专题: 华南师范大学建校暨物理学科建立 90 周年

非厄米哈密顿量中的量子 Fisher 信息与参数估计*

李竞[1)] 丁海涛[2)] 张丹伟[1)†]

1) (华南师范大学物理学院, 原子亚原子结构与量子调控教育部重点实验室, 广州 510006)

2) (南京大学物理学院, 固体微结构物理国家重点实验室, 南京 210093)

(2023 年 5 月 26 日收到; 2023 年 7 月 7 日收到修改稿)

量子 Fisher 信息给出参数估计的最优精度极限, 在量子度量学中有重要的应用. 近年来, 在量子系统中实现非厄米哈密顿量的理论与实验研究受到广泛关注. 本文研究基于非厄米哈密顿量本征态的参数估计, 给出其中单参数与两参数估计的量子 Fisher 信息及其量子 Cramér-Rao 下界, 计算与分析非互易、具有增益-耗散的 Su-Schrieffer-Heeger 模型, 非厄米量子 Ising 链、拓扑陈绝缘体模型和二能级系统中动量及外场参数估计的量子 Fisher 信息. 结果表明: 在这几个非厄米模型中, 对于单参数估计, 量子 Fisher 信息在能隙闭合区域和例外点附近显著增大, 从而提高参数估计的精度极限; 对于两参数估计, 量子 Fisher 信息矩阵的行列式在能隙闭合和例外点附近同样明显增大, 拓扑区域比平庸区域的整体评估精度更高, 且由陈数确定两参数估计误差的拓扑下界.

关键词: 量子 Fisher 信息, 参数估计, 非厄米系统, 拓扑态

PACS: 06.20.−f, 06.20.Dk, 03.65.Yz, 03.65.Vf **DOI:** 10.7498/aps.72.20230862

1 引 言

1969 年, Helstrom[1] 提出量子系统中未知参数的测量精度受不确定性原理的影响, 确定了基于量子参数估计的量子度量学的理论基础. 在量子参数估计理论中, 从给定量子态中提取未知参数的最小误差由量子 Fisher 信息描述, 最佳测量精度满足所谓的量子 Cramér-Rao 下界 (quantum Cramér-Rao bound, QCRB)[2−5]. 因此, 如何增大量子 Fisher 信息从而提高未知参数的估计精度是量子度量学领域的一个重要问题. 研究发现, 可以通过量子 Fisher 信息与量子几何的内在联系, 特别是刻画参量空间中两量子态间距的量子度规[6−11], 寻找最优化的测量轨迹和评估策略[12−15]. 利用量子系统特有的量子纠缠性质, 用一个初态为纠缠态的探针提取系统的参数信息, 也可以提高量子态的量子 Fisher 信息[16−18]. 在具有临界性质的物理系统, 当系统靠近临界点时, 物理参数的微小变化会导致量子态性质的明显响应, 因此可以利用这种临界增强效应来提高参数评估精度[19−21]. 此外, 近期研究表明选取合适初态以及权衡不同参数的测量误差可以提高参数估计的精度[22,23].

另一方面, 近年来在经典或量子系统中实现非厄米有效哈密顿量的实验技术蓬勃发展[24−28], 引发研究人员对非厄米物理及其应用的广泛兴趣. 理论与实验研究表明非厄米系统具有许多重要的物理性质[29,30]. 例如, 在非厄米系统特有的例外点 (exceptional point, EP) 附近, 本征态能量发生实复或虚复转变, 此时系统对参数微扰有强烈的响应, 因此可以利用 EP 点实现高精度传感[31−33]. 另外, 拓扑物态及其量子模拟[34] 也从厄米系统推广到非厄米系统[35−44], 并涌现系列新奇非厄米拓扑物理及其应用, 包括非厄米 Bloch 能带[38] 与非

* 国家自然科学基金 (批准号: 12174126) 和广东省基础与应用基础研究基金 (批准号: 2021A1515010315) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: danweizhang@m.scnu.edu.cn

© 2023 中国物理学会 Chinese Physical Society

厄米趋肤效应[39]、非厄米拓扑安德森局域化[40–42]等, 以及利用非厄米拓扑边缘态可以实现高精度的量子传感[43,44]. 因此, 基于量子 Fisher 信息, 研究非厄米哈密顿量中的参数估计及其与非厄米拓扑的内在联系, 是当前量子精密测量与非厄米物理交叉研究领域的一个重要课题.

本文研究非厄米哈密顿量本征态的量子参数估计. 首先证明在定态条件下, 传统量子 Fisher 信息的表达式以及单参数估计和两参数估计的 QCRB 对于非厄米哈密顿量依然成立. 其次结合一维非互易 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型、具有增益-耗散的 SSH 模型, 以及一维非厄米量子 Ising 链研究单参数估计, 分别计算这 3 个非厄米模型中量子 Fisher 信息随动量或单个外场参数的变化. 结果表明量子 Fisher 信息在能隙闭合点和 EP 点附近呈现尖峰, 其动量空间积分也显著增大, 从而提高单参数估计的精度. 最后研究二维非厄米拓扑陈绝缘体模型和二能级系统中的两参数估计, 此时量子 Fisher 信息矩阵的行列式及其动量空间积分在能隙闭合和例外点附近也明显增大, 拓扑区域整体评估精度大于平庸区域. 结合贝里曲率及其积分给出的陈数, 进一步给出两参数估计误差的拓扑下界.

2 非厄米系统中量子态的量子 Fisher 信息

考虑量子态 $|\psi_\mu\rangle$ 依赖待评估参数 μ, 通常采用正定算符测量的方法进行参数估计. 具体过程是将量子态投影到一组正定的完备基底 $\left\{\varPi_x|\sum_x \varPi_x = \mathbb{I}\right\}$ ($\mathbb{I}$ 为单位算符), 使评估 μ 转化为测量量子态在一系列 x 方向上的概率分布 $P_\mu(x) = \mathrm{Tr}(\rho_\mu \varPi_x)$, 其中密度矩阵 $\rho_\mu = |\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|$. 选择不同的正定算符测量会得到不同的评估精度, 由测量值和实际值之间的方差 $\Delta\mu$ 刻画, 而方差的下界只由量子态的几何性质确定, 即 QCRB[2–5]: $(\Delta\mu)^2 \geqslant 1/F_\mu$, 其中 $F_\mu = \mathrm{Tr}(L_\mu^2\rho_\mu)$ 是评估 μ 的量子 Fisher 信息, $L_\mu = 2(|\partial_\mu\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu| + |\psi_\mu\rangle\langle\partial_\mu\psi_\mu|)$ 是对称对数导数算符. 对于厄米系统中的量子态, F_μ 的表达式可记为[2]:

$$F_\mu = 4(\langle\partial_\mu\psi_\mu|\partial_\mu\psi_\mu\rangle - \langle\partial_\mu\psi_\mu|\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|\partial_\mu\psi_\mu\rangle). \quad (1)$$

本质上, 评估一个参数的精度正比于参数发生微小变化前后两量子态的“距离”[6], 即相邻两个量子态的可分辨度, 因此可以从几何的角度理解量子 Fisher 信息. 定义一个线微元 $\mathrm{d}s(|\psi_\mu\rangle, |\psi_{\mu+\mathrm{d}\mu}\rangle) = ||D_\mu\psi_\mu\rangle|\mathrm{d}\mu$, 其中 $|D_\mu\psi_\mu\rangle = (1 - |\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}|\psi_\mu\rangle$, 其模方给出参量空间中量子态的量子度规[6], 而 $F_\mu = 4||D_\mu\psi_\mu\rangle|^2$ 等于量子度规的 4 倍. 因此, F_μ 刻画相邻两个量子态 $|\psi_\mu\rangle$ 与 $|\psi_{\mu+\mathrm{d}\mu}\rangle$ 之间的可分辨度, 即越大的 F_μ 表示两量子态之间有越高的分辨度, 意味着对未知参数 μ 的估计精度越高.

本文考虑定态情况下非厄米哈密顿量本征态的量子 Fisher 信息及其参数估计. 对于非厄米哈密顿量 $\hat{H} \neq \hat{H}^\dagger$, 其本征方程为 $\hat{H}|\psi_\mu^{(n)}\rangle = E_n|\psi_\mu^{(n)}\rangle$, 其中 E_n 是第 n 个本征态 $|\psi_\mu^{(n)}\rangle$ 的能量, 本征态之间通常没有正交性, 即 $\langle\psi_\mu^{(m)}|\psi_\mu^{(n)}\rangle \neq \delta_{mn}$. 在定态情况下满足归一化条件 $\langle\psi_\mu^{(n)}|\psi_\mu^{(n)}\rangle = 1$, 可证明其量子 Fisher 信息仍然满足方程 (1). 简单起见, 本文以下省略本征态指标, 仍记非厄米哈密顿量本征态为 $|\psi_\mu\rangle$. 对于可观测量算符 $\hat{A}$, 未知参数 μ 的测量方差由误差传递公式得到, 即 $(\Delta\mu)^2 = \dfrac{(\Delta\hat{A})^2}{|\partial_\mu\langle\hat{A}\rangle_\mu|^2}$. 定义非厄米导数算符 $\hat{B} = \nabla_\mu$, 其不确定度为 $(\Delta\hat{B})^2 = \langle\hat{B}^\dagger\hat{B}\rangle_\mu - \langle\hat{B}^\dagger\rangle_\mu\langle\hat{B}\rangle_\mu = F_\mu/4$. 根据非厄米算符的不确定性关系[45] $(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 \geqslant |\langle\hat{A}^\dagger\hat{B}\rangle_\mu - \langle\hat{A}^\dagger\rangle_\mu\langle\hat{B}\rangle_\mu|^2$, 可得:

$$\begin{aligned}&(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2\\ \geqslant\ &\langle\hat{A}\hat{B}\rangle_\mu\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle_\mu + \langle\hat{A}\rangle_\mu^2\langle\hat{B}^\dagger\rangle_\mu\langle\hat{B}\rangle_\mu\\ &- \langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle_\mu\langle\hat{A}\rangle_\mu\langle\hat{B}\rangle_\mu - \langle\hat{A}\hat{B}\rangle_\mu\langle\hat{A}\rangle_\mu\langle\hat{B}^\dagger\rangle_\mu. \end{aligned} \quad (2)$$

定义 $|f\rangle = \hat{A}|\psi_\mu\rangle - \langle\hat{A}\rangle_\mu|\psi_\mu\rangle$, $|g\rangle = \hat{B}|\psi_\mu\rangle - \langle\hat{B}\rangle_\mu|\psi_\mu\rangle$, 利用 $\langle\hat{B}\rangle_\mu = -\langle\hat{B}^\dagger\rangle_\mu$, 可得:

$$\begin{aligned}&|\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle|^2\\ =\ &-\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle_\mu^2 - \langle\hat{A}\hat{B}\rangle_\mu^2 + 2\langle\hat{A}\hat{B}\rangle_\mu\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle_\mu\\ &+ 4\langle\hat{A}\rangle_\mu^2\langle\hat{B}^\dagger\rangle_\mu\langle\hat{B}\rangle_\mu\\ &- 4\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle_\mu\langle\hat{A}\rangle_\mu\langle\hat{B}\rangle_\mu - 4\langle\hat{A}\hat{B}\rangle_\mu\langle\hat{A}\rangle_\mu\langle\hat{B}^\dagger\rangle_\mu. \end{aligned} \quad (3)$$

比较 (2) 式和 (3) 式, 可得不等式:

$$\begin{aligned}&4(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2\\ \geqslant\ &|\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle|^2 + |\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle_\mu + \langle\hat{A}\hat{B}\rangle_\mu|^2\\ \geqslant\ &|\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle_\mu + \langle\hat{A}\hat{B}\rangle_\mu|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

由 $|\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle_\mu + \langle\hat{A}\hat{B}\rangle_\mu|^2 = |\partial_\mu\langle\hat{A}\rangle_\mu|^2$ 和 $F_\mu = 4(\Delta\hat{B})^2$, 可得到非厄米哈密顿量本征态 $|\psi_\mu\rangle$ 的量子 Fisher 信息 F_μ 对应的 QCRB 依然满足不等式: $(\Delta\mu)^2 \geqslant$

$\dfrac{(\Delta\hat{A})^2}{4(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2}=\dfrac{1}{F_\mu}$，其中 F_μ 由 (1) 式给定. 注意这里只利用非厄米系统中特定本征态做参数评估，不考虑多个本征态之间非正交性以及非幺正动力学演化的影响. 值得指出的是，以上推导过程对非厄米哈密顿量以及本征态的具体形式没有要求. 对于满足本征方程 $H^\dagger|\psi_n^{\rm L}\rangle=E_n^*|\psi_n^{\rm L}\rangle$ 的归一化左本征矢 $|\psi_n^{\rm L}\rangle$，量子 Fisher 信息表达式及其 QCRB 关系式保持不变，只需将 (1) 式中的 $|\psi_\mu\rangle$ 替换成 $|\psi_\mu^{\rm L}\rangle$ 即可.

以上结论可推广到多参数评估情况. 以两参数 $\{\mu,\nu\}$ 为例，评估误差为 2×2 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mu\nu}$，相应的评估精度极限由 2×2 的量子 Fisher 信息矩阵 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 刻画. 相应的对称对数导数算符 $L_{\mu,\nu}$ [1] 由 $\partial_{\mu(\nu)}\rho=(L_{\mu(\nu)}\rho+\rho L_{\mu(\nu)})/2$ 定义，可证明非厄米哈密顿量归一化本征态下，$\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 的矩阵元表达式为 (推导过程见附录 A)

$$F_{\mu\nu}=4{\rm Re}(\langle\partial_\mu\psi|\partial_\nu\psi\rangle-\langle\partial_\mu\psi|\psi\rangle\langle\psi|\partial_\nu\psi\rangle),\tag{5}$$

与厄米情况一致. 这里和后文相应两参数本征态 $|\psi\rangle$ 都省略了下标 μ,ν. 在无偏估计条件下，非厄米系统本征态的两参数估计的 QCRB 仍为 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mu\nu}\geqslant\dfrac{1}{\mathcal{F}_{\mu\nu}}$，即 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mu\nu}-\dfrac{1}{\mathcal{F}_{\mu\nu}}$ 是一个半正定矩阵，且 $\det(\boldsymbol{\Sigma}_{\mu\nu})\geqslant\det\left(\dfrac{1}{\mathcal{F}_{\mu\nu}}\right)$. 此外，利用 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 和贝里曲率 $\Omega_{\mu\nu}$ 的关系，附录 A 中进一步证明不等式：$\det(\mathcal{F}_{\mu\nu})\geqslant4\Omega_{\mu\nu}^2$，从而可以给出非厄米系统的两参数估计不确定度的拓扑下界，具体例子将在下文讨论.

3 基于非厄米系统的量子参数估计

本节研究几个典型的非厄米模型中量子态的量子 Fisher 信息及其参数估计. 3.1 节讨论一维非厄米模型中的单参数估计，3.2 节讨论二维非厄米模型中的两参数估计.

3.1 单参数估计

首先考虑一维非互易 SSH 模型 [39,46,47]，其原胞内非互易跳跃强度为 $t\pm\delta$，原胞间跳跃强度为 t'. 在周期边界条件下，该模型的动量空间哈密顿量为 [47]

$$\mathcal{H}_{\text{SSH-1}}(k)=\begin{pmatrix}0 & t-\delta+t'{\rm e}^{-{\rm i}k}\\ t+\delta+t'{\rm e}^{{\rm i}k} & 0\end{pmatrix}.\tag{6}$$

令 $t'=1$ 为能量单位，两能带为

$$E_\pm(k)=\pm\sqrt{1+t^2-\delta^2+2t\cos k-2{\rm i}\delta\sin k},$$

其中准动量 $k\in[0,2\pi]$，则能隙可定义为 $\Delta E\equiv\min_k|E_+(k)-E_-(k)|$. 如图 1(a) 所示，该模型中能隙闭合 ($\Delta E=0$) 对应能带中出现 EP 点以及拓扑转变 [47].

考虑实部能量较小的归一化本征态 $|\psi_-\rangle\doteq|\psi\rangle$ (无特别说明时默认为右本征矢 $|\psi^{\rm R}\rangle$)，首先对参数 $\mu=k$ 进行评估，其量子 Fisher 信息为 $F_k=4(\langle\partial_k\psi|\partial_k\psi\rangle-\langle\partial_k\psi|\psi\rangle\langle\psi|\partial_k\psi\rangle)$. 选取 $\delta=0.2$ 而改变 $t\geqslant0$，可以发现当 $t=0.8,1.2$ 时，在 $k=\pi$ 处出现 EP 点，对应本征态能量发生虚复转变. 在这两处 EP 点附近，F_k 呈指数增长的趋势，如图 1(b) 中的上图所示. 为表征 F_μ 在整个动量空间的大小，定义积分 $M_\mu=\displaystyle\int_0^{2\pi}{\rm d}kF_\mu$. 对于 $\mu=k$ 情况，M_k 随 t 的变化如图 1(b) 下图中的实线所示. 可以看出，M_k 在 $t=0.8,1.2$ 处出现峰值，说明在能隙闭合点附近对参数 k 的估计具有最高精度. 考虑评估参数 $\mu=\delta$，量子 Fisher 信息及其积分分别为 F_δ 和 M_δ. 图 1(c)实线给出 $t=0$ 和 $t=0.2$ 时 M_δ 随参数 δ 的变化. 当 $t=0$ 时，在 $\delta\geqslant0$ 的区域中只有一个能隙闭合点，对应 M_δ 在 $\delta=1$ 附近出现尖峰. 当 $t=0.2$ 时，在 $\delta=0.8,1.2$ 处能隙闭合，则 M_δ 出现两个尖峰. 考虑评估参数 $\mu=t$ 时，图 1(d) 中的实线给出 M_t 随参数 t 的变化. 类似地，当 $\delta=0$ 和 $\delta=0.2$ 时，M_t 分别在 $t=1$ 和 $t=0.8,1.2$ 的能隙闭合点附近呈现峰值，表明量子 Fisher 信息在非厄米和厄米 ($\delta=0$) 系统中的能隙闭合点附近都会指数增大. 非厄米系统具有独特的 EP 点，其附近量子 Fisher 信息也会指数增大，从而提供额外的提高参数估计精度的策略. 在图 1(b)—(d) 中，进一步数值验证了对于归一化左本征矢 $|\psi^{\rm L}\rangle$，其量子 Fisher 信息和整体评估精度具有与右本征矢 $|\psi^{\rm R}\rangle$ 相同的特征. 原因在于当靠近能隙闭合点或 EP 点时，无论对于左本征矢还是右本征矢，系统性质都会随参数的变化而显著变化. 图 1 结果表明，非厄米系统中本征态在 EP 点或能隙闭合点附近的量子 Fisher 信息显著增大，从而可以提高未知参数的估计精度.

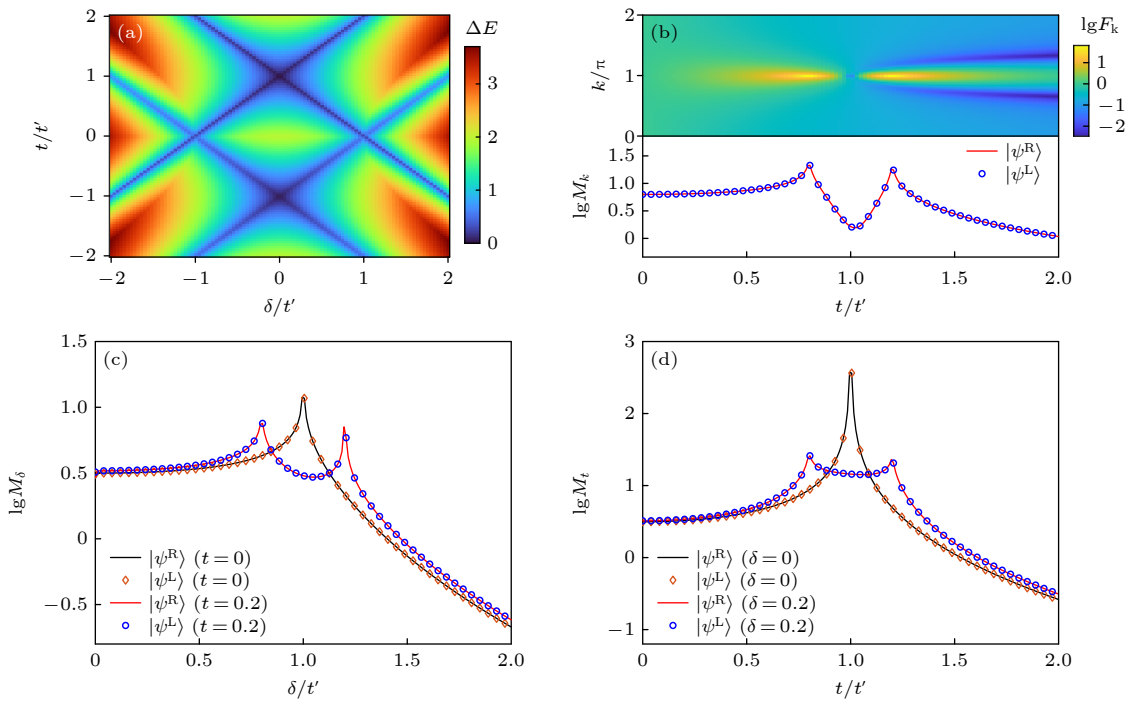

图 1 基于非互易 SSH 模型的单参数估计 (a) 能隙 ΔE 随 t 和 δ 的变化; (b) $\delta=0.2$ 时利用右本征矢 $|\psi^{\mathrm{R}}\rangle$ 评估 k 的量子 Fisher 信息 F_k 随 k 和 t 的变化 (上图) 及其积分 M_k 随 t 的变化 (下图实线); (c) 利用 $|\psi^{\mathrm{R}}\rangle$ 评估 δ 时 M_δ 随 δ 的变化 (实线); (d) 利用 $|\psi^{\mathrm{R}}\rangle$ 评估 t 时 M_t 随 t 的变化 (实线). 图 (b)—(d) 中的数据点表示利用左本征矢 $|\psi^{\mathrm{L}}\rangle$ 评估 k, t 或 δ 时相应的数值结果. 图中 $t'=1$, F_k 和 M_μ 做对数处理

Fig. 1. Single-parameter estimation based on the non-reciprocal SSH model: (a) Energy gap ΔE as functions of t and δ; (b) F_k by the right eigenstate $|\psi^{\mathrm{R}}\rangle$ as functions of k and t for estimating k (top) and the integration M_k by $|\psi^{\mathrm{R}}\rangle$ as a function of t (solid line in the bottom)with $\delta=0.2$; (c) the integration M_δ by using $|\psi^{\mathrm{R}}\rangle$ (solid line) as a function of δ for estimating δ; (d) the integration M_t by using $|\psi^{\mathrm{R}}\rangle$ (solid line) as a function of t for estimating t. The data points in panels (b)–(d) denote the corresponding numerical results for estimating k, t or δ by using the left eigenstate $|\psi^{\mathrm{L}}\rangle$. $t'=1$ is set and F_k and M_μ are logarithmically plotted in the picture.

非互易 SSH 模型在开边界和周期边界条件下具有不同的能谱特征[39], 因此进一步考虑开边界系统中的参数估计. 实空间中 N 个原胞的非互易 SSH 模型的哈密顿量为

$$H_{\text{SSH-1}}=\sum_{j=1}^{N}[(t-\delta)a_j^\dagger b_j+(t+\delta)b_j^\dagger a_j]+\sum_{j=1}^{N-1}t'(a_{j+1}^\dagger b_j+\text{H.c.})+\Gamma(a_1^\dagger b_N+b_N^\dagger a_1),\quad(7)$$

其中 $a_j^\dagger, b_j^\dagger(a_j, b_j)$ 分别代表第 j 个原胞中 A, B 格点的产生 (湮灭) 算符, Γ 表示第一个和最后一个格点之间的耦合参数, 当 $\Gamma=0$ 时系统处于完全开边界情况. 令 $t'=1, \delta=2/3$ 和 $N=20$, 对角化 $H_{\text{SSH}-1}$ 可得开边界条件下本征能量 E 的实部与虚部随 t 的变化, 分别如图 2(a), (b) 所示. 从图 2(a) 可看出, 带隙间的零能模出现在 $t=\pm\sqrt{t'^2+\delta^2}\approx\pm1.20$, 意味着在这两处能隙关闭点发生拓扑相变[39]. 从图 2(b) 可以看出, 能谱在 $t\approx\pm0.66$ 时发生实复转变, 则出现 EP 点. 分别考虑利用中间能态 $|\psi_{\text{mid}}\rangle$ 和基态 $|\psi_{\text{ground}}\rangle$ 计算评估参数 t 时的量子 Fisher 信息 F_t, 结果如图 2(c) 所示. 选择 $|\psi_{\text{mid}}\rangle$ 进行评估, 当 $t\approx\pm1.20$ 时本征能量变为零, 与其他能级之间的能隙闭合, 此时 F_t 出现峰值. 此外, F_t 在 $t=0$ 附近也呈指数增大, 这是由两个 EP 点在 $\Gamma\to0$ 时合并于此处所导致, 如图 2(g)所示. 选择 $|\psi_{\text{ground}}\rangle$ 进行评估, 则 $t\approx\pm0.66$ 为其 EP 点, 此时 F_t 呈指数增大. 总而言之, 开边界非互易 SSH 模型在不同参数 t 下出现拓扑相变的能隙闭合点和实复转变的 EP 点, 分别对应中间能态和非中间能态 (如基态) 的量子 Fisher 信息显著增大, 可提高参数评估精度. 在 $\Gamma=0$ 的开边界条件下, 能隙闭合点和 EP 的位置不依赖于 N, 因此上述结论与原胞数无关.

进一步考虑边界耦合参数 Γ 对能谱和量子 Fisher 信息 F_t 的影响. 选取 $\Gamma=0.1, 0.6$, 相应本征能谱的实部分别如图 2(d) 和图 2(e) 所示. 可以

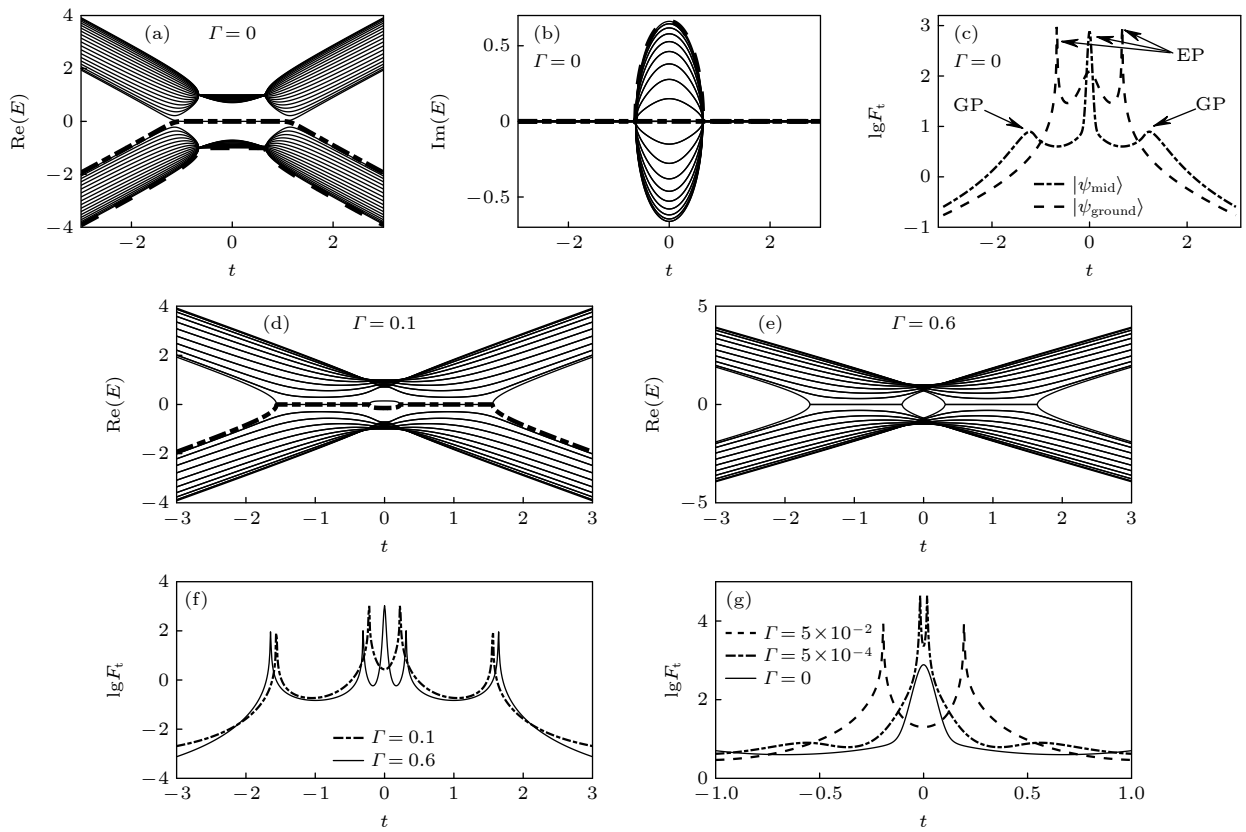

图 2 原胞数 $N=20$ 的非互易 SSH 模型在不同边界耦合常数 Γ 下的单参数估计 (a) 和 (b) 分别是开边界情况 $\Gamma=0$ 时本征能量的实部与虚部随参数 t 的变化; (c) 为开边界条件下利用中间能态 $|\psi_{\rm mid}\rangle$ 和基态 $|\psi_{\rm ground}\rangle$ 评估参数 t 的量子 Fisher 信息 F_t 随 t 的变化, 图中 EP 表示例外点, GP 表示能隙闭合点; (d) 和 (e) 分别是 $\Gamma=0.1, 0.6$ 时本征能量实部随 t 的变化; (f) 和 (g) 为不同边界耦合常数 Γ 下 F_t 随 t 的变化. 图中 $t'=1$, $\delta=2/3$, F_t 做对数处理

Fig. 2. Single-parameter estimation based on the non-reciprocal SSH model with different boundary coupling coefficients Γ and the unit cell of $N=20$: (a) The real part and (b) the imaginary part of the eigen-spectrum as functions of t under open boundary condition with $\Gamma=0$; (c) F_t as a function of t by the mid-spectrum eigenstate $|\psi_{\rm mid}\rangle$ and the ground state $|\psi_{\rm ground}\rangle$ for estimating t with $\Gamma=0$. Here EP and GP denote exceptional point and gapless point, respectively; (d) and (e) the real part of energy as a function of t with $\Gamma=0.1, 0.6$, respectively; (f) and (g) F_t as a function of t different values of Γ. In the figure, $t'=1$, $\delta=2/3$, and F_t is logarithmically plotted.

看出, 增大 Γ 对跳跃强度 $t=0$ 附近的能谱影响比较明显. 从图 2(f) 进一步看出, 对于中间能态 $|\psi_{\rm mid}\rangle$, 增大 Γ 除了移动能谱中 4 个 EP 点的位置, 还会使得 $t=0$ 处出现能隙闭合点. 当 Γ 较大时 (如 $\Gamma=0.6$), F_t 会在 $t=0$ 处出现峰值. 相反地, 如图 2(g) 所示, 随着 Γ 的减小, 能谱中心两侧的 EP 相互靠拢; 当 $\Gamma=0$ 时合并于 $t=0$ 处, 此时 F_t 在 $t=0$ 附近指数增大. 因此, 该非互易模型中边界条件的变化可以通过能谱和量子 Fisher 信息反映出来.

接下来考虑具有增益-耗散的非厄米 SSH 模型[48,49], 其动量空间哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{\rm SSH-2}(k)=\begin{pmatrix} {\rm i}\gamma & t+t'{\rm e}^{-{\rm i}k} \\ t+t'{\rm e}^{{\rm i}k} & -{\rm i}\gamma \end{pmatrix}. \quad (8)$$

令 $t'=1$, 两能带为

$$E_{\pm}(k)=\pm\sqrt{1+t^2+2t\cos k-\gamma^2},$$

能隙 ΔE 随 t 和 γ 的变化如图 3(a) 所示. 在 $\Delta E>0$ 和 $\Delta E=0$ 区域, 本征态能量分别为实数和复数, 能隙闭合对应能带出现 EP 点. 考虑本征态 $|\psi_-\rangle$ 评估参数 $\mu=k$, 主要结果如图 3(b) 所示. 选取 $\gamma=0.5$, 当 $t=0.3$ 和 $t=1.7$ 时, 即图 3(a) 中的实能量区域, 量子 Fisher 信息 F_k 随参数 k 的变化较为平缓. 当 $t=1$ 时, 复能谱中 $k\approx0.84\pi, 1.16\pi$ 两处有 EP 点, 对应 F_k 在这两点附近呈现尖峰. 而且 M_k 也反映了在具有 EP 点的复能量区域, k 的整体估计精度更高.

本节最后考虑一维非厄米量子 Ising 模型[50,51], 其近邻格点自旋耦合强度为 J, 外加横场为复数场

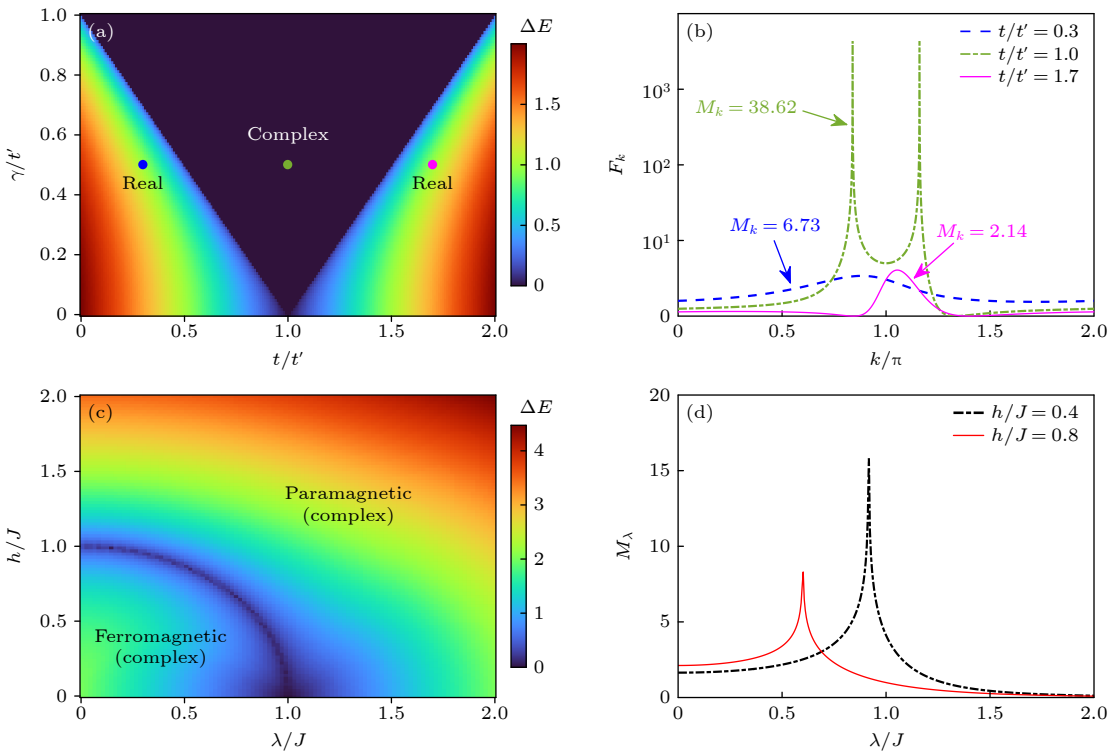

图 3 基于具有增益-耗散的 SSH 模型 ((a), (b)) 和非厄米量子 Ising 链 ((c), (d)) 的单参数估计 (a) 能隙 ΔE 随 t 和 γ 的变化, 有能隙区域能谱为实, 无能隙区域能谱为复且存在 EP 点; (b) $\gamma = 0.5$ 和 $t = \{0.3, 1, 1.7\}$ 时评估 k 的量子 Fisher 信息 F_k 随 k 的变化; (c) 能隙 ΔE 随 λ 和 h 的变化, 能隙关闭处为复能量的铁磁态和顺磁态的相边界; (d) 评估 λ 时的 M_λ 随 λ 的变化. 图中 $t' = 1$ 和 $J = 1$

Fig. 3. Single-parameter estimation based on the gain-and-loss SSH model ((a), (b)) and the non-Hermtian quantum Ising chain ((c), (d)): (a) Energy gap ΔE as functions of t and γ, and the gapped (gapless) region contains real (complex) eigen-spectrum (with exceptional points); (b) F_k as a function of k for estimating k with $\gamma = 0.5$ and $t = \{0.3, 1, 1.7\}$; (c) energy gap ΔE as functions of λ and h, and the gapless line denotes the phase boundary between the ferromagnetic and paramagnetic states with complex energies; (d) M_λ as a function of λ for estimating λ. $t' = 1$ and $J = 1$ are set.

$\lambda + \mathrm{i}h$ (λ 和 h 均为实数), 模型哈密顿量为

$$H_{\text{Ising}} = -\sum_j [J\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z + (\lambda + \mathrm{i}h)\sigma_j^x], \tag{9}$$

其中 σ_j^z 和 σ_j^x 是第 j 个格点的泡利算符. 对此实空间哈密顿量进行 Jordan-Wigner 变换[52] 和 Fourier 变换, 可得动量空间自由哈密顿量:

$$\mathcal{H}_{\text{Ising}}(k) = \begin{pmatrix} \lambda + \mathrm{i}h - J\cos k & J\sin k \\ J\sin k & -\lambda - \mathrm{i}h + J\cos k \end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中准动量 $k \in [0, \pi]$. 令 $J = 1$, 本征能量为

$$E_\pm(k) = \pm\sqrt{1 + \lambda^2 - h^2 - 2\lambda\cos k + 2\mathrm{i}h(\lambda - \cos k)}.$$

能隙 ΔE 随参数 λ 和 h 变化如图 3(c) 所示. 考虑能量为 E_- 的本征态, 在参量空间 λ-h 中可分为铁磁态和顺磁态[50,51], 其能量均为复数, 但两者之间的转变伴随能隙的闭合. 类似地, 可利用此能量闭合特性提高参数估计的精度. 如图 3(d) 所示, 考虑参数 $\mu = \lambda$, 选取 $h = 0.4, 0.8$, 计算积分 $M_\lambda = \int_0^\pi \mathrm{d}k F_\lambda$ 随 λ 的变化, 可见 M_λ 分别在 $\lambda \approx 0.92$ 和 $\lambda = 0.6$ 的能隙闭合点附近形成尖峰.

3.2 两参数估计

对于两参数估计, 首先考虑二维非厄米陈绝缘体模型[38,53,54], 其动量空间哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{\text{Chern}}(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} t + \cos k_x + \cos k_y & \sin k_x - \delta - \mathrm{i}\sin k_y \\ \sin k_x + \delta + \mathrm{i}\sin k_y & -t - \cos k_x - \cos k_y \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中准动量 $k_x, k_y \in [0, 2\pi]$, δ 是非厄米强度. 两能带记为 $E_\pm(k_x, k_y)$, 当能隙 $\Delta E = \min_{k_x,k_y} |E_+(k_x, k_y) - E_-(k_x, k_y)| > 0$ 时, 该非厄米模型的能带拓扑性质仍可用陈数 C 刻画[38,54]:

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \Omega_{k_x k_y}, \tag{12}$$

其中 $\Omega_{k_x k_y} = \mathrm{i}(\langle\partial_{k_x}\psi_-|\partial_{k_y}\psi_-\rangle - \langle\partial_{k_y}\psi_-|\partial_{k_x}\psi_-\rangle)$ 为 $|\psi_-\rangle$ 在动量空间中的贝里曲率. 由 C 刻画的拓扑

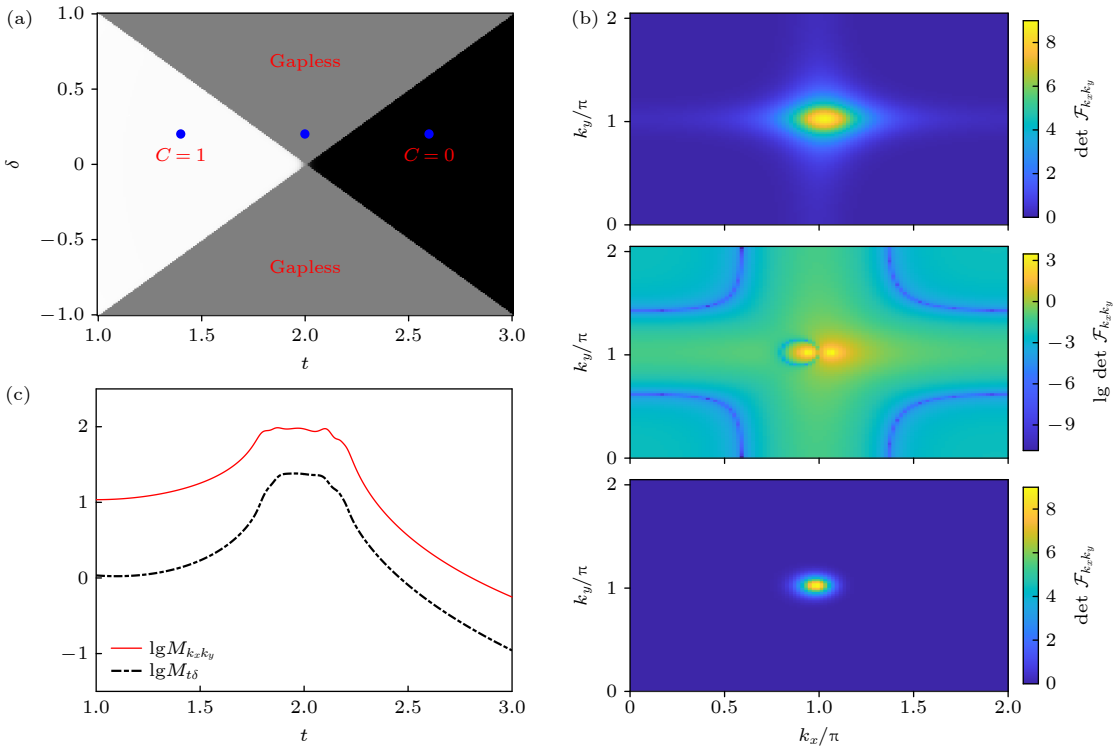

图 4 基于非厄米陈绝缘体模型的两参数估计 (a) 拓扑相图, 包括有能隙的拓扑和平庸区域, 分别对应陈数 $C=1$ 和 $C=0$, 以及无能隙区域; (b) $\delta=0.2$ 和 $t=\{1.4,2,2.6\}$ (依次从上到下) 时评估 $\{k_x,k_y\}$ 的量子 Fisher 信息矩阵行列式 $\det\mathcal{F}_{k_xk_y}$ 随 k_x,k_y 的变化; (c) $\delta=0.2$ 时评估 $\{k_x,k_y\}$ 的 $M_{k_xk_y}$ 和评估 $\{t,\delta\}$ 的 $M_{t\delta}$ 随 t 的变化. 图 (c) 中 $M_{\mu\nu}$ 和图 (b) 中间图 $\det\mathcal{F}_{k_xk_y}$ 做对数处理

Fig. 4. Two-parameter estimation based on the non-Hermtian Chern-insulator model: (a) Topological phase diagram with gapped topological ($C=1$), trivial ($C=0$), and gapless regions; (b) determinant of quantum Fisher information matrix $\det\mathcal{F}_{k_xk_y}$ as functions of k_x and k_y for estimating $\{k_x,k_y\}$ with $\delta=0.2$ and $t=\{1.4,2,2.6\}$ (from top to bottom); (c) the integration $M_{k_xk_y}$ for estimating $\{k_x,k_y\}$ and $M_{t\delta}$ for estimating $\{t,\delta\}$ as a function of t with $\delta=0.2$. $M_{\mu\nu}$ in panel (c) and $\det\mathcal{F}_{k_xk_y}$ in the middle of panels (b) are logarithmically plotted.

相图如图 4(a) 所示, 在 δ-t 参量平面中, 拓扑区域 ($C=1$) 与平庸区域 ($C=0$) 之间存在无能隙区域 $\Delta E=0$. 在无能隙区域内, 能谱 $E_-(k_x,k_y)$ 存在 EP 点, 有利于提高参数估计的精度.

考虑两评估参数为 $\mu=k_x,\nu=k_y$, 对应的量子 Fisher 信息矩阵 $\mathcal{F}_{k_xk_y}$ 由方程 (5) 给出. 图 4(b) 从上至下分别给出了 $t=\{1.4,2,2.6\}$ 和 $\delta=0.2$ 时, $\mathcal{F}_{k_xk_y}$ 行列式在动量空间中的分布. 当 $t=1.4$ 和 $t=2.6$ 时, 分别对应有能隙的 $C=1$ 和 $C=0$ 情况, $\det(\mathcal{F}_{k_xk_y})$ 在整个动量空间中变化较为平缓. 当 $t=2$ 时, $\det(\mathcal{F}_{k_xk_y})$ 在两个 EP 点 $k_y=\pi$ 和 $k_x\approx 0.94\pi,1.06\pi$ 附近呈指数增大. 为表征整体评估精度, 定义二维动量空间的积分

$$M_{\mu\nu}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\det(\mathcal{F}_{\mu\nu})\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y.$$

图 4(c) 给出了评估参数 $\mu=k_x,\nu=k_y$ 和 $\mu=t,\nu=\delta$ 两种情况下, $M_{\mu\nu}$ 随 t 的变化. 可看出 $M_{k_xk_y}$ 和 $M_{t\delta}$ 都在 $1.8\lesssim t\lesssim 2.2$ 的无能隙区域取得更大值, 表明此时两参数估计的整体精度更高. 此外, 相较于平庸区域, 在拓扑区域的整体评估精度更高.

最后考虑具有等效增益-耗散项的非厄米二能级系统 [26–28], 其哈密顿量表达式为

$$\mathcal{H}_{\mathrm{qubit}}(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\theta+r+\mathrm{i}\delta & \sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ \sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\theta-r-\mathrm{i}\delta\end{pmatrix},\tag{13}$$

其中仰角 $\theta\in[0,\pi]$ 和方位角 $\varphi\in[0,2\pi]$ 给出归一化量子态在 Bloch 球面上的位置, r 代表沿 z 方向的偏置场强度, δ 是非厄米强度. 考虑实部能量较小的本征态, 可定义陈数 $C=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\Omega_{\theta\varphi}$ 刻画系统的拓扑性质 [10,11]. 如图 5(a) 所示, 当 $r^2+\delta^2<1$ 时 $C=1$, 对应拓扑区域, 而 $r^2+\delta^2>1$ 对应 $C=0$ 的平庸区域. 考虑评估参数 $\mu=\theta,\nu=\varphi$, 从 $M_{\theta\phi}$ 在 r-δ 参量平面中的变化可看出, 相比平庸

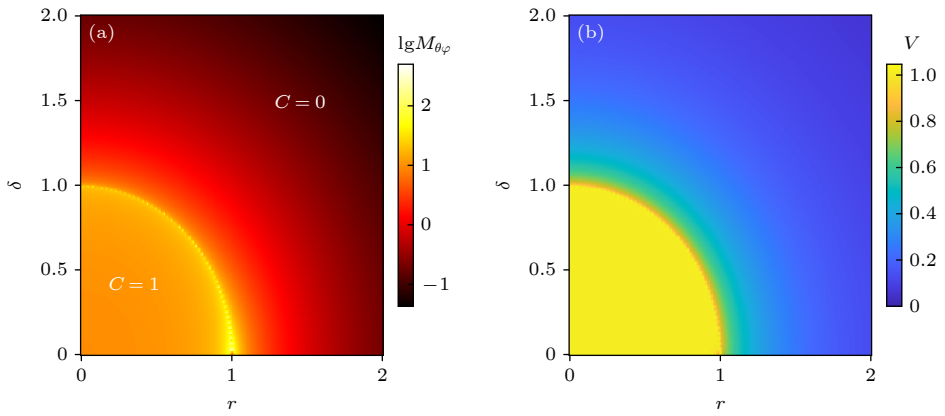

图 5 基于非厄米二能级系统的两参数估计评估 $\{k_x, k_y\}$ 时, (a) $M_{k_xk_y}$ 和 (b) V 随 r 和 δ 的变化. 图 (a) 中 $M_{k_xk_y}$ 做对数处理

Fig. 5. Two-parameter estimation based on the non-Hermitian two-level system. (a) $M_{k_xk_y}$ and (b) V as functions of r and δ for estimating $\{k_x, k_y\}$. $M_{k_xk_y}$ in panel (a) is logarithmically plotted.

区域, 拓扑区域的整体评估精度更高. 由于拓扑转变伴随能隙关闭, 因此 $M_{\theta\phi}$ 的分布在 $r^2+\delta^2=1$ 附近出现尖峰.

此外 $|\psi_-\rangle$ 满足关系 $\det(\mathcal{F}_{\theta\varphi})=4\Omega_{\theta\varphi}^2$, 从而给出此非厄米两能级系统中两参数估计的拓扑下界. 为进一步讨论拓扑下界, 可定义量子 Fisher 信息矩阵行列式的积分:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\sqrt{\det(\mathcal{F}_{\theta\varphi})} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi|\Omega_{\theta\varphi}|. \end{aligned} \tag{14}$$

结果如图 5(b) 所示, 在拓扑区域中, 贝里曲率 $\Omega_{\theta\varphi}$ 在整个 Bloch 球面上同号, 可得 $V=C=1$. 在平庸区域, $\Omega_{\theta\varphi}$ 不满足同号条件, 则 $1>V>C=0$. 因此, 量子 Fisher 信息矩阵行列式可表征非厄米系统的拓扑转变. 类似 $M_{\theta\phi}$, V 的结果也表明在拓扑区域中进行参数估计具有更高的精度, 相应的量子 Fisher 信息矩阵给出两参数估计误差的拓扑下界为陈数 C.

4 结论与展望

本文基于量子估计理论, 首先证明了对于非厄米哈密顿量归一化本征态, 量子 Fisher 信息 (矩阵) 的表达式以及单参数估计和两参数估计的 QCRB 关系依然成立. 在此基础上, 计算了一维非互易、具有增益-耗散的 SSH 模型和非厄米量子 Ising 链中, 量子 Fisher 信息随动量或单个外场参数的变化. 结果表明, 基于这 3 个非厄米模型的单参数估计, 量子 Fisher 信息在能隙闭合区域和 EP 点附近呈现峰值, 其动量空间积分也显著增大, 因此可用于提高参数估计的精度. 最后基于二维非厄米拓扑陈绝缘体模型和二能级系统进行两参数估计, 同样地, 量子 Fisher 信息矩阵行列式及其动量空间积分在能隙闭合或 EP 附近也明显增大. 此外, 量子 Fisher 信息矩阵行列式在拓扑区域整体大于平庸区域, 说明利用非厄米拓扑态进行参数估计的精度比平庸态更高, 同时确定了两参数估计误差的拓扑下界. 这些结果揭示了非厄米 EP 点和拓扑特性在量子参数估计中的应用, 有助于开展基于非厄米系统的量子精密测量研究.

目前已经有多个量子系统实验实现了非厄米有效哈密顿量, 如单光子 [24,25]、冷原子 [26]、金刚石 NV 色心 [27] 和超导量子比特 [28] 等. 与此同时, 最近已有实验报道了厄米系统量子 Fisher 信息或量子度规的测量, 如在金刚石 NV 色心中测量单参数估计 [12] 和多参数估计 [13–15] 的量子 Fisher 信息 (矩阵), 在核磁共振系统 [18] 中测量量子 Fisher 信息, 在超导量子比特系统 [9–11] 中测量量子度规等; 甚至通过光子系统实验测量了非厄米有效哈密顿量中 EP 点附近的量子度规 [32]. 结合这些实验进展, 本文基于非厄米系统的量子参数估计方案有望在实验中实现. 最后需要指出的是, 本文研究局限于非厄米哈密顿量本征态, 如何基于非幺正演化动力学和开放系统中的混合态进行最优化参数估计需要进一步探索. 另外, 利用非厄米量子多体效应进行量子精密测量也是值得深入研究的课题.

附录 A

考虑量子系统密度矩阵 $\boldsymbol{\rho}=|\psi\rangle\langle\psi|$, 对于未知参数 μ,ν 的评估误差为 2×2 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mu\nu}$, 相应的评估精度由 2×2 的量子 Fisher 信息矩阵 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 刻画. 对于厄米系统中的量子态 $|\psi\rangle$, 量子 Fisher 信息矩阵元为

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}&=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}\{L_\mu,L_\nu\})\\&=4\mathrm{Re}(\langle\partial_\mu\psi|\partial_\nu\psi\rangle-\langle\partial_\mu\psi|\psi\rangle\langle\psi|\partial_\nu\psi\rangle),\end{aligned}$$

其中{, }表示反对易关系, 对称对数导数算符 $L_{\mu(\nu)}$ 由 $\partial_{\mu(\nu)}\boldsymbol{\rho}=(L_{\mu(\nu)}\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\rho}L_{\mu(\nu)})/2$ 定义. 考虑定态情况中非厄米系统量子态 $|\psi\rangle$, 满足归一化条件 $\langle\psi|\psi\rangle=1$ 以及相同的保留对称对数导数算符, 其量子 Fisher 信息矩阵元为

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}&=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}\{L_\mu,L_\nu\})\\&=4[\langle\psi|\partial_\mu\psi\rangle\langle\psi|\partial_\nu\psi\rangle+\langle\partial_\mu\psi|\psi\rangle\langle\partial_\nu\psi|\psi\rangle\\&\quad+\langle\psi|\partial_\mu\psi\rangle\langle\partial_\nu\psi|\psi\rangle+\mathrm{Re}(\langle\partial_\mu\psi|\partial_\nu\psi\rangle)]\\&=4\mathrm{Re}(\langle\partial_\mu\psi|\partial_\nu\psi\rangle-\langle\partial_\mu\psi|\psi\rangle\langle\psi|\partial_\nu\psi\rangle),\end{aligned}\tag{A1}$$

其中用到了关系 $\langle\partial\psi|\psi\rangle=-\langle\psi|\partial\psi\rangle$. 这里只利用非厄米系统特定本征态做参数评估, 因此不受本征态的非正交性以及非幺正演化的影响. 此时两参数估计的 QCRB 仍满足 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mu\nu}\geqslant 1/\mathcal{F}_{\mu\nu}$, 可以由矩阵的迹的柯西不等式得到:

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^\dagger\boldsymbol{X})\mathrm{Tr}(\boldsymbol{Y}^\dagger\boldsymbol{Y})\geqslant\frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^\dagger\boldsymbol{Y}+Y^\dagger\boldsymbol{X})|^2,\tag{A2}$$

由于 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mu\nu}$ 和 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 都是实矩阵, 定义两个实数集合 $\{f_\mu,f_\nu\}$, $\{g_\mu,g_\nu\}$ 以及实向量 $\boldsymbol{f}=(f_\mu,f_\nu)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{g}=(g_\mu,g_\nu)^{\mathrm{T}}$. 同时定义 $X=f_\mu L_\mu\sqrt{\boldsymbol{\rho}}+f_\nu L_\nu\sqrt{\boldsymbol{\rho}}$, $Y=g_\mu(\hat{O}_\mu-\langle\hat{O}_\mu\rangle)\sqrt{\boldsymbol{\rho}}+g_\nu(\hat{O}_\nu-\langle\hat{O}_\nu\rangle)\sqrt{\boldsymbol{\rho}}$, 其中 $\hat{O}_\mu,\hat{O}_\nu$ 是未知参数 μ, ν 的测量算符, 可以得到

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^\dagger\boldsymbol{X})=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\mathcal{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{f},\ \mathrm{Tr}(\boldsymbol{Y}^\dagger\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mu\nu}\boldsymbol{g},\tag{A3}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mu\nu}$ 矩阵元 $Cov_{\mu\nu}=\mathrm{Tr}\Big[\boldsymbol{\rho}\Big(\frac{1}{2}\{\hat{O}_\mu,\hat{O}_\nu\}-\langle\hat{O}_\mu\rangle\langle\hat{O}_\nu\rangle\Big)\Big]$. 考虑无偏估计条件 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\rho}\hat{O}_l)=l$, 对其求偏导可得 $\mathrm{Tr}[(\partial_m\boldsymbol{\rho})\hat{O}_l]=\delta_{ml}$, 其中 $m,l\in\{\mu,\nu\}$. 结合 $\frac{1}{2}\{\boldsymbol{\rho},L_m\}=\partial_m\boldsymbol{\rho}$, $\mathrm{Tr}(\partial_m\boldsymbol{\rho})=0$, (A2) 式右边化简为

$$\left|\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}^\dagger\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^\dagger\boldsymbol{X})\right|^2=(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g})^2,\tag{A4}$$

当矩阵 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 可逆, 令向量满足关系式 $\boldsymbol{f}=\mathcal{F}_{\mu\nu}^{-1}\boldsymbol{g}$, 联合 (A2) 式—(A4) 式, 可得 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mu\nu}\geqslant 1/\mathcal{F}_{\mu\nu}$.

此外, 量子 Fisher 信息矩阵 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 和贝里曲率 $\Omega_{\mu\nu}$ 的关系可以由非厄米算符的不确定关系导出. 定义非厄米导数算符 $\hat{A}=\nabla_\mu,\hat{B}=\nabla_\nu$, 则量子 Fisher 信息矩阵 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 的矩阵元可简化为 $F_{\mu\mu}=4(\Delta\hat{A})^2,F_{\nu\nu}=4(\Delta\hat{B})^2$, $F_{\mu\nu}=4\mathrm{Re}(\langle\hat{A}^\dagger\hat{B}\rangle-\langle\hat{A}^\dagger\rangle\langle\hat{B}\rangle)=F_{\nu\mu}$, 贝里曲率为 $\Omega_{\mu\nu}=\mathrm{i}(\langle\partial_\mu\psi|\partial_\nu\psi\rangle-\langle\partial_\nu\psi|\partial_\mu\psi\rangle)=\mathrm{i}(\langle\hat{A}^\dagger\hat{B}\rangle-\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle)$. 同时, 非厄米算符的不确定关系为

$$\begin{aligned}&(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2\geqslant|\langle\hat{A}^\dagger\hat{B}\rangle-\langle\hat{A}^\dagger\rangle\langle\hat{B}\rangle|^2\\&=\langle\hat{A}^\dagger\hat{B}\rangle\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle-\langle\hat{A}^\dagger\hat{B}\rangle\langle\hat{B}^\dagger\rangle\langle\hat{A}\rangle\\&\quad-\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle\langle\hat{A}^\dagger\rangle\langle\hat{B}\rangle+\langle\hat{A}^\dagger\rangle\langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}^\dagger\rangle\langle\hat{B}\rangle,\end{aligned}\tag{A5}$$

而 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 的非对角元与贝里曲率满足关系式

$$\begin{aligned}&F_{\mu\nu}F_{\nu\mu}+4\Omega_{\mu\nu}^2\\&=16(\langle\hat{A}^\dagger\hat{B}\rangle\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle-\langle\hat{A}^\dagger\hat{B}\rangle\langle\hat{B}^\dagger\rangle\langle\hat{A}\rangle\\&\quad-\langle\hat{B}^\dagger\hat{A}\rangle\langle\hat{A}^\dagger\rangle\langle\hat{B}\rangle+\langle\hat{A}^\dagger\rangle\langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}^\dagger\rangle\langle\hat{B}\rangle),\end{aligned}\tag{A6}$$

因此, $\det(\mathcal{F}_{\mu\nu})\geqslant 4\Omega_{\mu\nu}^2$. 等号成立条件为非厄米算符不确定关系的等号条件, 即 $|f\rangle=N|g\rangle$, N 是一个复数即可, 其中 $|f\rangle=\hat{A}|\psi\rangle-\langle\hat{A}\rangle|\psi\rangle$, $|g\rangle=\hat{B}|\psi\rangle-\langle\hat{B}\rangle|\psi\rangle$.

参考文献

[1] Helstrom C W 1969 *J. Stat. Phys.* **1** 231
[2] Braunstein S L, Caves C M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
[3] Liu J, Yuan H D, Lu X M, Wang X G 2020 *J. Phys. A: Math. Theor.* **53** 023001
[4] Sidhu J S, Kok P 2020 *AVS Quantum Sci.* **2** 014701
[5] Ren Z H, Li Y, Li Y N, Li W D 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 040601 (in Chinese) [任志红, 李岩, 李艳娜, 李卫东 2019 物理学报 **68** 040601]
[6] Provost J P, Vallee G 1980 *Commun. Math. Phys.* **76** 289
[7] Mera B, Zhang A W, Goldman N 2022 *SciPost Phys.* **12** 018
[8] Guo W, Zhong W, Jing X X, Fu L B, Wang X G 2016 *Phys. Rev. A* **93** 042115
[9] Tan X S, Zhang D W, Yang Z, Chu J, Zhu Y Q, Li D Y, Yang X P, Song S Q, Han Z K, Li Z Y, Dong Y Q, Yu H F, Yan H, Zhu S L, Yu Y 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 210401
[10] Tan X S, Zhang D W, Zheng W, Yang X P, Song S Q, Han Z K, Dong Y Q, Wang Z M, Lan D, Yan H, Zhu S L, Yu Y 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 017702
[11] Ding H T, Zhu Y Q, He P, Liu Y G, Wang J T, Zhang D W, Zhu S L 2022 *Phys. Rev. A* **105** 012210
[12] Yu M, Liu Y, Yang P C, Gong M S, Cao Q Y, Zhang S L, Liu H B, Heyl M, Ozawa T, Goldman N, Cai J M 2022 *npj Quantum Inf.* **8** 56
[13] Yu M, Li X B, Chu Y M, Mera B, Ünal F N, Yang P C, Liu Y, Goldman N, Cai J M 2022 arXiv: 2206.00546[quant-ph]
[14] Li C H, Chen M, Cappellaro P 2022 arXiv: 2204.13777[quant-ph]
[15] Zhang X Y, Lu X M, Liu J, Ding W K, Wang X G 2023 *Phys. Rev. A* **107** 012414
[16] Boixo S, Flammia S T, Caves C M, Geremia J M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 090401
[17] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photonics* **5**

222

[18] Liu R, Wu Z, Li Y C, Chen Y Q, Peng X H 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 110305 (in Chinese) [刘然, 吴泽, 李宇晨, 陈昱全, 彭新华 2023 物理学报 **72** 110305]

[19] Di Candia R, Minganti F, Petrovnin K V, Paraoanu G S, Felicetti S 2023 *npj Quantum Inf.* **9** 23

[20] Liang H B, Su Y G, Xiao X, Che Y M, Sanders B C, Wang X G 2020 *Phys. Rev. A* **102** 013722

[21] He W T, Lu C W, Yao Y X, Zhu H Y, Ai Q 2023 *Front. Phys.* **18** 31304

[22] Niu M L, Wang Y M, Li Z J 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 090601 (in Chinese) [牛明丽, 王月明, 李志坚 2022 物理学报 **71** 090601]

[23] Lu X M, Wang X G 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 120503

[24] Lin Q, Li T Y, Xiao L, Wang K K, Yi W, Xue P 2022 *Nat. Commun.* **13** 3229

[25] Xiao L, Deng T S, Wang K K, Zhu G Y, Wang Z, Yi W, Xue P 2020 *Nat. Phys.* **16** 761

[26] Li J M, Harter A K, Liu J, Leonardo D M, Joglekar Y N, Luo L 2019 *Nat. Commun.* **10** 855

[27] Wu Y, Liu W Q, Geng J P, Song X R, Ye X Y, Duan C K, Rong X, Du J F 2019 *Science* **364** 878

[28] Naghiloo M, Abbasi M, Joglekar Y N, Murch K W 2019 *Nat. Phys.* **15** 1232

[29] Gao X E, Li D L, Liu Z H, Zheng C 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 240303 (in Chinese) [高雪儿, 李代莉, 刘志航, 郑超 2022 物理学报 **71** 240303]

[30] Zhang X Z, Wang P, Zhang K L, Yang X M, Song Z 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 174501 (in Chinese) [张禧征, 王鹏, 张坤亮, 杨学敏, 宋智 2022 物理学报 **71** 174501]

[31] Solnyshkov D D, Leblanc C, Bessonart L, Nalitov A, Ren J H, Liao Q, Li F, Malpuech G 2021 *Phys. Rev. B* **103** 125302

[32] Liao Q, Leblanc C, Ren J H, Li F, Li Y M, Solnyshkov D, Malpuech G, Yao J N, Fu H B 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 107402

[33] Wiersig J 2020 *Photonics Res.* **8** 1457

[34] Zhang D W, Zhu Y Q, Zhao Y X, Yan H, Zhu S L 2018 *Adv. Phys.* **67** 253

[35] Lang L J, Zhu S L, Chong Y D 2021 *Phys. Rev. B* **104** L020303

[36] Zhang D W, Chen Y L, Zhang G Q, Lang L J, Li Z, Zhu S L 2020 *Phys. Rev. B* **101** 235150

[37] Xu Z C, Zhou Z Y, Cheng E H, Lang L J, Zhu S L 2022 *Sci. China: Phys., Mech. Astron.* **65** 283011

[38] Shen H T, Zhen B, Fu L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 146402

[39] Yao S Y, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803

[40] Zhang D W, Tang L Z, Lang L J, Yan H, Zhu S L 2020 *Sci. China: Phys., Mech. Astron.* **63** 267062

[41] Tang L Z, Zhang L F, Zhang G Q, Zhang D W 2020 *Phys. Rev. A* **101** 063612

[42] Jiang H, Lang L J, Yang C, Zhu S L, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 054301

[43] Budich J C, Bergholtz E J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 180403

[44] Koch F, Budich J C 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** 013113

[45] Pati A K, Singh U, Sinha U 2015 *Phys. Rev. A* **92** 052120

[46] Heeger A J, Kivelson S, Schrieffer J R, Su W P 1988 *Rev. Mod. Phys.* **60** 781

[47] Yin C H, Jiang H, Li L H, Lü R, Chen S 2018 *Phys. Rev. A* **97** 052115

[48] Zhu B G, Lü R, Chen S 2014 *Phys. Rev. A* **89** 062102

[49] Yuce C 2018 *Phys. Rev. A* **97** 042118

[50] Li C, Zhang G, Zhang X Z, Song Z 2014 *Phys. Rev. A* **90** 012103

[51] Guo Z X, Yu X J, Hu X D, Li Z 2022 *Phys. Rev. A* **105** 053311

[52] Jordan P, Wigner E 1928 *Z. Physik* **47** 631

[53] Qi X L, Wu Y S, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. B* **74** 085308

[54] Kawabata K, Shiozaki K, Ueda M 2018 *Phys. Rev. B* **98** 165148

SPECIAL TOPIC — The 90th Anniversary of South China Normal University and Physics Discipline

Quantum Fisher information and parameter estimation in non-Hermitian Hamiltonians*

Li Jing [1)] Ding Hai-Tao [2)] Zhang Dan-Wei [1)†]

1) (*Key Laboratory of Atomic and Subatomic Structure and Quantum Control*, *Ministry of Education*, *School of Physics*, *South China Normal University*, *Guangzhou* 510006, *China*)

2) (*National Key Laboratory of Solid State Microstructures*, *School of Physics*, *Nanjing University*, *Nanjing* 210093, *China*)

(Received 26 May 2023; revised manuscript received 7 July 2023)

Abstract

Quantum Fisher information bounds the ultimate precision limit in the parameter estimation and has important applications in quantum metrology. In recent years, the theoretical and experimental studies of non-Hermitian Hamiltonians realized in quantum systems have attracted wide attention. Here, the parameter estimation based on eigenstates of non-Hermitian Hamiltonians is investigated, and the corresponding quantum Fisher information and quantum Cramér-Rao bound for the single-parameter and two-parameter estimations are given. In particular, the quantum Fisher information about estimating intrinsic momentum and external parameters in the non-reciprocal and gain-and-loss Su-Schrieffer-Heeger models, and non-Hermitian versions of the quantum Ising chain, Chern-insulator model and two-level system are calculated and analyzed. For these non-Hermitian models, the results show that in the case of single-parameter estimation in these non-Hermitian models, the quantum Fisher information increases significantly in the gapless regime and near the exceptional points, which can improve the accuracy limit of parameter estimation. For the two-parameter estimation, the determinant of the quantum Fisher information matrix also increases obviously near the gapless and exceptional points. In addition, a higher overall accuracy can be achieved in the topological regime than in the trivial regime, and the topological bound in two-parameter estimation can be determined by the Chern number.

Keywords: quantum Fisher information, parameter estimation, non-Hermitian systems, topological states

PACS: 06.20.−f, 06.20.Dk, 03.65.Yz, 03.65.Vf **DOI:** 10.7498/aps.72.20230862

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12174126) and the Basic and Applied Basic Research Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 2021A1515010315).

† Corresponding author. E-mail: danweizhang@m.scnu.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

非厄米哈密顿量中的量子Fisher信息与参数估计

李竞　丁海涛　张丹伟

Quantum Fisher information and parameter estimation in non-Hermitian Hamiltonians

Li Jing　Ding Hai-Tao　Zhang Dan-Wei

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 72, 200601 (2023)　DOI: 10.7498/aps.72.20230862

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.72.20230862

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于量子Fisher信息的耗散相互作用光-物质耦合常数的估计

Estimation of light-matter coupling constant under dispersive interaction based on quantum Fisher information

物理学报. 2022, 71(9): 090601　https://doi.org/10.7498/aps.71.20212029

非厄米系统的量子模拟新进展

Recent progress of quantum simulation of non-Hermitian systems

物理学报. 2022, 71(24): 240303　https://doi.org/10.7498/aps.71.20221825

非厄米临界动力学及其在量子多体系统中的应用

Non-Hermitian critical dynamics and its application to quantum many-body systems

物理学报. 2022, 71(17): 174501　https://doi.org/10.7498/aps.71.20220914

实验观测非厄米系统奇异点的手性翻转现象

Experimental observation of chiral inversion at exceptional points of non-Hermitian systems

物理学报. 2022, 71(13): 131101　https://doi.org/10.7498/aps.71.20220842

非厄米镶嵌型二聚化晶格

Non-Hermitian mosaic dimerized lattices

物理学报. 2022, 71(13): 130302　https://doi.org/10.7498/aps.71.20220890

纳米机械谐振器耦合量子比特非厄米哈密顿量诱导的声子阻塞

Phonon blockade induced by a non-Hermitian Hamiltonian in a nanomechanical resonator coupled with a qubit

物理学报. 2019, 68(11): 114203　https://doi.org/10.7498/aps.68.20182263