

# 三维湍流 Rayleigh-Bénard 热对流的高效并行直接求解方法\*

张义招 包芸†

(中山大学力学系, 广州 510275)

(2014 年 11 月 3 日收到; 2015 年 3 月 4 日收到修改稿)

高  $Ra$  数 Rayleigh-Bénard 热对流的湍流特性研究是当前国际上的一个热门研究课题, DNS 模拟计算是研究该课题的重要手段之一. 当计算规模增大而网格数巨大时计算工作难以实现, 高  $Ra$  湍流热对流的数值模拟研究面临重大挑战. 本文创建了大规模高效并行计算的三维湍流热对流直接求解方法. 采用 FFT 变换解耦压力泊松方程, 将其变换成沿  $z$  方向上的块三对角方程组, 并利用块三对角方程的 MPI 与 OpenMP 联立的大规模高效并行近似解求解方案, 创建了可以高效并行计算的热对流直接求解方法. 通过对该方法并行效率的验证计算, 证明新的直接求解并行计算方法具有很好的并行效率和计算时效. 三维窄方腔热对流的计算结果表明, 本文方法计算的三维热对流特性是合理的. 本文创建的可大规模高效并行计算的三维湍流热对流直接求解方法, 也很可能是关于计算流体力学不可压 NS 方程大规模高效并行计算在特殊情况中计算技术上的一个突破.

**关键词:** 泊松方程直接求解, 并行计算, Rayleigh-Bénard 热对流, DNS

**PACS:** 47.27.te

**DOI:** 10.7498/aps.64.154702

## 1 引言

热对流广泛存在于天体、太阳、地球地幔、大气、海洋环流等自然界运动, 以及核反应堆堆芯冷却系统、化工产品生产、电子元件设计等工程应用领域中. 热对流研究对天体内部运动规律、全球气候变化、海洋环流、地磁变化、反应堆设计等问题具有重要意义. 作为一种典型的热对流运动, Rayleigh-Bénard 热对流 (RB 对流) 是一种由底部水平平板加热流体后所形成的位于两个平行平板之间流体自然对流过程. 由于实验和分析的简便性, 使得 RB 对流成为热对流研究领域中最为典型的流动现象<sup>[1]</sup>. 近两年最新的实验一直努力增加  $Ra$  数的范围, 已做到了  $10^{12} \leq Ra \leq 10^{15}$ , 并得到了  $Nu(Ra)$  的标度关系<sup>[2,3]</sup>.

RB 对流的直接数值模拟 (DNS) 可以得到全场

的流动信息, 但是 DNS 数值模拟需要花费大量的计算资源. 随着计算机计算能力的不断提高, 国际上这方面的研究在近几年得到发展. Ahlers 等在对湍流热对流研究的综述中指出, 相对于实验研究, RB 热对流的 DNS 模拟研究存在的主要困难是需要巨大计算工作量<sup>[4]</sup>. 近几年, 热对流的数值模拟研究正在向高  $Ra$  数的 RB 对流计算进发. 宽高比为  $1/2$  的高  $Ra$  数计算结果较早获得<sup>[5]</sup>. Shishkina 和 Wagner 模拟计算热对流, 使用了限体积法计算了  $Ra \leq 2 \times 10^9$  的情况, 而对  $Ra = 2 \times 10^{10}$  的情况则引入了大涡模型<sup>[6,7]</sup>. Stevens 等采用 DNS 计算了三维圆柱体内的 RB 热对流, 其中  $\Gamma = 0.5$  和  $Pr = 0.7$ ,  $Ra$  数从  $2 \times 10^6$  到  $2 \times 10^{11}$ , 所用最大网格数为  $(N_\theta \times N_r \times N_z)$   $1081 \times 351 \times 1301$ <sup>[8]</sup>.

高  $Ra$  的 RB 热对流数值模拟面临重大挑战. 随着  $Ra$  数的提高, 计算规模不断增大而计算工作量巨大, 计算难以实现, 从而造成数值模拟高  $Ra$  数

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11372362) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 14lgjc02) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: stsby@mail.sysu.edu.cn

RB对流的研究瓶颈. 目前RB热对流的DNS数值模拟计算 $Ra$ 只达到了 $10^{12}$ 的水平. 相对于实验研究, RB热对流的数值计算研究的 $Ra$ 数大约要低两个数量级. 高 $Ra$ 数湍流热对流的大规模DNS计算成为热对流研究工作者们特别关注的问题.

超级计算机硬件技术的快速发展, 为高 $Ra$ 数RB对流DNS数值模拟的进一步发展提供了技术支持. “天河二号”的问世使热对流的DNS模拟计算有了更好的计算工具. 在热对流DNS模拟的大规模并行计算中, 压力泊松方程的求解是一个难题. 一方面以往的迭代求解方法虽容易实现并行计算, 但迭代计算的过程占用了大量的计算时间; 另一方面已有的压力泊松方程的直接求解方法又不易于并行. 因此, 高 $Ra$ 数RB对流的求解很难实现大规模高效并行计算, 也就妨碍了高 $Ra$ 数湍流热对流DNS模拟的进一步发展. 一种新的针对块三对角泊松方程的近似求解方案<sup>[9,10]</sup>, 实现了泊松方程在超级计算机上高效并行求解. 这使得创建不可压流动DNS模拟的可高效并行求解计算方法, 并在超级计算机上实现三维高 $Ra$ 数湍流热对流特性研究的数值模拟成为可能.

## 2 三维热对流计算控制方程

在boussinesq假设下, 无量纲化后的三维热对流方程为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V &= -\nabla p + \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \nabla^2 V + \theta \mathbf{k}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (V \cdot \nabla) \theta &= \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \nabla^2 \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

计算边界条件为

$$\begin{aligned} x=0, \quad x=l_x, \quad V=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ x=0, \quad x=l_y, \quad V=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ z=0, \quad V=0, \quad \theta_b &= 0.5, \\ z=l_z, \quad V=0, \quad \theta_t &= -0.5, \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $V$ 为速度矢量,  $p$ 为压力,  $\theta$ 为温度.

无量纲参数 $Ra = \frac{\beta g \Delta \theta H^3}{\kappa \nu}$ 为瑞利数, 是浮力驱动力与阻碍运动的力两者相对大小,  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ 为普朗特数, 决定系统中黏性边界层和温度边界层的尺度比例.  $\beta$ 为热膨胀系数,  $g$ 为重力加速度,  $\Delta \theta$ 为

上下壁面温差,  $H$ 为下下壁面距离,  $\nu$ 为运动黏性系数,  $\kappa$ 为热扩散率.

## 3 数值计算方法

通过热对流方程组可以看出, 整个计算过程实际上就是数值求解不可压NS方程组联立一个温度的对流扩散方程. 其中投影法是数值求解不可压NS方程组的有效方法之一.

### 3.1 投影法基本思路

本文基于投影法<sup>[11]</sup>的思路求解热对流方程. 投影法是一种分步法, 对于热对流方程组, 显示投影法由以下步骤组成.

1) 第一步: 预估速度.

2) 第二步: 修正压力. 通过下式对预估速度进行修正.

$$\frac{V^{n+1} - V^*}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot V^{n+1} = 0. \quad (4)$$

在修正步中, 要求修正后的速度 $V^{n+1}$ 散度为零. 对(3)式取散度后得到如下压力泊松方程:

$$\nabla^2 \cdot p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\nabla \cdot V^*). \quad (5)$$

其边界条件为法向压力梯度等于零. 该泊松方程的源项由预估步给出, 可求出压力 $p^{n+1}$ .

3) 第三步: 校正速度.

4) 第四步: 求解温度. 与一般不可压黏性流动计算不同, 热对流需要耦合求解热对流扩散方程. 利用所求得的 $V^{n+1}$ 求解 $\theta^{n+1}$ .

### 3.2 网格布置和离散格式

本文的计算区域为窄方腔, 见图1, 网格数为 $n_x \times n_y \times n_z$ . 在规模并行计算时, 计算区域是沿 $xoy$ 平面对 $z$ 方向进行水平分割. 图中水平线中的较粗的是表示MPI的计算区域分割面, 在此处需要计算数据通讯, 区域内部则可用无需数据通讯传递的OpenMP并行. 由于本文压力泊松的直接求解中要用到二维快速傅里叶离散余弦变换(discrete cosine transform, DCT, 是FFT变换的一种)<sup>[12]</sup>, 计算中在 $x$ 和 $y$ 方向必须采用等距网格, 而且最好网格数是 $2^k$ , 有利于FFT的快速变换.  $z$ 方向的计算网格可根据需要采用不同的网格步长分布. 在热

对流的计算中, 上下底板存在热边界层, 通常都会在上下底板附近加密计算网格, 采用非等距的网格分布.

本文计算速度、压力和温度差分时使用交错网格系统<sup>[13]</sup>, 在时间方向的离散精度是一阶的, 空间使用二阶精度离散格式.

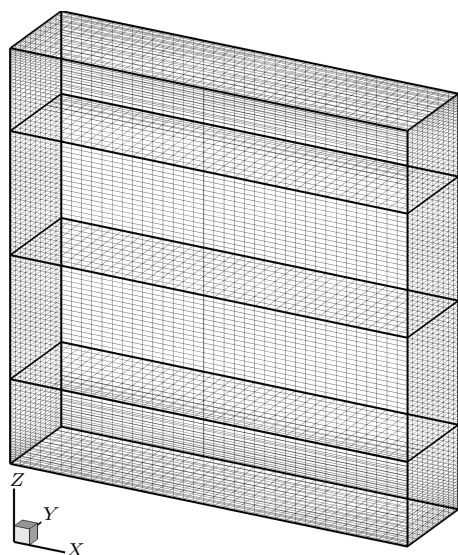


图1 计算网格及并行计算的分割

Fig. 1. computational grid and parallel computing of division.

### 3.3 不可压湍流热对流的并行求解方案

投影法1), 3), 4) 中的速度和温度的全场差分计算都采用显示格式, 较容易实现并行求解. 2) 压力泊松方程需要全流场联立求解, 是整个计算中最费时的部分, 也是三维湍流热对流大规模高效并行计算的难点. 设计针对压力泊松方程合理高效的以及可以大规模并行计算的求解方案, 是解决三维湍流热对流的大规模并行计算及提高效率的关键.

建立三维泊松方程可并行计算的直接求解方法. 首先在 $xy$ 平面上使用二维FFT变换, 将原来在空间三个方向上都要求联立求解的压力泊松方程解耦, 使泊松方程变换成为只在 $z$ 方向上的块三对角方程, 设计可并行计算且高效的求解该块三对角方程方法, 得到方程的解后再使用对应的反变换, 即实现了可以高效大规模并行计算的泊松方程直接求解.

压力泊松方程为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = d. \quad (6)$$

在 $x$ 和 $y$ 方向使用等距网格,  $z$ 方向使用变距网格, 二阶精度中心差分离散的压力泊松方程可写成如下形式:

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i-1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} \\ & + \frac{p_{i,j-1,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} \\ & + \frac{2p_{i,j,k-1}}{(\Delta z_k + \Delta z_{k-1}) \Delta z_{k-1}} - \frac{2p_{i,j,k}}{\Delta z_k \Delta z_{k-1}} \\ & + \frac{2p_{i,j,k+1}}{(\Delta z_k + \Delta z_{k-1}) \Delta z_k} = d_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (7)$$

使用FFT变换可以将全场联立的泊松方程在 $x$ 和 $y$ 方向上解耦. 二维离散余弦傅里叶变换

$$\begin{aligned} \hat{p}_{u,v,k} = & \sqrt{\frac{4}{MN}} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \alpha_i \beta_j p_{i,j,k} \\ & \times \cos \frac{\pi i u}{M} \cos \frac{\pi j v}{N}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $M$ 和 $N$ 分别对应 $nx$ 和 $ny$ .

$$\begin{aligned} \alpha_i = & \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = 0, M, \\ 1, & 1 \leq i \leq M-1, \end{cases} \\ \beta_i = & \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = 0, N, \\ 1, & 1 \leq i \leq N-1. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

以上变换可以通过使用FFTW软件包<sup>[14]</sup>实现. 变换的过程可以天然地并行, 而且压力泊松方程在FFT的变换过程均能自动满足压力边界条件. 将变换(8)式代入压力泊松方程并令展开式两边对应系数相等, 可以得到 $(M+1) \times (N+1)$ 个三对角方程, 这些三对角方程可以写成块三对角的形式

$$A\hat{p} = \hat{d}, \quad (10)$$

其中 $A = (A_i, B_i, C_i)$ 是一个块三对角矩阵;  $A_i, C_{i-1}$  ( $1 \leq i \leq nz$ ),  $B_i$  ( $0 \leq i \leq nz$ ) 是 $M \times N$ 阶的矩阵;  $\hat{p} = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T$ ,  $\hat{d} = (\hat{d}_1^T \dots \hat{d}_n^T)^T$ ,  $\hat{p}$ 和 $\hat{d}$ 分别是未知和已知的 $M \times N$ 维列向量, 其中 $\hat{d}$ 可以使用变换(8)式先求得.

利用FFT变换解耦泊松方程, 而后追赶法求解三对角方程的二维热对流DNS模拟直接解法<sup>[15]</sup>, 比起采用迭代求解泊松方程的热对流计算方法在计算机单线程计算上有效很多, 但该直接方法不容易进行高效的大规模并行计算. 数学和计算机的研究者们进行了大量的研究, 建立了块三对角方程MPI与OpenMP联立的大规模高效并行求解方案<sup>[9,10]</sup>, 通过有效的近似解设计, 大大减少了并

行计算中的通讯数据量,并得到了很好的结果.高效并行近似求解块三对角方程,是实现快速并行计算求解泊松方程直接求解的关键步骤.

求解出块三对角方程的解后,通过对应FFT变换式

$$p_{i,j,k} = \sqrt{\frac{4}{MN}} \sum_{u=0}^M \sum_{v=0}^N \alpha_u \beta_v \hat{p}_{u,v,k} \times \cos \frac{\pi ui}{M} \cos \frac{\pi vj}{N}, \quad (11)$$

可得到 $p^{n+1}$ ,从而完成高效可大规模并行计算的泊松方程直接求解.

由于建立了压力泊松方程高效并行近似求解的直接计算方法,大大的提高了整个三维热对流的计算效率.正是利用在这个可以大规模高效并行的块三对角近似求解计算方案的基础上建立的三维泊松方程直接求解,本文创建了三维湍流热对流高效并行直接求解计算方法,使得实现三维热对流的规模高效并行计算DNS模拟,甚至很多不可压流动NS方程的规模高效并行计算DNS模拟成为可能.

#### 4 规模并行计算效率

在超级计算机“天河二号”上进行了本文建立的三维热对流直接求解并行计算方法的加速比测试.“天河二号”超级计算机的每个计算节点有24个计算物理核心.表1列出了两组测试算例的计算网格数和物理计算核心数.

图2是采用不同计算核数时算法的加速比,其中加速比以24核心数为单位,由此1536核是24核心数的64倍.可以看到使用64节点 $64 \times 24 = 1536$ 核心数时,B组具有约67%的计算效率,明显高于A组,并且B组的加速比随计算机核数的进一步增加仍有很好的可增长性.对用64节点较多计算机核数时B组较高的计算效率可能是因为本文的直接求解并行算法,由于FFT变换的需要,在并行的区域分割上只在 $z$ 方向上横切.然而A组在 $z$ 方向

上的网格数仅为768,也就是每两个计算机核计算一层网格,在做二维DCT变换时有一半计算机核在等待,而B组对计算网格进行了加倍,所以并行效率有明显的提高.由此可见本文创建的三维热对流DNS并行计算的直接求解方法,在规模并行计算时 $z$ 方向网格数和计算核心数之间有一定关联.计算网格数目规模增大,相应的规模并行计算效率可能会提高.

表1 测试算例布置  
Table 1. The test cases.

group	$nx \times ny \times nz$	nodes	cores
A	$512 \times 64 \times 768$	4	$4 \times 24$
A	$512 \times 64 \times 768$	8	$8 \times 24$
A	$512 \times 64 \times 768$	16	$16 \times 24$
A	$512 \times 64 \times 768$	32	$32 \times 24$
A	$512 \times 64 \times 768$	64	$64 \times 24$
B	$1024 \times 128 \times 1536$	4	$4 \times 24$
B	$1024 \times 128 \times 1536$	8	$8 \times 24$
B	$1024 \times 128 \times 1536$	16	$16 \times 24$
B	$1024 \times 128 \times 1536$	32	$32 \times 24$
B	$1024 \times 128 \times 1536$	64	$64 \times 24$

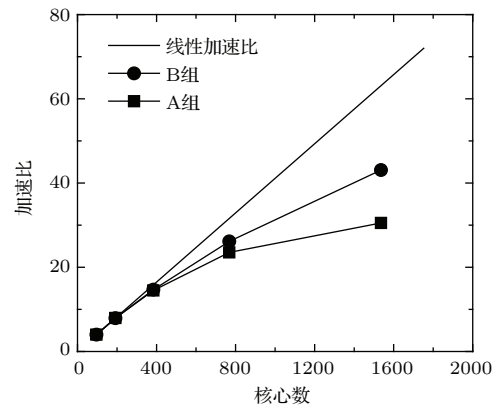


图2 算法的加速比

Fig. 2. the speed up ratio.

表2 直接求解并行计算方法的计算时间  
Table 2. Computation times of direct solution parallel method.

算法	计算机	计算网格数	计算机核数	10万次迭代时间/h
跳线迭代并行	天河一号(天津)	$1024 \times 128 \times 800$	1024(MPI)	86 <sup>[16]</sup>
直接求解并行	天河二号(广州)	$1024 \times 128 \times 1152$	$32 \times 24$ (MPI+OpenMP)	5.8



本课题组从事湍流热对流的并行计算研究以来,曾在两年前建立了奇偶跳线迭代求解压力泊松方程的热对流并行计算方法<sup>[16]</sup>.从表2中可以看到,本文新创建的利用块三对角并行近似求解压力泊松方程的热对流直接求解并行计算方法,在超级计算机上规模并行计算热对流流动所用的计算时间,比起两年前建立的奇偶跳线迭代求解并行计算方法有了一个数量级以上的巨大改进.进一步增加规模并行计算的计算机核数可以得到更好的成效.可见本文创建的三维热对流直接求解并行计算方法,为今后开展需要更大规模网格数,也即更高 $Ra$ 数的湍流热对流并行计算提供了计算技术上的有力支持.

## 5 三维湍流热对流计算结果

对宽高比 $\Gamma = 1/4$ 的方腔热对流进行了计算,选取 $Pr = 4.3$ 瑞利数 $Ra$ 分别为 $5 \times 10^7$ ,  $1 \times 10^8$ ,  $2 \times 10^8$ ,  $5 \times 10^8$ ,  $1 \times 10^9$ ,  $1 \times 10^{10}$ ,  $2 \times 10^{10}$ 的七

个算例,前五个算例流动为软湍流流动区域,后两个已到了硬湍流区.前五个算例计算网个采用 $512 \times 64 \times 768$ ,  $Ra$ 数10次方的两个算例网格数加密,为 $1024 \times 128 \times 1152$ .计算时间步数300万,其中200万时间步计算初场到湍流大尺度环流形成,后100万时间步计算湍流平均场.

图3给出了 $Ra = 10^9$ 时瞬时流线和温度等值面瞬时羽流分布.文中给出的速度和温度均是无量纲化的速度和温度值.温度作为一个主动标量,在热对流流场中在一定程度上被速度场带动,因此,羽流的运动规律与速度场的运动规律有很强的相关性.从图3(a)中可以看出,窄方腔热对流内部存在一个顺时针方向运动的大尺度环流,窄方腔内部的流体有顺时针做环形运动的总趋势.以温度等直面来表征羽流的运动状态,图3(b)中可以看到,在三维湍流热对流中上下底板发出的冷热羽流运动中羽流形态很复杂,在随着大尺度环流宏观运动的同时,羽流还有明显的旋转翻滚现象.

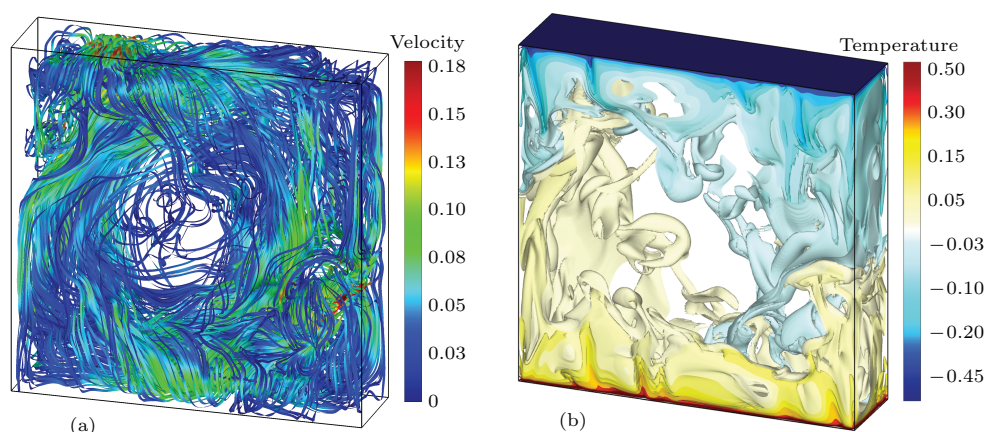


图3  $Ra = 10^9$  时瞬时流线和温度等值面瞬时羽流分布 (a) 瞬时流线; (b) 瞬时羽流分布

Fig. 3. Instantaneous streamlines and thermal plumes at  $Ra = 10^9$ : (a) instantaneous streamlines; (b) instantaneous thermal plumes.

图4给出了 $Ra = 10^9$ 时平均流线和温度等值面平均分布.从图4(a)的平均速度场流线图可以看到明显的大尺度环流和角涡,大尺度环流呈现椭圆型,角涡尺寸较大,总体上流动的速度值都不大.图4(b)中的平均温度等直面分布与图3(b)中的瞬时温度等直面分布对比看到,平均温度分布中湍流羽流的复杂运动形态都已消失,而平均温度分布有较明显的沿方腔四壁爬升的现象,四个壁面的温度基本对称分布.

图5给出了 $Ra = 2 \times 10^{10}$ 时平均流线和温度

等值面平均分布.由于此时流动已进入了硬湍流状态,与图4(a)中对比,图5(a)中的大尺度环流的运动已不再是一个椭圆形,而是更接近圆形,角涡的尺寸变小,且大尺度环流上的速度值明显增大.图5(b)中的平均温度等直面分布与图4(b)中的对比看到,温度的分布有了明显的变化,不再是四壁基本对称的一个分布,而是被大尺度环流带动,有着明显的温度随大尺度环流运动的现象.这些显著的流动变化对传热特性的影响值得更深入的探讨和研究.

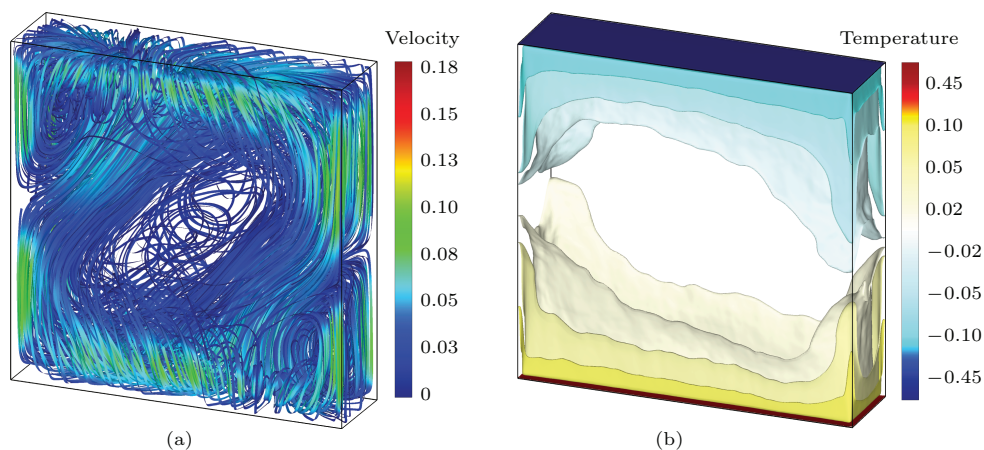


图4  $Ra = 10^9$  时平均流线和温度等值面平均分布 (a) 平均流线; (b) 平均温度分布

Fig. 4. Mean streamlines and thermal plumes at  $Ra = 10^9$ : (a) Mean streamlines; (b) mean thermal plumes.

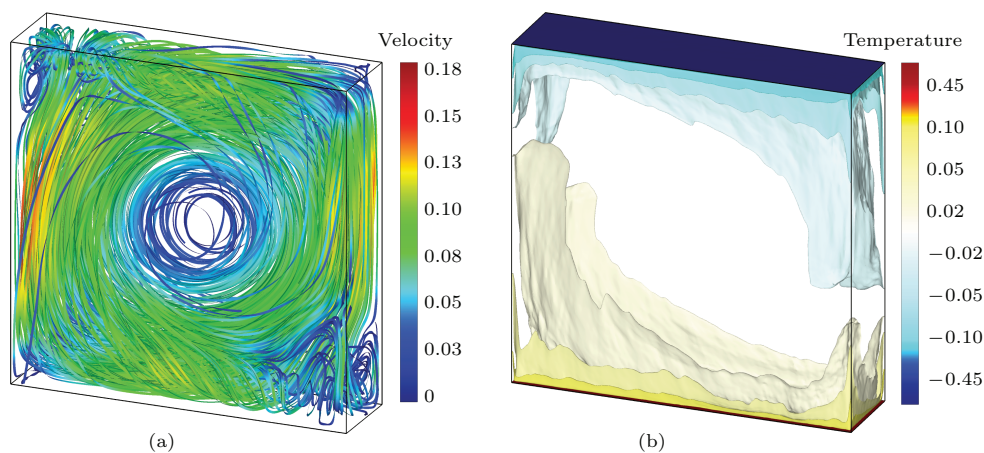


图5  $Ra = 2 \times 10^{10}$  时平均流线和温度等值面平均分布 (a) 平均流线; (b) 平均温度分布

Fig. 5. Mean streamlines and thermal plumes at  $Ra = 2 \times 10^{10}$ : (a) Mean streamlines; (b) mean thermal plumes.

我们将进一步分析软硬湍流状态下流动特征以及带来的传热特性变化, 并继续更高  $Ra$  的热对流 DNS 计算技术和模拟计算研究.

## 6 结 论

高  $Ra$  数的三维湍流热对流 DNS 数值模拟是研究湍流热对流的重要手段之一. 由于计算网格数巨大而计算工作难以实现, 形成 RB 对流数值模拟的研究瓶颈. 然而超级计算机硬件计算的飞速发展, 给计算流体力学的不断发展提供了有力的计算工具支持. 建立有效的可以高效并行的三维湍流热对流的 DNS 模拟的计算方法, 对数值研究高  $Ra$  数湍流热对流的物理特性有很重要的意义.

采用投影法计算三维热对流, 其中最难求解也是不易并行计算的部分是压力泊松方程的求解.

本文先采用 FFT 变换将三维的压力泊松方程解耦, 变换成沿  $z$  方向上的块三对角方程组. 利用块三对角方程的 MPI 与 OpenMP 联立的大规模高效并行近似求解方案, 本文创建了三维湍流热对流大规模高效并行计算的直接求解方法. 通过该方法并行效率的验证计算, 证明建立的新的直接求解并行计算方法具有很好的并行效率, 与以前的跳线迭代并行计算方法相比, 在计算时间上有一个质的巨大变化. 三维窄方腔热对流的计算结果对比表明本文的三维热对流计算结果是合理的.

本文创建的可大规模高效并行计算的三维湍流热对流直接求解方法, 为高  $Ra$  数的湍流热对流大规模高效并行计算和数值模拟研究提供了有价值的计算技术, 也很可能是关于计算流体力学不可压 NS 方程大规模高效并行计算在特殊情况中计算技术上的一个突破.

## 参考文献

- [1] Castaing G, Gunaratne F, Heslot L 1989 *J. Fluid Mech.* **24** 1
- [2] Puits R, Resagk C, Thess A 2010 *Phys. Rev. E* **81** 016307
- [3] He X, Funfschilling D, Nobach H, Bodenschatz E, Ahlers G 2012 *American Physical Society* **108** 024502
- [4] Ahlers G, Grossmann S, Lohse D 2009 *Review of Modern Physics* **81** 503 537
- [5] Stringano G, Verzicco R 2006 *J. Fluid Mech.* **548** 1
- [6] Shishkina O, Wagner C 2006 *J. Fluid Mech.* **546** 51
- [7] Shishkina O, Wagner C 2007 *Phys. Fluids* **19** 085107
- [8] Stevens R J A M, Verzicco R, Lohse D 2010 *J. Fluid Mech.* **643** 495
- [9] Zhang H, Zhang W, Sun X H 2008 *Ninth international conference on parallel and distributed computing, applications and technologies* (PDCAT2008)
- [10] Zhang W, Zhang H 2007 *J. Shanghai University* **13**(5) 498 (in Chinese) [张武, 张衡 2007 上海大学学报 **13**(5) 498]
- [11] Chorin A J 1967 *J. Comput. Phys.* **2** 12
- [12] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, Flannery B P 2007 *Numerical Recipes: The Art. of Scientific Computing* (3rd ed. )
- [13] Harlow F H, Welch J E 1965 *Phys. Fluids* **8** 2182
- [14] Frigo M, Johnson S G 2005 *Proc. IEEE* **93** 216231
- [15] Xu W, Bao Y 2013 *Acta Mech. Sin.* **45** 666 (in Chinese) [徐伟, 包芸 2013 力学学报 **45** 666]
- [16] Zou H Y 2012 *Master Thesis* (Sun Yat-sen University) (in Chinese) [邹鸿岳 2012 硕士论文 (中山大学)]

# Direct solution method of efficient large-scale parallel computation for 3D turbulent Rayleigh-Bénard convection\*

Zhang Yi-Zhao Bao Yun<sup>†</sup>

(Department of Mechanics, Sun Yet-Sen University, Guangzhou 510275, China)

( Received 3 November 2014; revised manuscript received 4 March 2015 )

## Abstract

Research of turbulence Rayleigh-Bénard convection with high  $Ra$  number is a hot topic in physics research in the world. DNS simulation is one of the important means to study the subject. The computing work is hard to achieve when the calculation size is increased and the grid number is bigger. Numerical simulation for high  $Ra$  turbulent convection faces some major challenges. So the direct (non iterative) solution method of efficient large-scale parallel computation for the 3D turbulent convection is created in this paper. Main difficulties are the parallel computing technology for the pressure Poisson equation. The mass efficient parallel approximate solution with the block tridiagonal equations of OpenMP and MPI used simultaneously after decoupling pressure Poisson equation using FFT is presented. Through the validation of the efficiency of this method in parallel computing, the new method for direct solution of parallel computing have good parallel efficiency and computational time. Results of thermal convection in 3D narrow cavity show that the convection characteristics calculated by using the new method is reasonable. The direct solution method for efficient large-scale parallel computation of 3D turbulent convection created in this paper also is likely to be a breakthrough in computing technology about efficient large-scale parallel computing incompressible NS equations in some special cases.

**Keywords:** direct solution method of Poisson equation, parallel computation, Rayleigh-Bénard convection, direct numerical simulation

**PACS:** 47.27.te

**DOI:** 10.7498/aps.64.154702

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11372362), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 14lgjc02).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [stsby@mail.sysu.edu.cn](mailto:stsby@mail.sysu.edu.cn)