

基于连续空结果测量方案的相位估计精度保护*

贺志^{1)2)†} 罗嘉涛²⁾ 韦和²⁾

1) (吉首大学物理与机电工程学院, 吉首 416000)

2) (湖北汽车工业学院光电工程学院, 十堰 442002)

(2025年9月29日收到; 2025年10月26日收到修改稿)

基于连续空结果测量方案, 研究了提高一个二能级原子在遭受一个零温度玻色热库环境影响下其相位估计精度问题. 首先通过解析的方法, 得到了在热库环境中执行了 n 次空结果的测量以后原子系统最终态的表达式. 为了更加突出连续测量在二能级原子动力学中的重要作用, 将最终态中核心的振幅系数改成一种特殊的形式, 获得了振幅系数一个非常简洁的数学表达式. 有趣的是, 我们发现: 基于连续测量的二能级原子动力学与环境的谱宽度和测量的时间间隔乘积的标度参数密切相关, 且在一些特殊情况下可以退化成已经存在的量子芝诺效应和马尔科夫近似的结果. 进一步发现: 不管是马尔科夫和非马尔科夫条件下, 通过调节这个标度参数, 二能级原子的相位估计的量子 Fisher 信息都能得到显著的提高. 总之, 本文中对环境后选择的空结果频繁测量方案可以有效降低退相干对量子 Fisher 信息的破坏作用, 这一结果为开放量子系统中实现高精度测量提供了新的理论方案.

关键词: 开放量子系统, 量子 Fisher 信息, 连续空结果测量

DOI: 10.7498/aps.75.20251341

CSTR: 32037.14.aps.75.20251341

1 引言

当前, 量子计量学是量子信息最终可能走向实用化的重要领域之一, 它已经成为量子物理中一个快速发展的研究领域, 在理论和实验上取得了许多突破性的研究成果^[1-3]. 参数估计理论是量子计量学中的基础理论框架, 它在衡量参数可以达到的估计精度极限时的数学工具是量子 Cramér-Rao (QCR) 不等式^[4,5]. QCR 不等式是 Helstrom^[4] 将经典 Cramér-Rao 不等式^[6] 推广到量子领域, 并给出了量子 Fisher 信息的基本形式. 后来, Braunstein 和 Caves^[5] 证明了量子 Fisher 信息是穷尽所有可能的物理测量所能达到的最大经典 Fisher 信息. 所以, 量子 Fisher 信息在量子计量学和量子精

密测量领域扮演着具有中心地位的角色. 量子 Fisher 信息具有一些非常优良的物理性质, 它在量子信息处理中有十分重要的作用. 例如, 量子 Fisher 信息可以作为刻画开放量子系统中非马尔科夫过程发生的重要方法. Lu 等^[7] 从基于量子 Fisher 信息流的角度定义了一种非马尔科夫度量, 并成功表征了零温度振幅耗散模型中的非马尔科夫的发生. 后来, 贺志等^[8] 进一步阐明了量子 Fisher 信息是一种与系统初态选择无关的非马尔科夫度量, 并将其运用于揭示零温度振幅耗散模型和随机么正通道模型中的非马尔科夫性. Song 等^[9] 基于两参数的量子 Fisher 信息矩阵定义了一种非马尔科夫度量, 研究发现: 用量子 Fisher 信息矩阵也可以成功检测零温度振幅耗散模型和随机么正通道模型中的非马尔科夫性. 另外, 量子 Fisher 信

* 湖南省自然科学基金 (批准号: 2020JJ4443) 和湖北汽车工业学院大学生创新训练项目 (批准号: DC2025010, 202510525010) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hz9209@126.com

息也被用来量化量子多体之间的纠缠, 研究者在理论^[10-12]和实验^[13]上揭示了量子 Fisher 信息和量子多体纠缠结构信息之间的深刻联系. 人们也已将单个参数的量子 Fisher 信息的研究推广到多个参数的量子 Fisher 信息矩阵情况^[14-17]. 实验上关于量子 Fisher 信息的提取已经在多个平台上实现^[18,19]. 最近, 人们对量子 Fisher 信息的研究从厄米系统拓展到了非厄米系统^[20-24].

然而, 真实的物理系统易受周围噪声环境的影响, 参数估计理论必须将环境诱导的退相干过程考虑在内. 这样, 量子 Fisher 信息由于退相干的影响可能会衰减. 那么怎么克服环境对量子系统的影响, 从而提高参数的量子 Fisher 信息就成为量子精密测量中一个重要的科学问题. 当前, 已经有许多学者提出各种方法来提高参数估计的量子 Fisher 信息. 如 Ma 等^[25]研究了最初态为 GHZ 态在振幅阻尼、相位阻尼和退极化三种退相干通道下, 由 $SU(2)$ 群转动参数化的相位灵敏度可达海森伯极限. Chin 等^[26]研究了一个非马尔科夫相位衰减模型中相位估计精度问题, 发现非马尔科夫效应能够保证量子度量学极限的优越性. Wang 等^[27]研究了局域耗散环境对量子计量学的影响, 发现当系统参数满足二能级系统与其环境之间形成束缚态时, 在有限数量探测原子的长编码时间条件下海森伯极限可被渐进恢复. Wu 等^[28]研究了用 N 个二能级系统作为传感器来测量环境库时, 可能由于退相干的影响而导致测量误差随编码时间的增加而发散的问题, 发现当传感器和环境库形成束缚态时, 会存在一个临界阈值, 超过该阈值后, 散粒噪声极限的传感误差会得到很好的抑制. Bai 和 An^[29]研究了利用 Floquet 操控方法来打破噪声量子计量学的不可行定理, 发现结合最优控制技术以及满足受周期驱动原子与其局部噪声构成的系统形成束缚态时, 频率测量极限灵敏度将会恢复到理想的海森伯极限. Liu 等^[30]显示了在相位匹配条件下可以提高 Mach-Zehnder 干涉仪中的相位灵敏度. Tan 等^[31]研究了利用动力学退耦合方法提高相位估计精度的问题, 揭示了动力学退耦合方法能够明显提高相位估计的量子 Fisher 信息. Berrada^[32]研究了在振幅耗散模型中的相位估计精度问题, 发现了热库环境中的非马尔科夫效应可以有效提高相位估计的量子 Fisher 信息. He 和 Yao^[33]研究了利用量子弱测量和反弱测量保护相

位参数估计精度的问题, 发现通过调节弱测量和反弱测量强度可以有效提高相位估计的量子 Fisher 信息. Zheng 等^[34]研究了利用量子反馈方法提高相位参数估计精度的问题, 发现与没有使用量子反馈方法相比, 本方法能使耗散量子比特的量子 Fisher 信息在时间演化中具有较大的最大值, 并且在长时间尺度下表现出较小的衰减率. Li 等^[35]研究了利用经典驱动场的方法来保护相位参数估计精度问题, 结果发现调节经典驱动场的强度可以有效提高相位估计的量子 Fisher 信息. Chen 等^[36]研究了两个量子比特之间可能存在的偶极-偶极相互作用对相位参数估计精度的影响, 发现调节偶极-偶极相互作用的强度, 相位参数的量子 Fisher 信息有明显的提高.

注意到, Xu 等^[37,38]研究了两个量子点耦合到一个热库环境中, 同时热库受到一个外部探测器的连续空结果监测时的某一量子点的转移概率, 并且发现量子点的转移概率主要取决于一个标度参数 $x = \Lambda\tau$, 这里, Λ 是热库环境谱宽度, τ 是连续测量的时间间隔. 他们得到这个有趣结果的前提是波函数中的振幅系数要表示成一种特殊形式. 本文在文献^[37,38]的启发下, 研究在一个二能级原子与零温度玻色热库环境相互作用的振幅耗散模型中, 对环境执行连续测量后相位参数的量子 Fisher 信息的保护问题. 具体方法是当整体系统包含考虑的二能级原子和热库环境的量子态, 在演化的过程中对环境执行 n 次空结果测量, 每一次空结果测量使得整个系统的波函数塌缩到只有原子的子空间中, 经过 n 次空结果测量后, 可以得到二能级原子的归一化后的最终态. 正如我们预测的一样, 二能级原子的最终态的振幅系数确实可以改成文献^[37,38]中特殊形式. 相应地, 我们发现相位参数的量子 Fisher 信息的动力学演化也主要与标度参数 $x = \lambda\tau$ 有关. 结果也显示: 不管是马尔科夫还是非马尔科夫条件下, 通过调节标度参数 $x = \lambda\tau$, 相位参数的量子 Fisher 信息的衰减明显地被延缓. 本文结果主要通过解析方式获得, 可能为开放量子系统中量子 Fisher 信息的保护提供新的思路.

本文结构安排如下: 第 2 节给出了研究的理论模型及连续测量方案; 第 3 节简要介绍了量子 Fisher 信息的一些不同计算公式; 第 4 节是数值结果及理论分析; 第 5 节对文中获得的结果作了简要总结和展望.

2 理论模型及连续测量方案

考虑著名的衰减 Jaynes-Cummings 模型^[39], 即一个二能级系统与一个零温度玻色热库环境相互作用的系统. 在旋转波近似下, 整个系统的哈密顿量可表示为 ($\hbar = 1$):

$$\hat{H} = \omega_a \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + \sum_k \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_k g_k (\hat{\sigma}_- \hat{a}_k^\dagger + \hat{\sigma}_+ \hat{a}_k), \quad (1)$$

其中 $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ 和 $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$ 分别是两能级原子的上升和下降算符, $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 分别表示二能级系统的基态和激发态; ω_a 是两能级原子的本征频率; \hat{a}_k^\dagger 和 \hat{a}_k 分别是热库中第 k 个频率为 ω_k 的腔模对应的产生和湮没算符; g_k 是两能级原子与热库的耦合参数. 这里需要指出的是, 方程 (1) 所示的衰减 Jaynes-Cummings 模型是量子退相干理论中为数不多可以精确求解的物理模型, 已广泛应用于讨论各种量子退相干动力学问题^[40-50]. 利用这种精确可解性, 可得到使用连续空结果测量后决定系统动力学的简洁公式, 并将讨论它的物理意义.

本文考虑整个系统中仅存在一个激发数的情况, 并将其初始状态设为 $|\psi(0)\rangle = (\mu(0)|g\rangle + \nu(0)|e\rangle) \otimes |\bar{0}\rangle_r$, 其中 $|\bar{0}\rangle_r = \prod_k |0_k\rangle_r$, 这里的下标 r 表示热库; $\mu(0)$ 和 $\nu(0)$ 分别为二能级系统初始在基态和激发态上的概率幅. 因此整个系统在任意时刻 t 的量子态可表示为

$$|\psi(t)\rangle = \mu(0)|g\rangle|\bar{0}\rangle_r + \nu(t)|e\rangle|\bar{0}\rangle_r + \sum_k D_k(t)|0\rangle_a |1_k\rangle_r, \quad (2)$$

其中量子态 $|1_k\rangle_r$ 表示热库中第 k 个腔模中有一个光子或激发数. 量子态 $|\psi(t)\rangle$ 遵守在相互作用中的薛定谔方程, 如

$$d|\psi(t)\rangle/dt = -i\hat{H}_I(t)|\psi(t)\rangle, \quad (3)$$

$$\hat{H}_I(t) = \sigma_+ \sum_k g_k \hat{a}_k \exp[i(\omega_a - \omega_k)t] + \sigma_- \sum_k g_k^* \hat{a}_k^\dagger \exp[-i(\omega_a - \omega_k)t]. \quad (4)$$

求解在相互作用绘景下的薛定谔方程 (3), 可以得到各个振幅系数 $\nu(t)$ 和 $D_k(t)$ 满足的一阶微分方程为

$$i \frac{d}{dt} \nu(t) = \sum_k g_k D_k(t) e^{-i(\omega_k - \omega_a)t}, \quad (5)$$

$$i \frac{d}{dt} D_k(t) = g_k^* \nu(t) e^{i(\omega_k - \omega_a)t}. \quad (6)$$

考虑到初始条件 $D_k(0) = 0$, 将积分方程 (6) 后的结果代入到方程 (5) 中, 可得到方程 (2) 中振幅系数 $\nu(t)$ 满足的方程为

$$\dot{\nu}(t) = - \int_0^t f(t-t_1) \nu(t_1) dt_1, \quad (7)$$

其中记忆核 $f(t-t_1) = \int d\omega J(\omega) \exp[i(\omega_a - \omega)(t-t_1)]$ 是与热库环境的谱密度 $J(\omega)$ 密切相关的. 这里采用常用的洛伦兹谱密度^[39]

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega_a - \delta - \omega)^2 + \lambda^2}, \quad (8)$$

其中参数 $\delta = \omega_a - \omega_c$ 表示两能级原子的本征频率 ω_a 与谱密度中心频率 ω_c 之间的失谐量. 参数 λ 代表了耦合的谱宽度, 它与热库环境的关联时间满足 $\tau_B = \lambda^{-1}$, 参数 γ_0 与系统的弛豫时间 τ_R 有关, 且满足 $\tau_R = \gamma_0^{-1}$.

对方程 (7) 执行拉普拉斯变换及逆变换, 可以得到振幅系数 $\nu(t)$ 显示的表达式为

$$\nu(t) = \nu(0)h(t), \quad (9)$$

其中

$$h(t) = e^{-(\lambda-i\delta)t/2} \left[\cosh(\chi t/2) + \frac{\lambda-i\delta}{\chi} \sinh(\chi t/2) \right], \quad (10)$$

$$\chi = \sqrt{(\lambda-i\delta)^2 - 2\gamma_0\lambda}. \quad (11)$$

明显地, 在共振情况如 $\delta = 0$, 当满足 $\lambda > 2\gamma_0$, 对应的动力学过程是马尔科夫过程; 当满足 $\lambda < 2\gamma_0$, 对应的动力学过程是非马尔科夫过程.

进一步, 若将每个腔模中含有一个激发数的热库态写成一个集合态的形式, 即 $|\bar{1}\rangle_r = (1/\theta(t)) \times \sum_{k=1}^N D_k(t)|1\rangle_r$, 以及 $\theta(t) = \sqrt{1 - |\mu(0)|^2 - |\nu(t)|^2}$, 方程 (2) 所示的演化态能够重新写成

$$|\psi(t)\rangle = (\mu(0)|g\rangle + \nu(t)|e\rangle)|\bar{0}\rangle_r + \theta(t)|0\rangle_a |\bar{1}\rangle_r. \quad (12)$$

下面具体给出一种通过对环境进行连续空结果测量调控原子动力学的方案. 将方程 (10) 中 $h(t)$ 的表达式改写成特殊等价的形式, 以便于接下来执行连续测量方案. 考虑到双曲函数满足的关系 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 和 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 方程 (10) 中 $h(t)$ 能改写成

$$\begin{aligned}
 h(t) &= e^{-(\lambda-i\delta)t/2} \left[\cosh(\chi t/2) + \frac{\lambda-i\delta}{\chi} \sinh(\chi t/2) \right] \\
 &= \frac{\chi}{\chi} e^{-(\lambda-i\delta)t/2} \left[\frac{e^{\chi t/2} + e^{-\chi t/2}}{2} + \frac{\lambda-i\delta}{\chi} \frac{e^{\chi t/2} - e^{-\chi t/2}}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{\chi} \left[\chi \frac{e^{-(\lambda-i\delta-\chi)t/2} + e^{-(\lambda-i\delta+\chi)t/2}}{2} + (\lambda-i\delta) \frac{e^{-(\lambda-i\delta-\chi)t/2} - e^{-(\lambda-i\delta+\chi)t/2}}{2} \right]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

如果令 $A_{\pm} = [\lambda - i\delta \pm \chi]/2$, 可得到 $\chi = A_+ - A_-$ 和 $\lambda - i\delta = A_+ + A_-$. 因此, 方程 (13) 能进一步写成

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{A_+ - A_-} \left[(A_+ - A_-) \frac{e^{-A_-t} + e^{-A_+t}}{2} + (A_+ + A_-) \frac{e^{-A_-t} - e^{-A_+t}}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{A_+ - A_-} (A_+ e^{-A_-t} - A_- e^{-A_+t}). \quad (14)
 \end{aligned}$$

这里需要特别指出的是, 方程 (14) 中第 2 个等式的改写形式对后续的讨论非常重要.

接下来, 在整个系统的演化态 (如方程 (12)) 中对热库环境执行一个空结果测量, 即热库中没有光子时, 整个系统的波函数将会塌缩到原子的子空间. 以此类推, 在执行 n 次测量, 且时间间隔 $\tau = t/n$, 原子系统的最终态为

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = [\mu(0)|g\rangle + \nu(0)\tilde{h}(t)|e\rangle] / \sqrt{N_n(t)}, \quad (15)$$

其中 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$, 归一化因子 $N_n(t) = |\mu(0)|^2 + |\tilde{h}(t)\nu(0)|^2$. 考虑连续测量极限下, 如 $n \rightarrow \infty$ 以及测量频率 $\nu = 1/\tau \rightarrow \infty$, 且增加谱宽度 λ 使得参数 $x = \lambda/\nu$ 保持为一个常数, 一般来说利用方程 (14) 所示 $h(t)$ 的表达式, 不难数值计算 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ 随时间的演化关系. 然而, 其中的物理意义不是很清楚. 那么, 一个重要的问题被提出: 复杂的函数 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ 是否在某些极限情况下存在简单的表达式, 且有明显的物理意义? 下面在极限条件 $\gamma_0/\lambda \ll 1$ 下简化 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$, 令失谐量 $\delta = c\lambda$. 这样可以获得 $A_+ = \lambda k - \gamma_0/(2k)$ 及 $A_- = \gamma_0/(2k)$ (保留到 γ_0/λ 的一阶), 其中 $k = 1 - ic$. 相应地, $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ 能够被表示成

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(t) &= h^n(\tau) = \left[\frac{1}{A_+ - A_-} (A_+ e^{-A_- \tau} - A_- e^{-A_+ \tau}) \right]^n = \left\{ \frac{A_+ e^{-A_- \tau}}{A_+ - A_-} \left[1 - \frac{A_-}{A_+} e^{-(A_+ - A_-) \tau} \right] \right\}^n \\
 &= e^{-A_- n \tau} \left(\frac{A_+}{A_+ - A_-} \right)^n \left[1 - \frac{A_-}{A_+} e^{-(A_+ - A_-) \tau} \right]^n = e^{-\gamma_0 t / (2k)} \alpha(t) \beta(t). \quad (16)
 \end{aligned}$$

在方程 (16) 中已令 $\alpha(t) = \left(\frac{A_+}{A_+ - A_-} \right)^n$ 和 $\beta(t) = \left[1 - \frac{A_-}{A_+} e^{-(A_+ - A_-) \tau} \right]^n$. 首先计算 $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \left(\frac{A_+}{A_+ - A_-} \right)^n = \left[\frac{\lambda k - \gamma_0 / (2k)}{\lambda k - \gamma_0 / k} \right]^n = \left[\frac{1 - \frac{1}{2k^2} \frac{\gamma_0 n}{\lambda n}}{1 - \frac{1}{k^2} \frac{\gamma_0 n}{\lambda n}} \right]^n = \left[\frac{1 - \frac{1}{2k^2} \frac{\gamma_0 t}{x n}}{1 - \frac{1}{k^2} \frac{\gamma_0 t}{x n}} \right]^n, \quad (17)$$

其中测量次数 $n = tv = t\lambda/x$. 利用展开式 $\left(1 - \frac{z}{n}\right)^n = e^{-z(1+z/2n+\dots)}$, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n = e^{-z}$. 因此, $\alpha(t)$ 能够进一步写成

$$\alpha(t) = \exp\left(\frac{\gamma_0 t}{2k^2 x}\right). \quad (18)$$

接下来计算 $\beta(t)$, 有

$$\begin{aligned}
 \beta(t) &= \left[1 - \frac{A_-}{A_+} e^{-(A_+ - A_-) \tau} \right]^n = \left\{ 1 - \frac{\gamma_0 / (2\lambda)}{k^2 - \gamma_0 / (2\lambda)} e^{-[k - \gamma_0 / (k\lambda)]x} \right\}^n \\
 &\approx \left[1 - \frac{\gamma_0 / (2\lambda)}{k^2} e^{-kx} \right]^n = \left[1 - \frac{\gamma_0 t}{2k^2 x n} e^{-kx} \right]^n = \exp\left(-\frac{\gamma_0 t}{2k^2 x} e^{-kx}\right). \quad (19)
 \end{aligned}$$

将方程 (18) 的 $\alpha(t)$ 和方程 (19) 的 $\beta(t)$ 代入方程 (16), 整理后最终得到 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ 简单的表达式为

$$\tilde{h}(t) = h^n(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\gamma_0 t}{2} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2 x} (e^{-kx} - 1) \right] \right\}, \quad (20)$$

其中 $x = \lambda\tau$, $k = 1 - ic$. 值得指出的是, 虽然方程 (20) 显示 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ 是参数 k 和 x 的函数, 但有趣的是, 在后面的讨论中会看到 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ 主要取决于参数 x , 与文献 [37,38] 结果一致, 将参数 $x = \lambda\tau$ 称为决定 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ 的标度参数. 更重要的是, 此时简化后的 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ 清晰地揭示了一些著名的物理结果. 例如在极限条件 $x \rightarrow \infty$ 和 $k \rightarrow 1$ 下, $\tilde{h}(t) \rightarrow e^{-\gamma_0 t/2}$ 对应马尔科夫机制下的结果; 在极限条件 $x \rightarrow 0$ 下, 可以获知 $\tilde{h}(t) \rightarrow 1$, 这表示原子被冻结在它的最初态, 正好对应频繁测量下表现出量子芝诺效应对应的结果.

3 量子 Fisher 信息

下面对量子 Fisher 信息进行一个简要介绍. 经典 Cramér-Rao 不等式 [6] 是经典参数估计理论中的一个重要概念, 它为无偏估计子的均方误差设置了一个下界, 被表示为

$$\Delta\theta \geq \frac{1}{\sqrt{nF_C}}, \quad (21)$$

其中, $\Delta^2\theta = \langle\theta^2\rangle - \langle\theta\rangle^2$ 量化了标准均方误差, n 为重复试验的次数, F_C 为经典 Fisher 信息. 经典 Cramér-Rao 不等式反映了估计误差是同次数和经典 Fisher 信息呈反比. 经典 Fisher 信息被定义为

$$F_C = \sum_x p(x|\theta) \left[\frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial x} \right]^2, \quad (22)$$

这里已经假设样本为离散变量, 其中 $p(x|\theta)$ 指在参数为 θ 的情况下, 测量结果为 x 的条件概率; 如果样本为连续变量, 上式中的求和须改成积分形式. 量子 Fisher 信息作为经典概念的形式推广, 是由 Braunstein 和 Caves [5] 于 1994 年完成, 并证明了量子 Fisher 信息是经典 Fisher 信息取遍所有可能测量后的最大值. 量子 Fisher 信息与 QCR 不等式 [4,5] 是密切相关的, 如

$$\Delta\theta \geq \Delta_{\text{QCR}} = 1/\sqrt{nF_Q}. \quad (23)$$

类似地, 其中 $\Delta^2\theta$ 表示参数 θ 的均方误差, n 代表重复实验的次数. 明显地, 量子 Fisher 信息 F_Q 越大, 参数 θ 估计精度越高. 量子 Fisher 信息 [5] 被定义为

$$F_Q = \text{Tr} [\rho_\theta L_\theta^2], \quad (24)$$

其中 ρ_θ 表示系统的密度矩阵; θ 为待测参数; L_θ 是由以下方程定义的对称对数导数算符,

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{2} [L_\theta \rho_\theta + \rho_\theta L_\theta]. \quad (25)$$

对于一个纯态, 量子 Fisher 信息 F_Q 的简单表达式为 [30]

$$F_Q = 4 \left(\langle\psi'|\psi'\rangle - |\langle\psi'|\psi_n\rangle|^2 \right), \quad (26)$$

其中 $|\psi_n\rangle$ 是密度矩阵 $\rho_\theta = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n|$ 的本征态, $|\psi'\rangle = \partial|\psi_n\rangle/\partial\theta$. 对于一个混合态, 量子 Fisher 信息 F_Q 存在相对复杂些的表达式: [30]

$$F_Q = \sum_n \frac{(\partial_\theta \lambda_n)^2}{\lambda_n} + \sum_n \lambda_n F_{\theta,n} + \sum_{n \neq m} \frac{8\lambda_n \lambda_m}{\lambda_n + \lambda_m} |\langle\psi_n|\partial_\theta \psi_m\rangle|^2, \quad (27)$$

其中 $F_{\theta,n} = 4(\langle\psi'|\psi'\rangle - |\langle\psi'|\psi_n\rangle|^2)$ 是本征态 $|\psi_n\rangle$ 的量子 Fisher 信息, $\lambda_n \neq 0$ 和 $\lambda_n + \lambda_m \neq 0$. 方程 (27) 是计算单参数量子 Fisher 信息的通用表达式. 从方程 (27) 可知, 混合量子态的量子 Fisher 信息可分解为两个部分: 第一部分即第一项, 是密度矩阵的本征值对 θ 的依赖, 这部分可视为经典贡献; 第二部分即第二项和第三项, 本征态是与 θ 有关的, 这部分可视为量子贡献. 特别地, 对于单个量子比特系统的混合态, 其量子 Fisher 信息可以方便地写为 [51,52]

$$F_Q = \text{Tr} \left[(\partial_\theta \rho_\theta)^2 \right] + \frac{1}{\det(\rho_\theta)} \text{Tr} \left[(\rho_\theta \partial_\theta \rho_\theta)^2 \right]. \quad (28)$$

对于单个量子比特系统的纯态,

$$F_Q = 2\text{Tr} \left[(\partial_\theta \rho_\theta)^2 \right]. \quad (29)$$

注意到, 用此方式来表达量子 Fisher 信息的优点在于不需要对密度矩阵进行谱分解, 从而有可能降低量子 Fisher 信息的计算难度. 另外, 单个量子比特系统的密度矩阵在布洛赫表象下可以被写为

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \mathbf{W} \cdot \hat{\sigma}), \quad (30)$$

其中 $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ 为著名的泡利矩阵矢量, $\mathbf{W} = (\langle \hat{\sigma}_x \rangle, \langle \hat{\sigma}_y \rangle, \langle \hat{\sigma}_z \rangle)^T$ 为布洛赫矢量. 在此表象下系统的量子 Fisher 信息可以被写为^[53,54]

$$F_Q = \begin{cases} |\partial_\theta \mathbf{W}|^2 + \frac{\mathbf{W} \cdot \partial_\theta \mathbf{W}}{1 - |\mathbf{W}|^2}, & |\mathbf{W}| < 1, \\ |\partial_\theta \mathbf{W}|^2, & |\mathbf{W}| = 1, \end{cases} \quad (31)$$

其中 $|\mathbf{W}| = 1$ 表示纯态的情况, $|\mathbf{W}| < 1$ 代表混合态的情况. 值得指出的是, 虽然在本文连续测量方案中, 当后选择测量结果为零时二能级原子的演化由一个么正演化 (厄米的哈密顿量支配) 变为一个非么正演化 (非厄米的哈密顿量支配), 但厄米系统中对于纯态的量子 Fisher 信息的计算公式 (如方程 (26)) 还是可以用于本文连续测量方案中非厄米系统中纯态的量子 Fisher 信息的计算. 这是因为文献 [20] 已经阐明非厄米系统中归一化后的最终量子态中, 对于纯态的量子 Fisher 信息的计算仍然可以表示成方程 (26) 相同的公式. 因此, 对于本文中归一化后的量子态, 如方程 (15) 所示的纯态量子 Fisher 信息, 可以沿用方程 (26) 或方程 (29) 来计算. 当然, 在具体利用方程 (26) 或方程 (29) 来计算量子 Fisher 信息时, 要注意归一化因子中是否含有待测参数, 如果不含待测参数, 则量子 Fisher 信息的计算更加简便.

4 数值结果与理论分析

在初态 $|\psi(0)\rangle$ 中, 令 $\mu(0) = \cos(\theta/2)$, $\nu(0) = \sin(\theta/2)e^{i\phi}$, 这里 θ 是初态的振幅参数, ϕ 是相位参数. 本文选择 $\theta = \pi/2$, 重点考察相位参数 ϕ 的估算精度, 即量子 Fisher 信息 F_ϕ . 这里采用连续测量方案, 最后得到的原子系统的量子态 (如方程 (15)) 是一个纯态. 为了方便计算, 选择用方程 (29) (不需要对密度矩阵进行谱分解) 来计算相位参数 ϕ 的量子 Fisher 信息 F_ϕ . 通过简单的代数运算后, 不难得到 F_ϕ 的解析表达式为

$$F_\phi = \frac{4|\tilde{h}(t)|^2}{(1 + |\tilde{h}(t)|^2)^2}. \quad (32)$$

对于没有考虑连续测量方案的情况, 即基于方程 (10) 和方程 (12) 的动力学演化, 直接利用不用密度矩阵谱分解的方程 (28) 很容易得到 $F_\phi = |h(t)|^2$, 这已被文献 [7] 用谱分解的方法证明. 当已知量子 Fisher 信息 F_ϕ 的表达式, 就可以方便讨论

采用连续测量方案在保护量子 Fisher 信息 F_ϕ 方面的表现.

在图 1 中, 考虑共振情况下, 如 $\delta = 0$ 即 $k = 1$ 下, 量子 Fisher 信息 F_ϕ 在不同的标度参数 x 下随谱宽度 λ 的变化: 图 1(a), $\lambda = 10\gamma_0$; 图 1(b), $\lambda = 0.1\gamma_0$; 图 1(c), $\lambda = 0.01\gamma_0$. 图 1 涵盖了从马尔科夫 (图 1(a)) 到非马尔科夫机制 (图 1(b) 和 (图 1(c))) 的变化, 且各个子图中红色和蓝色的实线 (分别代表标度参数 $x = 0.01 \rightarrow 0.1$) 通过解析表达式 (20) 获得, 绿色和黑色的虚线 (分别代表标度参数 $x = 0.01 \rightarrow 0.1$) 直接利用方程 (14) 的数值计算得到, 而黑色的实线代表没有采用连续测量的表现. 首先, 图 1(a) 清晰地显示, 在马尔科夫机制 $\lambda = 10\gamma_0$ 即 $\gamma_0/\lambda = 0.1$ 下, 基于方程 (14) 的数值计算和解析表达式 (20) 的 F_ϕ 对于不同的参数 x 几乎遵循相同的演化特征. 这是因为计算 $h^n(\tau)$ 的解析表达式 (20) 是基于方程 (14) 在条件 $\gamma_0/\lambda \ll 1$ 下得到的. 进一步地, 观察图 1(a) 不难发现, 量子 Fisher 信息 F_ϕ 的演化特性在采用连续测量 (如 $x = 0.1$ 对应演化曲线所示) 情况比没有使用连续测量 (如黑实线显示) 保持得更好. 更重要的是, 通过将参数调至 $x = 0.01$, 量子 Fisher 信息 F_ϕ 能够稳定保持在一个较高的数值, 且随时间衰减很小. F_ϕ 之所以在很小的 x 下几乎不受环境的影响, 其背后的物理原因是: 在极限条件 $x \rightarrow 0$ 下, 方程 (20) 中 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ 可以简化成 $\tilde{h}(t) \rightarrow 1$, 这意味着原子被冻结在它的最初态, 即量子 Fisher 信息 F_ϕ 没有受环境影响, 这正好对应连续测量下量子芝诺效应表现出的结果. 图 1(a) 已经阐明在马尔科夫机制 ($\lambda = 10\gamma_0$) 下对 $h^n(\tau)$ 的计算, 解析表达式 (20) 能完美地捕获基于方程 (14) 的数值计算结果, 并给出了合理的解释.

图 1(b) 显示了在弱非马尔科夫机制 $\lambda = 0.1\gamma_0$ 下 F_ϕ 的演化特性. 由图 1(b) 可知, 在 $\lambda = 0.1\gamma_0$ 下基于方程 (14) 的数值计算和解析表达式 (20) 的 F_ϕ 对于不同的参数 $x = 0.01, 0.1$ 还是符合得很好, 这进一步体现了解析表达式 (20) 在很大参数范围内都能较好捕获数值计算的结果. 另外, 图 1(b) 也显示, 虽然在没有使用连续测量的非马尔科夫机制 $\lambda = 0.1\gamma_0$ 下 F_ϕ 表现为振荡变化的演化特征 (如黑色实线所示), 但采用了连续测量方法 (如 $x = 0.01, 0.1$ 曲线所示) 后的 F_ϕ 还是会明显优于没有使用连续测量时的情况.

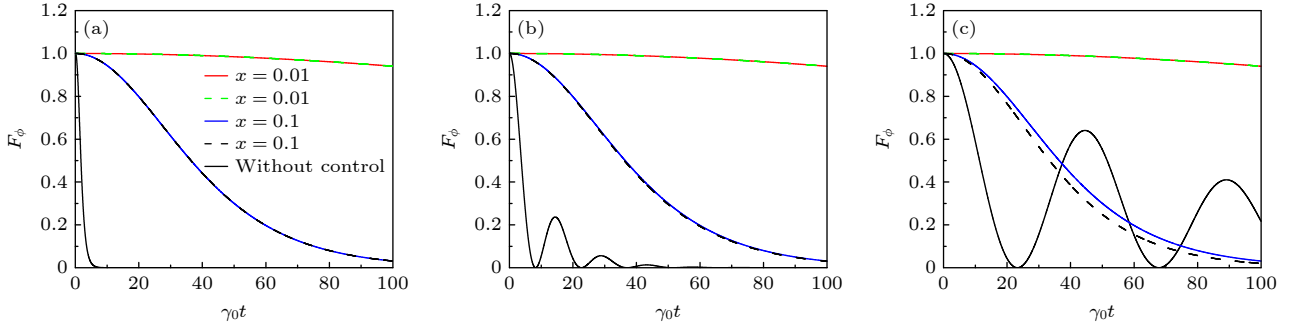


图 1 在共振情况 $\delta = 0$ 下, 不同的标度参数 x 和谱宽度 λ 时, 量子 Fisher 信息 F_ϕ 随无量纲参量 $\gamma_0 t$ 的变化, 即从马尔科夫 ((a) $\lambda = 10\gamma_0$) 到非马尔科夫机制 ((b) $\lambda = 0.1\gamma_0$; (c) $\lambda = 0.01\gamma_0$) 的变化. 在图 (a)–(c) 中, 红实线和蓝实线代表基于解析表达式 (20) 计算 $h^n(\tau)$ 得到的曲线; 绿虚线和黑虚线表示由方程 (14) 数值计算 $h^n(\tau)$ 得到的曲线; 黑色实线是没有使用任何测量画出的曲线, 其他参数为 $k = 1$

Fig. 1. In the resonant case $\delta = 0$, quantum Fisher information F_ϕ as a function of dimensionless time $\gamma_0 t$ conditioned on the null-result monitoring of the reservoir for different x and widths of spectral density λ , namely the variation from the Markovian ((a) $\lambda = 10\gamma_0$) to non-Markovian ((b) $\lambda = 0.1\gamma_0$ regimes; (c) $\lambda = 0.01\gamma_0$). In panels (a)–(c), the red-solid and blue-solid lines represent the curves obtained from the analytical expression (20) for $h^n(\tau)$; the green-dashed and black-dashed lines indicate the curves calculated from the numerical calculation of $h^n(\tau)$ based on Eq. (14); the black-solid line shows the curve plotted without any measurements, other parameter is $k = 1$.

图 1(c) 考虑了在强非马尔科夫机制 $\lambda = 0.01\gamma_0$ 下 F_ϕ 的演化特性. 从图 1(c) 可以发现, 当 $x = 0.01$ 时, 基于方程 (14) 的数值计算和解析表达式 (20) 给出的 F_ϕ 还是符合得很好, 但在 $x = 0.1$ 时, 两种计算方式得到的 F_ϕ 就出现了细微的差别 (如蓝色实线和黑色虚线显示). 首先, 当参数 x 很小如 $x = 0.01$ 时 (对应频繁测量), 它导致了强烈的量子芝诺效应, 此时原子的量子态冻结在它的最初态, 所以, 解析表达式 (20) 和基于方程 (14) 的数值计算 $h^n(\tau)$ 都会趋于一致; 而当参数 x 不是很小如 $x = 0.1$ 时, 量子芝诺效应没有那么强烈, 而基于方程 (14) 数值计算 $h^n(\tau)$ 取决于两个参数: x 和 γ_0/λ , 而解析表达式 (20) 是方程 (14) 在条件 $\gamma_0/\lambda \ll 1$ (这里保留到 γ_0/λ 的一阶) 得到的, 但 $\lambda = 0.01\gamma_0$ 即 $\gamma_0/\lambda = 100$, 这就导致解析表达式 (20) 和方程 (14) 数值计算 $h^n(\tau)$ 有所差别. 当然, 在强马尔科夫机制 $\lambda = 0.01\gamma_0$ 下, 由于强烈的非马尔科夫效应, 在没有连续测量时 (图 1(c) 中的黑色实线) 的 F_ϕ 在某些时间段会比在 $x = 0.1$ 的连续测量情况时衰减得更慢些. 但在 $x = 0.01$ 连续测量下的 F_ϕ 还是更好地抵御了量子退相干的影响. 总之, 从图 1 可以看到: 从马尔科夫机制到非马尔科夫机制, 解析表达式 (20) 在较大参数范围内能捕获基于方程 (14) 给出的数值计算结果.

下面考虑在非共振情况下连续测量对量子 Fisher 信息 F_ϕ 动力学演化的影响. 图 2 给出了在

非共振情况 $\delta = 2\lambda$ (此时 $k = 1 - 2i$) 下, 不同的标度参数 x 和谱宽度 λ 时, 量子 Fisher 信息 F_ϕ 随无量纲参量 $\gamma_0 t$ 的变化. 首先, 从图 2(a) 和图 1(a) 中的黑色实线不难发现, 在没有施加连续测量时, 在相同的马尔科夫参数机制 (如 $\lambda = 10\gamma_0$) 下, 非共振情况的 F_ϕ 比共振情况衰减得更慢些. 这是因为系统的频率和环境的中心频率存在失谐时, 它们耦合得不彻底, 这样就导致系统流入环境中的信息和能量会更少, 进而系统衰减更慢. 类似地, 在弱和强的非马尔科夫参数机制 (如 $\lambda = 0.1\gamma_0, 0.01\gamma_0$, 图 2(b) 和图 2(c) 中的黑色实线) 下, 非共振情况的 F_ϕ 随时间的演化显示出先衰减到一个非零值, 然后又重新恢复的特征. 然而在共振情况的 F_ϕ (图 1(b) 和图 1(c) 中的黑色实线) 则显示先衰减到零, 然后再重新恢复的特点. 在非共振情况和共振情况之所以有这个显著区别也是由于系统的频率和环境的中心频率存在失谐时, 它们的耦合就会出现偏差, 导致系统和环境之间的信息和能量的交换得不彻底, 所以 F_ϕ 在非共振情况下出现先衰减到一个非零值, 然后又呈现恢复的演化特征. 进一步, 当施加了连续测量以后, 总的来说可以通过调节参数 x , 如当选择 $x = 0.01$ 时, F_ϕ 不管是在马尔科夫 ($\lambda = 10\gamma_0$) 和非马尔科夫机制 ($\lambda = 0.1\gamma_0, 0.01\gamma_0$) 都会显示超越没有施加连续测量时的演化特性. 另外, 比较图 2 和图 1 可以发现, 无论是在非共振还是共振情况, 使用连续测量以后对应的 F_ϕ 显示出

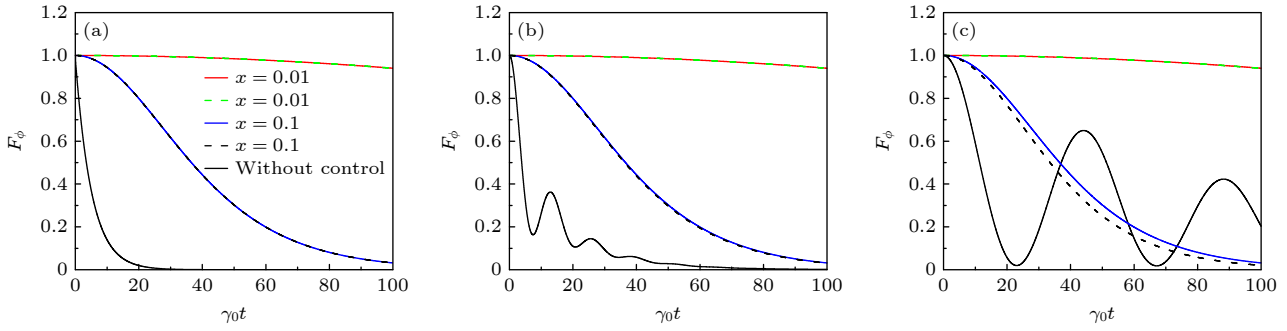


图2 在非共振情况 $\delta = 2\lambda$ 下, 不同的标度参数 x 和谱宽度 λ 时, 量子 Fisher 信息 F_ϕ 随无量纲参量 $\gamma_0 t$ 的变化, 即从马尔科夫 ((a) $\lambda = 10\gamma_0$) 到非马尔科夫机制 ((b) $\lambda = 0.1\gamma_0$; (c) $\lambda = 0.01\gamma_0$) 的变化. 在图 (a)–(c) 中, 红实线和蓝实线代表由解析表达式 (20) 计算 $h^n(\tau)$ 得到的曲线; 绿虚线和黑虚线表示基于方程 (14) 数值计算 $h^n(\tau)$ 得到的曲线; 黑色实线是没有使用任何测量画出的曲线, 其他参数为 $k = 1 - 2i$

Fig. 2. In the non-resonant case, quantum Fisher information F_ϕ as a function of dimensionless time $\gamma_0 t$ conditioned on the null-result monitoring of the reservoir for different x and widths of spectral density λ , namely the variation from the Markovian ((a) $\lambda = 10\gamma_0$) to non-Markovian ((b) $\lambda = 0.1\gamma_0$ regimes; (c) $\lambda = 0.01\gamma_0$). In panels (a)–(c), the red-solid and blue-solid lines represent the curves obtained from the analytical expression (20) for $h^n(\tau)$; the green-dashed line and black-dashed line indicate the curves calculated from the numerical calculation of $h^n(\tau)$ based on Eq. (14); the black-solid line shows the curve plotted without any measurements, other parameter is $k = 1 - 2i$.

几乎没有差别的演化趋势. 这一方面体现了连续测量的特性, 另一方面也印证了解析表达式 (20) 中的 $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ 主要取决于标度参数 x .

5 结 论

本文探讨了在零温玻色热库的振幅耗散模型中, 利用连续空结果测量对二能级原子相位参数量子 Fisher 信息的保护作用. 通过解析求解和简单的数值分析发现: 不管是马尔科夫和非马尔科夫机制条件下, 二能级原子的相位估计精度即量子 Fisher 信息主要取决于一个由环境的谱宽度和测量的时间间隔乘积的标度参数. 通过调节这个标度参数, 二能级原子的量子 Fisher 信息都能得到显著的提高. 本文的主要创新点在于, 将一个二能级原子最终态的核心振幅系数改为一种特殊形式, 进而获得了该系数一个非常简洁的数学表达式. 有趣的是, 我们发现基于连续空结果测量的二能级原子动力学与一个标度参数密切相关, 该参数是环境谱宽度和测量时间间隔的乘积, 并且此动力学在一些特殊情况下能退化为已有的量子芝诺效应和马尔科夫近似的结果. 本文将原子系统最终态中的振幅系数改写成特殊形式的作法可用于量子相同步保护以及提高量子电池中能量存储等科学问题, 这有待于进一步研究. 总之, 本文提出利用连续空结果测量方法来提高参数估计精度所获得的结果可能

对开放量子系统中量子度量学和量子精密测量的相关研究有一定的借鉴作用.

参考文献

- [1] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401
- [2] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photon.* **5** 222
- [3] Ren Z H, Li Y, Li Y N, Li W D 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 040601 (in Chinese) [任志红, 李岩, 李艳娜, 李卫东 2019 物理学报 **68** 040601]
- [4] Helstrom C W 1969 *J. Stat. Phys.* **1** 231
- [5] Braunstein S L, Caves C M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [6] Fisher R A 1925 *Theory of Statistical Estimation* (Oxford: Oxford University Press) pp700–725
- [7] Lu X M, Wang X, Sun C P 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042103
- [8] He Z, Jiang D K, Li Y 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 210303 (in Chinese) [贺志, 蒋登魁, 李艳 2022 物理学报 **71** 210303]
- [9] Song H, Luo S, Hong Y 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042110
- [10] Hyllus P, Laskowski W, Krischek R, et al. 2012 *Phys. Rev. A* **85** 022321
- [11] Li N, Luo S L 2013 *Phys. Rev. A* **88** 014301
- [12] Hong Y, Luo S L, Song H 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042313
- [13] Liu R, Wu Z, Li Y C, Chen Y Q, Peng X H 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 110305 (in Chinese) [刘然, 吴泽, 李宇晨, 陈昱全, 彭新华 2023 物理学报 **72** 110305]
- [14] Guo W, Zhong W, Jing X X, Fu L B, Wang X 2016 *Phys. Rev. A* **93** 042115
- [15] Albarelli F, Friel J F, Datta A 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 200503
- [16] Liu J, Yuan H, Lu X M, Wang X 2020 *J. Phys. A* **53** 023001
- [17] Lu X M, Wang X 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 120503
- [18] Yu M, Li D, Wang J, et al. 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 043122
- [19] Zhang X, Lu X M, Liu J, et al. 2023 *Phys. Rev. A* **107** 012414
- [20] Yu X, Zhang C J 2023 *Phys. Rev. A* **108** 022215
- [21] Li J, Ding H T, Zhang D W 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 200601 (in Chinese) [李竞, 丁海涛, 张丹伟 2023 物理学报 **72** 200601]

- [22] Yu X, Zhao X, Li L, et al. 2024 *Sci. Adv.* **10** eadk7616
- [23] Ren J F, Li J, Ding H T, Zhang D W 2024 *Phys. Rev. A* **110** 052203
- [24] Wang Y C, Li J, Duan L W, Chen Q H J 2025 *Phys. Rev. A* **112** 043704
- [25] Ma J, Huang Y X, Wang X, Sun C P 2011 *Phys. Rev. A* **84** 022302
- [26] Chin A W, Huelga S F, Plenio M B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 233601
- [27] Wang Y S, Chen C, An J H 2017 *New J. Phys.* **19** 113019
- [28] Wu W, Peng Z, Bai S Y, An J H 2021 *Phys. Rev. Appl.* **15** 054042
- [29] Bai S Y, An J H 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 050801
- [30] Liu J, Jing X, Wang X 2013 *Phys. Rev. A* **88** 042316
- [31] Tan Q S, Huang Y, Yin X, Kuang L M, Wang X 2013 *Phys. Rev. A* **87** 032102
- [32] Berrada K 2013 *Phys. Rev. A* **88** 035806
- [33] He Z, Yao C M 2014 *Chin. Phys. B* **23** 110601
- [34] Zheng Q, Ge L, Yao Y, Zhi Q J 2015 *Phys. Rev. A* **91** 033805
- [35] Li Y L, Xiao X, Yao Y 2015 *Phys. Rev. A* **91** 052105
- [36] Chen Y, Long Z W, He Z, Ji S T 2021 *Sci. Rep.* **11** 21138
- [37] Xu L, Cao Y, Li X Q, Yan Y J, Gurvitz S 2014 *Phys. Rev. A* **90** 022108
- [38] Xu L, Li X Q 2016 *Phys. Rev. A* **94** 032130
- [39] Breuer H P, Petruccione F 2002 *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford: Oxford University Press) pp461–463
- [40] Bellomo B, LoFranco R, Compagno G 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 160502
- [41] Breuer H P, Laine E M, Piilo J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 210401
- [42] Breuer H P, Laine E M, Piilo J, Vacchini B 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 021002
- [43] Zhang Y J, Man Z X, Xia Y J 2009 *Eur. Phys. J. D* **55** 173
- [44] Zhou J, Wu C J, Zhu M Y, Guo H 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 215505
- [45] Zhang Y J, Man Z X, Zou X B, Xia Y J, Guo G C 2010 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** 045502
- [46] Xu Z Y, Yang W L, Feng M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 044105
- [47] Li J G, Zou J, Shao B 2010 *Phys. Rev. A* **81** 062124
- [48] Xiao X, Fang M F, Li Y L, Kang G D, Wu C 2010 *Eur. Phys. J. D* **57** 447
- [49] Xiao X, Fang M F, Li Y L 2010 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43** 185505
- [50] He Z, Zou J, Li L, Shao B 2011 *Phys. Rev. A* **83** 012108
- [51] Dittmann J 1999 *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** 2663
- [52] Peng J X 2024 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: East China Normal University) (in Chinese) [彭家鑫 2024 博士学位论文 (上海: 华东师范大学)]
- [53] Zhong W, Z Sun, Wang X, Nori F 2013 *Phys. Rev. A* **87** 022337
- [54] Zhong W 2014 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [钟伟 2014 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]

Protection of phase estimation precision based on continuous null-result measurements*

HE Zhi^{1)2)†} LUO Jiatao²⁾ WEI He²⁾1) (*College of Physics Mechanical and Electrical Engineering, Jishou University, Jishou 416000, China*)2) (*School of Optoelectronic Engineering, Hubei University of Automotive Technology, Shiyan 442002, China*)

(Received 29 September 2025; revised manuscript received 26 October 2025)

Abstract

Quantum Fisher information plays a central role in the fields of quantum metrology and quantum precision measurement. However, quantum systems are vulnerable to the influence of noisy environments, which degrades the precision of parameter estimation (as measured by quantum Fisher information). Therefore, overcoming the influence of environmental noise has become an important scientific issue in quantum precision measurement to enhance the quantum Fisher information of parameters. In this work, we investigate the enhancement of phase estimation precision for a two-level atom subjected to a zero-temperature bosonic environment, using a continuous null-result measurement scheme. We derive an analytical expression for the final state of the atomic system after n null-result measurements. To emphasize the crucial role of continuous measurement in the dynamics of a two-level atom, the core amplitude coefficient in the final state is reformulated into a specific form, resulting in a concise mathematical expression. Interestingly, we find that the dynamics of the two-level atom under continuous measurements are closely related to a scaling parameter—the product of the environmental spectral width and the measurement time interval. In certain special cases, this formulation reduces to known results such as the quantum Zeno effect and Markovian approximations. Furthermore, we demonstrate that under both Markovian and non-Markovian conditions, the quantum Fisher information for the atomic phase estimation can be significantly enhanced by adjusting this scaling parameter. Using an exactly solvable model, we also provide an explanation for the quantum Zeno effect without explicitly using the projection postulate. We find that in certain limits a concise formula for $\tilde{h}(t) = h^n(\tau)$ accurately captures the numerical results across a broad range of parameters. In summary, the proposed frequent null-result measurement scheme for post-selection of the environment effectively mitigates the adverse effects of decoherence on quantum Fisher information, providing a novel theoretical approach for achieving high-precision measurements in open quantum systems.

Keywords: open quantum systems, quantum Fisher information, continuous null-result measurements

DOI: [10.7498/aps.75.20251341](https://doi.org/10.7498/aps.75.20251341)

CSTR: [32037.14.aps.75.20251341](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20251341)

* Project supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 2020JJ4443) and the Innovation and Entrepreneurship Training Program for College Students of Hubei University of Automotive Technology, China (Grant Nos. DC2025010, 202510525010).

† Corresponding author. E-mail: hz9209@126.com



基于连续空结果测量方案的相位估计精度保护

贺志 罗嘉涛 韦和

Protection of phase estimation precision based on continuous null-result measurements

HE Zhi LUO Jiatao WEI He

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 030603 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20251341

CSTR: 32037.14.aps.75.20251341

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251341>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于量子Fisher信息测量的实验多体纠缠刻画

Experimentally characterizing multiparticle entanglement based on measuring quantum Fisher information

物理学报. 2023, 72(11): 110305 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230356>

非厄米哈密顿量中的量子Fisher信息与参数估计

Quantum Fisher information and parameter estimation in non-Hermitian Hamiltonians

物理学报. 2023, 72(20): 200601 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230862>

运动参考系中量子Fisher信息

Quantum Fisher information in moving reference frame

物理学报. 2024, 73(5): 050601 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231394>

多量子比特WV纠缠态在Lipkin-Meshkov-Glick模型下的量子Fisher信息

Quantum Fisher information of multi-qubit WV entangled state under Lipkin-Meshkov-Glick model

物理学报. 2023, 72(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231179>

基于量子Fisher信息的耗散相互作用光-物质耦合常数的估计

Estimation of light-matter coupling constant under dispersive interaction based on quantum Fisher information

物理学报. 2022, 71(9): 090601 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212029>

一种与开放系统初态无关的非马尔科夫度量

Non-Markovian measure independent of initial states of open systems

物理学报. 2022, 71(21): 210303 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221053>