v_i|\to 0}\sum_i f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i)Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i) \\
&\quad \times \frac{P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}{|v_i|}|v_i|\bigg) \\
&= \frac{1}{\mu}\bigg(c(\boldsymbol{z}_s)\mu_\lambda + \int_V f(\boldsymbol{z}_s|\gamma) \\
&\quad \times Pr_{\mathrm{D}}(\gamma)D_{k|k-1}(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\bigg),
\end{aligned}
\tag{31}
$$

式中, $\mu=\mu_t+\mu_\lambda$. 再把(31)式代入(29)式可得

$$
\begin{aligned}
D_{k|k}(\boldsymbol{x}_i) &= \lim_{|v_i|\to 0}\frac{P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k})}{|v_i|} \\
&= \left((1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)) + \sum_{s=1}^{m}\frac{Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)f(\boldsymbol{z}_s|\boldsymbol{x}_i)}{c(\boldsymbol{z}_s)\mu_\lambda+\int_V f(\boldsymbol{z}_s|\gamma)Pr_{\mathrm{D}}(\gamma)D_{k|k-1}(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma}\right)D_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_i).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

可以看出, (13)和(32)式即为PHD滤波的预测方程和更新方程.

5 PHD滤波的目标漏检问题

根据(21)式, 当没有目标被检测到, 即$m=0$时, k时刻小区域v_i内的目标存在概率可表示为

$$
P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k}) \approx (1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}). \tag{33}
$$

而根据目标存在的物理空间意义, k时刻区域v_i内没有目标被检测到时, 有两种情况: 一是v_i内不存在目标, 其概率可用目标预测不存在概率表示为

$$
P(U_k(i)=0|\boldsymbol{Z}_1^{k}) = 1-P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}). \tag{34}
$$

二是v_i内存在目标, 但是没有被检测到, 其概率可用目标预测存在概率和检测概率表示为

$$
P(U_k(i)=1,V_k(i)=0|\boldsymbol{Z}_1^{k}) = (1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}). \tag{35}
$$

从而可得此时区域v_i内的目标存在概率为

$$
\begin{aligned}
P'(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k}) &= \frac{P(U_k(i)=1,V_k(i)=0|\boldsymbol{Z}_1^{k})}{P(U_k(i)=0|\boldsymbol{Z}_1^{k})+P(U_k(i)=1,V_k(i)=0|\boldsymbol{Z}_1^{k})} \\
&= \frac{(1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}{(1-P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1}))+(1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})} \\
&= \frac{(1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i))P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}{1-Pr_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x}_i)P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^{k-1})}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

比较(33)和(36)式可知, $P(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^k) \leqslant P'(U_k(i)=1|\boldsymbol{Z}_1^k)$, 所以当没有目标被检测到时PHD滤波存在目标漏检问题.

6 结 论

本文在Erdinc对随机集的物理空间假设的基础上, 对PHD滤波进行了系统的推导, 对推导过程中的假设条件进行了说明. 可以发现, 在推导过程中仅用到Bayes公式和全概率公式, 易于理解. 为深入理解PHD滤波的算法本质, 改进算法的缺点, 从而更好地解决多目标跟踪问题提供了理论基础.

参考文献

[1] Gan L, Xiong B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210504 (in Chinese) [甘露, 熊波 2012 物理学报 **61** 210504]

[2] Zhang Z T, Zhang J S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 104601

[3] Wu X F, Wang Y N, Liu W T, Zhu Z Y 2011 *Chin. Phys. B* **20** 069201

[4] Sheng Z, Chen J Q, Xu R H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 069301 (in Chinese) [盛峥, 陈加清, 徐如海 2012 物理学报 **61** 069301]

[5] Bi J, Guan W, Qi L T 2012 *Chin. Phys. B* **21** 068901

[6] Leng H Z, Song J Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030505

[7] Kang J, Li Y B, Lin Y, Xie H 2013 *J. Syst. Eng. Electron.* **35** 1620 (in Chinese) [康健, 李一兵, 林云, 谢红 2013 系统工程与电子技术 **35** 1620]

[8] Ruan Y, Willett P 2004 *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **40** 1337

[9] Hu Z H, Feng J C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070505 (in Chinese) [胡志辉, 冯久超 2011 物理学报 **60** 070505]

[10] Mahler R 2003 *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **39** 1152

[11] Lin Z P, Zhou Y Y, An W 2012 *J. Infrared Millim. Waves* **31** 475 (in Chinese) [林再平, 周一宇, 安玮 2012 红外与毫米波学报 **31** 475]

[12] Liu Z X, Xie W X, Wang P, Yu Y 2013 *Sci. China F* **56** 102302

[13] Lian F, Han C Z, Liu W F, Liu J, Yuan X H 2012 *Sci. China F* **55** 501

[14] Li W L, Jia Y M, Du J P, Zhang J 2014 *Signal Process.* **94** 48

[15] Zhou X L, Li Y F, He B W 2014 *Signal Process.* **94** 650

[16] Erdinc O, Willett P, Bar-Shalom Y 2006 *Signal and Data Processing of Small Targets 2006* Kissimmee, FL Republic, April 18–20, 2006 pp623,619

[17] Erdinc O, Willett P, Bar-Shalom Y 2009 *IEEE Trans. Signal Process.* **57** 4232

Derivation of the probability hypothesis density filter via the physical-space approach*

Zhai Dai-Liang† Lei Hu-Min Li Hai-Ning Li Jiong Shao Lei

(*School of Air and Missile Defense, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China*)

(Received 15 May 2014; revised manuscript received 5 June 2014)

Abstract

In order to well understand the probability hypothesis density, according to the physical-space model given by Ozgur Erdin, we deduce the probability hypothesis density filter function with the Bayes theorem and the total probability theorem. The derivation result is identical to the result in the literature, and the derivation process is described in detail. The results in this paper will provide a theoretical basis for solving the target-death problem.

Keywords: random set, probability hypothesis density filter, multi-target tracking

PACS: 02.50.Ey, 42.50.Ex **DOI:** 10.7498/aps.63.200204

* Project supported by the Aeronautical Science Fund, China (Grant No. 20130196004).

† Corresponding author. E-mail: quietzdl@126.com