

# 含界面膜黏弹性流体的表面波色散方程和功率谱\*

李昊轩 孙浩森 赵贯甲†

(太原理工大学电气与动力工程学院, 太原 030024)

(2025 年 11 月 12 日收到; 2025 年 12 月 23 日收到修改稿)

含界面膜且体相兼具黏弹性的复杂流体体系, 其界面的复表面膨胀模量以及体相的复黏度的精准获取, 是界面流变学及复杂流体界面动力学等研究领域的关键问题. 非接触式表面光散射法为该类体系的性质测量提供了有效方法, 而准确构建复杂流体的表面波色散方程至关重要. 本文基于 Maxwell 形式的体相复黏度与界面复表面膨胀模量, 构建了含弛豫时间的表面波色散方程, 并通过功率谱的部分分式展开法, 系统分析了关键无量纲参数对表面及体相模式分布及功率谱特征变化的影响规律. 本文研究揭示了体相与界面的双弛豫耦合引起毛细波与弹性波的耦合与转化, 以及功率谱结构转变的机制. 本文研究为理解存在界面膜及体相黏弹性的复杂流体界面波动特性提供了理论依据, 同时也为表面光散射实验测量其热物性参数奠定了基础.

**关键词:** 复杂流体, 复黏度, 复表面膨胀模量, 表面光散射法, 色散方程

**DOI:** 10.7498/aps.75.20251548

**CSTR:** 32037.14.aps.75.20251548

## 1 引言

含有界面膜的黏弹性复杂流体, 如含有表面活性剂、蛋白质或聚合物的溶液, 广泛存在于生物工程、食品科学和石油化工等领域<sup>[1,2]</sup>. 黏弹性是指材料兼具黏性流体和弹性固体特性的一种力学行为, 在形变过程中同时表现出能量耗散与能量储存<sup>[3]</sup>. 这类复杂流体不仅具有体相黏弹性, 其气液界面由于膜的存在, 还表现出独特的界面黏弹性<sup>[4]</sup>.

界面黏弹性可由复表面膨胀模量表示, 反映界面在形变过程中的储能与耗散能力. 其中储能分量体现界面的弹性响应, 决定了界面膜抵抗面积变化与恢复平衡状态的能力; 耗散分量则反映界面能量损失的黏性过程, 描述了能量耗散机制<sup>[5,6]</sup>. 储能分量在泡沫与乳液体系中起稳定作用, 可抑制气泡或液滴破裂, 因此对食品、化妆品及石油开采等领域的体系稳定性研究至关重要<sup>[7-9]</sup>; 而耗散分量控制

界面对动态扰动的阻尼作用与能量耗散, 影响气泡传热传质过程中的动力学特性<sup>[10]</sup>. 在高速涂敷、喷墨打印等过程中, 流体的流动过程可以通过界面振荡来控制<sup>[11,12]</sup>. 因此, 准确获取体相复黏度及复表面膨胀模量等热物理性质是复杂流体科学研究和工程应用的基础.

传统流变学测量方法 (如旋转流变仪) 难以直接获取界面的弛豫行为, 且在高频剪切条件下受到固有限制<sup>[13]</sup>. 相比之下, 流体界面处的热涨落可自发激发纳米尺度的表面波, 其特征频率可达 MHz 量级, 提供了天然的高频剪切扰动. 因此, 表面光散射法 (SLS) 无需外加机械力即可非接触、高灵敏地获取界面流变参数及体相信息<sup>[14]</sup>. 尽管牛顿流体的表面波色散理论已较为成熟, 并已在 SLS 实验中得到系统验证<sup>[15-18]</sup>, 但针对黏弹性复杂流体的相应理论仍有待完善.

在表面波色散理论的发展中, 已有研究多从体相或界面单一方面描述黏弹性效应. 在界面流变方

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51976132) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhaoguanjia@tyut.edu.cn

面, 1971年, Lucassen 和 van Den Tempel<sup>[5]</sup> 等最早提出表面膨胀模量模型以描述吸附解吸控制的界面动力学; 1990年, Earnshaw 等<sup>[19]</sup> 将其推广为具有频率依赖性的复数形式; 2019年, Loglio 等<sup>[20]</sup> 进一步引入分数阶 Maxwell 模型以表征宽谱界面弛豫过程; 然而上述工作通常假设体相为牛顿流体, 未能反映体相黏弹性的影响. 而在体相流变方面, 1991年, Harden 等<sup>[21]</sup> 建立了非牛顿流体的表面波理论; 2011年, Ohmasa 和 Yao<sup>[22]</sup> 采用 Maxwell 型复黏度模型分析了体相松弛对色散与光谱特征的调制作用, 但均未考虑界面的黏弹性质. 1998年, Wang 和 Huang<sup>[23-25]</sup> 曾构建包含界面吸附层与体相黏弹性贡献的统一模型, 但其界面处理主要基于实数表面膨胀模量, 未能描述界面膜的频率依赖松弛行为.

综上, 现有研究尚缺乏能同时描述体相与界面双重黏弹性及其耦合机制的表面波色散模型. 鉴于实际复杂流体体系往往同时表现出体相与界面的多尺度松弛特性, 有必要建立统一的理论框架加以描述<sup>[26,27]</sup>. 本课题组前期工作已基于多弛豫时间 Maxwell 模型系统研究了体相多尺度松弛对表面波模式分布及功率谱特征的影响, 但未涉及界面黏弹性效应<sup>[28]</sup>. 因此, 本文进一步引入复表面膨胀模量, 将体相与界面黏弹性统一纳入同一色散框架中, 系统分析两者弛豫过程间的竞争与耦合机制, 从而拓展表面光散射法在含膜黏弹性复杂流体体系中的理论适用范围.

## 2 黏弹性含膜流体表面波色散方程

为了扩展频率反馈模型的适用范围, 引入了基于多弛豫时间 Maxwell 模型来描述体相复黏度<sup>[28]</sup>:

$$\eta(\omega) = \eta_{\infty} + \sum_n \frac{\eta_1}{n^2(1 - i\omega\tau_n)}, \quad (1)$$

式中,  $\tau$  为应力松弛时间;  $\eta_1/\tau$  表示高频剪切模量;  $\eta_{\infty}$  为常数项, 用来表示高频黏度响应;  $\omega$  为表面波圆频率;  $\tau_n = \tau/n^2$ ,  $n$  取 1, 2, 3, ... 考虑到体相与界面黏弹性耦合后, 方程和参数变化情况会更加复杂, 因此, 本文在理论构建时选择采用简单 Maxwell 模型来描述体系的体相复黏度和界面复膨胀模量.

对于体相流体, 复黏度模型  $\eta(\omega)$  表示为<sup>[22]</sup>

$$\eta(\omega) = \eta_{\infty} + \frac{\eta_1}{1 - i\omega\tau}, \quad (2)$$

式中, 黏度的低频极限为  $\eta_0$ ,  $\eta_0 = \eta_1 + \eta_{\infty}$ . 当  $\omega\tau \ll 1$  或者  $\eta_1 = 0$  时, 复黏度  $\eta(\omega)$  退化为牛顿流体的黏度表达式. 可将复黏度  $\eta(\omega)$  进一步表示为

$$\eta(\omega) = \frac{\eta_0 - i\omega\tau\eta_{\infty}}{1 - i\omega\tau}. \quad (3)$$

对于含膜的复杂流体, 当界面受到扰动时, 界面也具有黏弹性弛豫特性<sup>[29]</sup>. 为了分析界面膜在不同模式下的黏弹性动力学特征, 本文尝试引入 Miller 和 Liggieri<sup>[30]</sup> 提出的复表面膨胀模量  $\varepsilon(\omega)$ , 并简化为一般的 Maxwell 模型:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\Delta\varepsilon}{1 - i\omega\tau_s}, \quad (4)$$

式中,  $\tau_s$  为界面应力松弛时间;  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}$  为弛豫强度,  $\varepsilon_{\infty}$  为高频极限模量,  $\varepsilon_0$  为低频极限模量. 当  $\omega\tau_s \ll 1$  或  $\Delta\varepsilon = 0$  时, 复表面膨胀模量  $\varepsilon(\omega)$  退化为常数模量表达式. 可将复模量  $\varepsilon(\omega)$  进一步表示为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \frac{1 - i\omega\tau_s r}{1 - i\omega\tau_s}, \quad (5)$$

式中  $r = \varepsilon_{\infty}/\varepsilon_0$ , 表示为界面模量在高低频极限间的比值, 反映界面的冻结程度. 当  $r \sim 0$  时, 界面在高频极限下的模量远小于低频极限, 表现为完全松弛的黏性界面; 当  $r \sim 1$  时, 界面在整个频率范围内保持高模量, 表现为刚性或固态界面.

需要指出的是, 本文仅引入表面膨胀模量  $\varepsilon(\omega)$  以描述界面膜的黏弹性质, 而未包含界面剪切模量. 因为所研究的表面波模式主要对应界面面积涨落, 剪切模量主导的面内剪切模式与界面高度起伏及表面光散射信号耦合较弱. 这一简化处理与经典的黏弹性表面波理论框架保持一致<sup>[23]</sup>, 适用于大多数不具备显著剪切弹性的流体体系.

如图 1 所示, 假设黏弹性流体填充  $z < 0$  的空间, 并且其表面在  $xy$  平面延伸. 液体的表面张力和密度分别用  $\sigma$  和  $\rho$  表示. 其体相由复黏度  $\eta(\omega)$  表征. 界面引入复表面膨胀模量  $\varepsilon(\omega)$  以描述界面黏弹性效应. 界面热涨落激发的表面波具有波矢  $\mathbf{q}$ , 其高度扰动幅值为  $\zeta_{\mathbf{q}}$ , 体相速度场在垂直方向上的特征衰减长度为  $1/q$ . 表面波的色散方程可表示为<sup>[31]</sup>

$$D(\mathbf{q}, \omega) = \left( \frac{2\eta(\omega)q^2}{\rho} \right) \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon(\omega)q}{2\eta(\omega)} \frac{1}{i\omega} \right) \left( \frac{m(\omega)}{q} - \frac{\sigma q}{\eta(\omega)} \frac{1}{i\omega} \right) - \left( 1 - \frac{\rho}{2\eta(\omega)q^2} i\omega - \frac{\varepsilon(\omega)m(\omega)}{2\eta(\omega)} \frac{1}{i\omega} \right) \left( 1 - \frac{\rho}{2\eta(\omega)q^2} i\omega - \frac{\rho}{2\eta(\omega)q^2} \frac{\sigma q^3}{i\omega\rho} \right) \right], \quad (6)$$

式中  $q$  为表面波波数;  $m(\omega) = \sqrt{q^2 - i\omega\rho/\eta(\omega)}$  为复数, 且  $\text{Re}[m(\omega)] > 0$ , 表示表面波沿  $z$  方向由界面相向体相的渗透深度<sup>[32]</sup>. 为验证该色散方程的正确性, 可考察其在不同极限情况下的退化行为. 结果表明, 该方程在界面膜黏性忽略 ( $\tau_s \rightarrow 0$ )、界面不存在 ( $\varepsilon(\omega) \rightarrow 0$ ) 以及体相为牛顿流体 ( $\eta(\omega) \rightarrow \eta$ ) 等极限下, 分别还原为 Wang-Huang, Harden 以及 Levich 的经典色散关系<sup>[21,23,31]</sup>, 从而在理论层面验证了模型的自洽性与准确性.

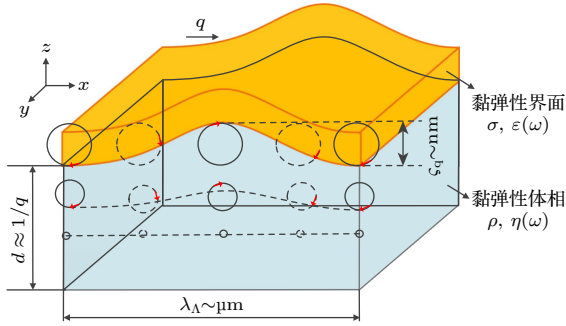


图 1 黏弹性表面波传播示意图

Fig. 1. Schematic diagram of surface wave propagation in a viscoelastic fluid.

根据线性响应理论<sup>[33]</sup>, 由于激光等外界激励对液体表面波产生的扰动是微弱的, 因此表面波动对该扰动的响应可视为线性, 则功率谱由线性响应函数求得<sup>[22,34]</sup>:

$$P_T(q, \omega) = -\frac{2k_B T q}{\rho \omega} \text{Im} \frac{\omega^2 - \varepsilon(\omega) q^2 [m(\omega) - q] / \rho}{D(q, \omega)}, \quad (7)$$

式中  $k_B$  为玻尔兹曼常数,  $k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$  J/K;  $T$  为开尔文温度;  $\text{Im}[\cdot]$  为取虚部函数.

参考 Ohmasa 方法定义下述无量纲变量<sup>[22]</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{\rho}{2\eta_0 q^2} \omega, \quad \bar{t} = \frac{2\eta_0 q^2}{\rho} t, \quad \bar{\tau} = \frac{2\eta_0 q^2}{\rho} \tau, \\ \bar{\tau}_s &= \frac{2\eta_0 q^2}{\rho} \tau_s, \quad \bar{\sigma} = \frac{\rho}{4\eta_0^2 q} \sigma, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\rho}{4\eta_0^2 q} \varepsilon_0, \\ \bar{\eta}_\infty &= \frac{\eta_\infty}{\eta_0}, \quad \bar{m}(\bar{\omega}) = \frac{m(\omega)}{q}. \end{aligned} \quad (8)$$

定义下列含  $\bar{\omega}$  的多项式函数:

$$c(\bar{\omega}) = 1 - i\bar{\omega}\bar{\tau}_s, \quad (9)$$

$$d(\bar{\omega}) = 1 - i\bar{\omega}\bar{\tau}_s r, \quad (10)$$

$$f(\bar{\omega}) = 1 - i\bar{\omega}\bar{\tau}, \quad (11)$$

$$g(\bar{\omega}) = 1 - i\bar{\omega}\bar{\tau}\bar{\eta}_\infty, \quad (12)$$

$$\bar{\varepsilon}(\bar{\omega}) = \bar{\varepsilon} \frac{d(\bar{\omega})}{c(\bar{\omega})}, \quad (13)$$

$$\eta(\omega) = \eta_0 \frac{g(\bar{\omega})}{f(\bar{\omega})}, \quad (14)$$

$$F(\bar{\omega}) = -\bar{\omega}^2 g(\bar{\omega})^2 + \bar{\omega}^2 \bar{\varepsilon}(\bar{\omega}) f(\bar{\omega})^2 - \bar{\varepsilon}(\bar{\omega}) \bar{\sigma} f(\bar{\omega})^2, \quad (15)$$

$$\bar{m}(\bar{\omega}) = \sqrt{1 - 2i\bar{\omega} f(\bar{\omega}) / g(\bar{\omega})}, \quad (16)$$

$$G(\bar{\omega}) = -[i\bar{\omega} g(\bar{\omega}) + \bar{\omega}^2 f(\bar{\omega})]^2 + \bar{\omega}^2 \bar{\sigma} f(\bar{\omega})^2 + \bar{\varepsilon}(\bar{\omega}) \bar{\sigma} f(\bar{\omega})^2, \quad (17)$$

$$A(\bar{\omega}) = -(\bar{\varepsilon}(\bar{\omega}) G(\bar{\omega}) + (\bar{\omega}^2 + \bar{\varepsilon}(\bar{\omega})) F(\bar{\omega})) g(\bar{\omega}) f(\bar{\omega})^2 / h(\bar{\omega}), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} B(\bar{\omega}) &= \{(\bar{\omega}^2 + \bar{\varepsilon}(\bar{\omega})) g(\bar{\omega}) G(\bar{\omega}) + \bar{\varepsilon}(\bar{\omega}) [g(\bar{\omega}) \\ &\quad - 2i\bar{\omega} f(\bar{\omega})] F(\bar{\omega})\} f(\bar{\omega})^2 / h(\bar{\omega}). \end{aligned} \quad (19)$$

使用上述无量纲变量以及多项式函数, 可以得到功率谱  $P_T(q, \omega)$  并将其有理化表示为

$$\begin{aligned} P_T(q, \omega) &= \left( \frac{k_B T \rho^2}{4\eta_0^3 q^5} \right) \frac{1}{\bar{\omega}} \\ &\times \text{Im} \frac{\{\bar{\omega}^2 - \bar{\varepsilon}[\bar{m}(\bar{\omega}) - 1]\} f(\bar{\omega})^2 [G(\bar{\omega}) - F(\bar{\omega}) \bar{m}(\bar{\omega})] g(\bar{\omega})}{[G(\bar{\omega}) + F(\bar{\omega}) \bar{m}(\bar{\omega})][G(\bar{\omega}) - F(\bar{\omega}) \bar{m}(\bar{\omega})] g(\bar{\omega})}. \end{aligned} \quad (20)$$

色散关系可以由多项式方程表示为

$$[G(\bar{\omega}) + F(\bar{\omega}) \bar{m}(\bar{\omega})][G(\bar{\omega}) - F(\bar{\omega}) \bar{m}(\bar{\omega})] g(\bar{\omega}) = 0. \quad (21)$$

该方程可用数值方法求解, 根表示为  $\bar{\omega}_i = \bar{\Omega}_i - i\bar{\Gamma}_i$ , 当实部  $\bar{\Omega}_i$  不为 0 时, 存在负的共轭根  $\bar{\omega}'_i = -\bar{\Omega}_i - i\bar{\Gamma}_i$ . 令  $h(\bar{\omega})$  表示方程分子与分母的公因式项, 因此多项式方程可以表达为

$$\begin{aligned} &[G(\bar{\omega}) + F(\bar{\omega}) \bar{m}(\bar{\omega})][G(\bar{\omega}) - F(\bar{\omega}) \bar{m}(\bar{\omega})] g(\bar{\omega}) \\ &= B_n h(\bar{\omega}) \prod_{i=1}^n (\bar{\omega} - \bar{\omega}_i), \end{aligned} \quad (22)$$

式中  $B_n$  表示  $h(\bar{\omega}) \bar{\omega}^n$  的系数. 利用部分分式展开法将功率谱  $P_T(q, \omega)$  表示为<sup>[22]</sup>

$$P_T(q, \omega) = \sum_{i=1}^n P^i(q, \omega), \quad (23)$$

式中

$$\begin{aligned} P^i(q, \omega) &= -i \left( \frac{k_B T \rho^2}{4\eta_0^3 q^5} \right) \frac{a_i}{B_n} \\ &\times \frac{[\bar{m}'(\bar{\omega}) + i\bar{m}''(\bar{\omega}) \bar{\omega}_i / \bar{\omega}] A(\bar{\omega}_i) + B(\bar{\omega}_i)}{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_i^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $a_i = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}$  ( $i \neq j$ ),  $\bar{m}'(\bar{\omega})$  为  $\bar{m}(\bar{\omega})$  的实部,  $\bar{m}''(\bar{\omega})$  为  $\bar{m}(\bar{\omega})$  的虚部.

### 3 色散方程及功率谱分析

在本节计算过程中, 为体现界面在高频下的部分松弛特性, 取高低频模量比值  $r = 0.2$ , 对应具有中等黏弹性耗散的表面膜. 此时, 界面在低频下表现出较强的弹性响应, 而在高频下趋于部分松弛状态<sup>[35]</sup>. 为了系统分析体相与界面黏弹性对表面波谱的影响, 观察各个参数对色散关系及功率谱的独立影响, 本文在计算中每次仅改变一个无量纲参数, 其余参数取 1, 表征了体相与界面具有相近的松弛时间和强度水平的中等耦合体系. 此外, 这种单参数计算方式能够分别揭示体相与界面松弛, 以及表面张力与界面弹性的竞争关系, 从而在理论上涵盖多数常见界面体系的主要动力学特征. 本文中色散方程根的模式命名沿用已有文献中的通用定义; 而关于参数依赖性、阻尼行为及功率谱结构的分析, 则均基于本文色散方程的直接计算结果, 并与前人工作进行对比验证.

因此通过调整体相无量纲应力松弛时间  $\bar{\tau}$ , 界面无量纲应力松弛时间  $\bar{\tau}_s$ , 无量纲表面张力  $\bar{\sigma}$ , 无量纲表面膨胀模量  $\bar{\varepsilon}$  的值, 可得到有理化色散方程  $[G(\bar{\omega}) + F(\bar{\omega})\bar{m}(\bar{\omega})][G(\bar{\omega}) - F(\bar{\omega})\bar{m}(\bar{\omega})]g(\bar{\omega}) = 0$  的根  $\bar{\omega}_i = \bar{\Omega}_i - i\bar{\Gamma}_i$  的变化情况.

#### 3.1 弛豫时间的影响

图 2(a) 展示了  $\bar{\tau}_s = \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} = 1$  时, 随  $\bar{\tau}$  变化的方

程根轨迹. 图中  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) 表示该根的实部,  $i'$  ( $i' = 1, 2, 3, \dots$ ) 表示该根的虚部. 实线表示该根为方程  $G(\bar{\omega}) + F(\bar{\omega})\bar{m}(\bar{\omega}) = 0$  的解, 虚线则表示该根为  $G(\bar{\omega}) - F(\bar{\omega})\bar{m}(\bar{\omega}) = 0$  的解. 图中黑色竖直细线对应 0.1, 1, 10 三个典型取值, 同时也对应功率谱的计算参数. 而图 3 展示了通过部分分式展开法将总功率谱分解为色散方程根的显式表达. 图中罗马数字与根轨迹中编号相互对应,  $P$  表示为总功率谱曲线.

当体相弛豫时间较小, 即  $\bar{\tau} < 0.1$  时, 体系处于体相快速松弛、界面具有有限黏弹记忆的状态. 此时体相呈强黏性特征, 而界面膨胀模量的虚部贡献不可忽略. 求解色散方程可得到多组复根, 分别记为根 II、根 III 和根 IV, 和一个纯虚根 I.

根 II 随  $\bar{\tau}$  变化平稳, 且随  $\bar{\tau}$  增大时, 实部趋于  $\sqrt{\bar{\sigma}} = 1$ , 其频率行为符合黏性修正毛细波的典型特征, 则根 II 对应毛细波模式<sup>[21]</sup>. 根 III 具有较高的振荡频率且阻尼也较强, 受到界面弹性与体相黏性的共同作用, 则根 III 为毛细-弹性混合模式. 根 IV 虚部远远大于实部, 且根 IV 虚部与根 I 都趋近于曲线  $1/\bar{\tau}$ , 对应体相黏性弛豫主导的过阻尼模式, 反映体相弛豫时间对能量耗散速率的控制作用, 该物理机制与 Wang 和 Huang 的分析结果一致<sup>[23]</sup>. 图 3(a) 功率谱  $P(q, \omega)$  的计算结果进一步验证了上述模式划分. 此时, 功率谱主要由根 II 贡献, 对应黏性修正毛细波; 根 III 仅在主峰右侧形成肩峰, 且表现不明显, 反映界面弹性对高频区的有限增强作用; 根 I 和 IV 贡献极弱. 因此, 在体相弛豫时间较小时, 体系主要由表面张力决定, 而界面弹性仅作为高频修正项存在.

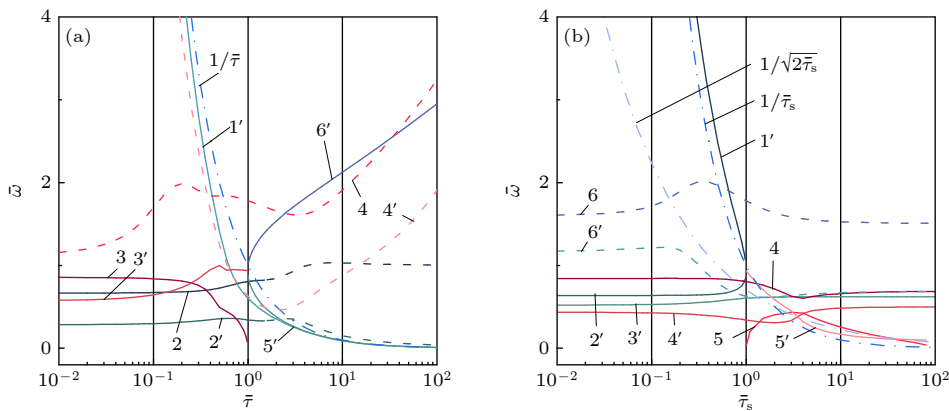


图 2 根轨迹变化图 (a)  $\bar{\tau}_s = \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} = 1$  时, 色散方程的解与  $\bar{\tau}$  的关系; (b)  $\bar{\tau} = \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} = 1$  时, 色散方程的解与  $\bar{\tau}_s$  的关系

Fig. 2. Complex-plane trajectories of the roots of the dispersion equation: (a) Variation with  $\bar{\tau}$  at  $\bar{\tau}_s = \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} = 1$ ; (b) variation with  $\bar{\tau}_s$  at  $\bar{\tau} = \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} = 1$ .

当  $\bar{\tau}$  增大到 1, 体相开始表现出黏弹性特征. 此过程中, 根 II 趋于平稳, 保持毛细波特征; 根 III 分裂为两个过阻尼根 V 和 VI, 表明体相耗散增强. 根 IV 虚部随着  $\bar{\tau}$  减小, 使得实部大于虚部, 表现出振荡模式, 且频率一直高于毛细波频率  $\sqrt{\bar{\sigma}} = 1$ . 这是由于在黏弹耦合体系中, 复模量储能项的增大会增强界面恢复力, 从而表现为高频弹性模式, 这与以往所讨论的弹性增强行为在物理表现上具有相似性<sup>[36]</sup>. 图 3(b) 的功率谱中, 主峰始终由毛细波即根 II 主导, 高频侧表现出弱峰, 而过阻尼模式增强导致峰展宽而峰值降低. 此现象表明体相储能的增强并不会显著放大界面波动耗散.

当  $\bar{\tau}$  再增大到 10, 体相逐渐转变为弹性性质. 根 II 根组别发生转换, 实部趋于毛细波频率  $\sqrt{\bar{\sigma}} = 1$ , 虚部随  $\bar{\tau}$  降低, 耗散减小, 振荡更接近理想毛细波<sup>[34]</sup>, 且峰形变尖、幅值变大. 根 IV 实部和虚部随  $\bar{\tau}$  增大而增大, 对  $\bar{\tau}$  变化敏感, 表明根 IV 主要受体相弹性影响, 但因能量局限于体相, 在功率谱中贡献极小.

为了进一步了解界面与体相不同弛豫时间的作用, 固定  $\bar{\tau} = \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} = 1$ , 并改变界面无量纲弛豫

时间  $\bar{\tau}_s$ , 以研究界面黏弹性在波动模式和功率谱中的作用. 当  $\bar{\tau}_s < 0.1$  时, 体系处于界面快速松弛、体相具有有限黏弹记忆的状态. 求解色散方程可得到两组复根, 分别记为根 IV 和根 VI, 对应振荡模式; 还可得到 3 个纯虚根, 分别为根 I、根 II 和根 III, 对应耗散型的过阻尼模式.

由图 2(b) 可知, 根 IV 的实部与虚部均小于 1, 对应低频、弱阻尼振荡模式, 而根 VI 的实部与虚部较大, 对应高频、强耗散振荡模式. 由图 4(a) 可知, 两根在频域响应中表现出较大差异. 在该参数下, 界面模量在较短时间尺度内作用较小, 功率谱主峰由根 IV 主导, 对应毛细波模式, 而根 VI 则在高频侧形成负肩峰.

在含有吸附层的界面上, 热涨落所激发的表面波不再是简单的单一模式振荡, Earnshaw 等<sup>[19]</sup> 指出, 毛细波与表面膨胀模式会发生强烈耦合. 本文引入 Maxwell 形式的复模量的虚部正是反映了能量耗散和应力应变之间的相位滞后, 体现为系统固有的相位差. 通过部分分式展开法将系统的响应函数分解为一系列对应色散方程根的分式之和, 而其

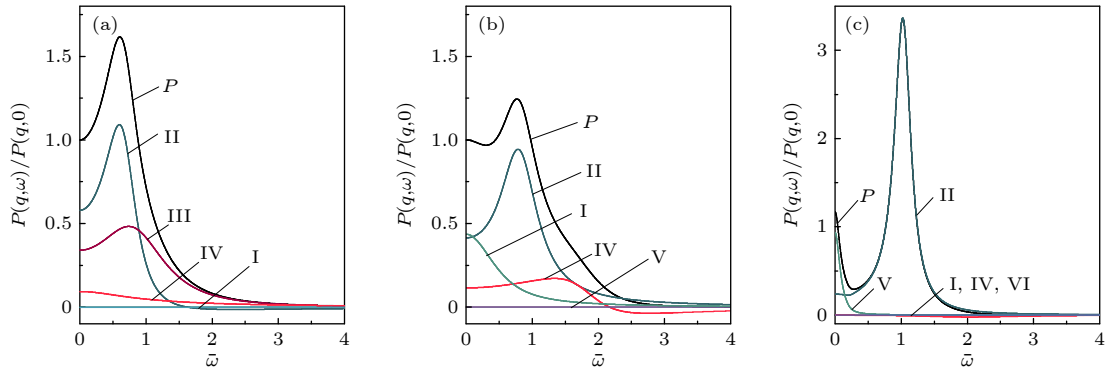


图 3  $\bar{\tau}_s = \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} = 1$  时, 不同  $\bar{\tau}$  时功率谱及其分解 (a)  $\bar{\tau} = 0.1$ ; (b)  $\bar{\tau} = 1$ ; (c)  $\bar{\tau} = 10$

Fig. 3. Power spectra and their decompositions for  $\bar{\tau}_s = \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} = 1$  at different values of  $\bar{\tau}$ : (a)  $\bar{\tau} = 0.1$ ; (b)  $\bar{\tau} = 1$ ; (c)  $\bar{\tau} = 10$ .

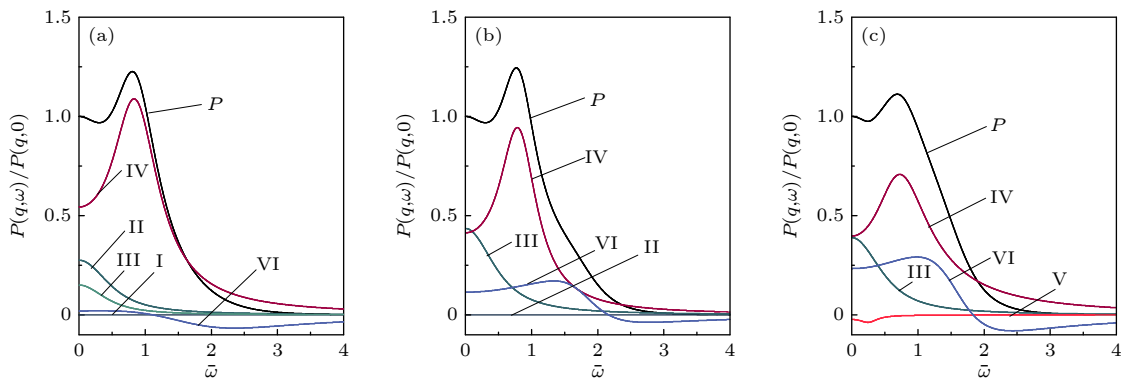


图 4  $\bar{\tau} = \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} = 1$  时, 不同  $\bar{\tau}_s$  时功率谱及其分解 (a)  $\bar{\tau}_s = 0.1$ ; (b)  $\bar{\tau}_s = 1$ ; (c)  $\bar{\tau}_s = 10$

Fig. 4. Power spectra and their decompositions for  $\bar{\tau} = \bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} = 1$  at different values of  $\bar{\tau}_s$ : (a)  $\bar{\tau}_s = 0.1$ ; (b)  $\bar{\tau}_s = 1$ ; (c)  $\bar{\tau}_s = 10$ .

中每个分式的系数即为留数. 在黏弹性强耦合区域, 模式间的相位差在数学上表现为相消作用, 这也是模式间相互作用的体现. 为了重构复杂的响应函数, 部分留数的实部必须是负值, 其一般性分析可见复分析教材<sup>[37]</sup>. 负的留数实部, 正是导致功率谱分解中出现负肩峰, 即振幅系数为负的结果, 而非物理上光强为负. 因此, 负肩峰代表系统中存在一个与正模式反相耦合的、被抑制的模式, 这样的负峰结构在 Ohmasa 等<sup>[22,38]</sup>的研究中也可观察到.

随着  $\bar{\tau}_s$  的增大至 1 和 10, 根 IV 频率略有下降且峰宽变窄; 根 VI 的频率上升但阻尼减小, 高频肩峰更加明显. 而总功率谱谱峰略微降低且峰宽变窄, 说明体系进入部分松弛状态. 另外随着  $\bar{\tau}_s$  增大, 原本对应快根与慢根的两个纯虚根形成复共轭根 V. 表明体系由过阻尼响应转变为振荡响应, 界面恢复力开始占据主导作用, 且  $\bar{\tau}_s > 2$  后, 根 V 的实部趋近于曲线  $1/\sqrt{2\bar{\tau}_s}$ . 因此, 该模式在物理上可认为为界面弹性波<sup>[26]</sup>. 然而该根在图 4(c) 功率谱中表现为负峰, 表明弹性回复与界面形变之间的反相相互作用. 此时, 总谱峰值降低且显著展宽, 表明在界面弹性弛豫变慢时, 体系出现强耦合与模式展宽现象, 毛细波振荡受到显著抑制.

综上所述, 体相弛豫时间  $\bar{\tau}$  表征体相黏弹性的记忆效应, 控制流体内部从黏性响应到弹性响应的过渡.  $\bar{\tau}$  较小时体系表现为黏性主导, 增大时体相弹性则增强, 但表面波仍以毛细波为主导. 界面弛豫时间  $\bar{\tau}_s$  则决定界面模量的频率依赖性, 描述界面从可松弛到冻结的演化. 随  $\bar{\tau}_s$  增大, 界面弹性增强, 弹性波模式逐渐出现并在一定范围内与毛细波耦合形成双峰结构.

### 3.2 界面恢复力的影响

前文对弛豫时间的分析显示了体系的动力学行为从由黏性主导到弹性主导的转变. 体相与界面各自的弛豫时间决定了不同频率下对扰动的响应方式. 然而, 即使在相同的弛豫结构下, 体系的整体特征仍然受到恢复力的影响, 此时, 恢复力主要来源于  $\bar{\sigma}$  与  $\bar{\varepsilon}$ . 因此, 下文将分别讨论  $\bar{\sigma}$  与  $\bar{\varepsilon}$  的变化对色散方程根轨迹以及功率谱结构的影响, 分析它们对不同模式的控制作用.

当表面张力较小即  $\bar{\sigma} < 0.1$  时, 解色散方程能够得到两组复根 III 和 IV, 然而由图 5(a) 可知两根此时对  $\bar{\sigma}$  并不敏感, 而只有纯虚根 I 会发生明显变化, 这是由于此时体系处于强黏性主导状态, 能量快速耗散, 使得图 6(a) 中的功率谱表现为过阻尼模式. 随着  $\bar{\sigma}$  增大, 界面恢复力增强, 使得体系振荡频率升高、阻尼减小, 谱形由宽缓向尖锐过渡, 标志着黏性主导向张力主导的转变. 在  $\bar{\sigma} = 1$  附近, 根 III 对  $\bar{\sigma}$  变化敏感, 实部增大, 对应毛细波模式; 而根 IV 的变化较小, 其功率谱在主峰右侧形成轻微肩峰, 此时体系已进入具有明显波动特征的振荡区. 此过程体现了表面张力增强使得体系从黏性过阻尼模式向振荡模式的过渡. 随着  $\bar{\sigma}$  再增大, 色散方程中表面张力的作用增大, 其中根 IV 的实部呈  $\sqrt{\bar{\sigma}}$  趋势增长而虚部总体趋于下降, 表明此时根 IV 对应毛细波模式, 而在图 6(c) 中可以观察到根 IV 移向更高频, 并且因相对较小的阻尼而在功率谱中成为主峰; 根 III 不随  $\bar{\sigma}$  变化, 且具有相对较大阻尼和较小振荡频率, 因此在功率谱中仅表现为主峰左侧的弱突起.

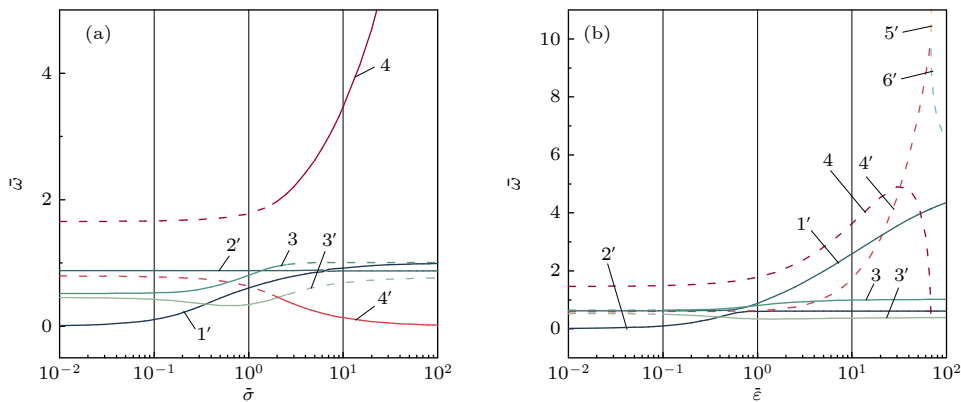


图 5 根轨迹变化图 (a)  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_s = \bar{\varepsilon} = 1$  时, 色散方程的解与  $\bar{\sigma}$  的关系; (b)  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_s = \bar{\sigma} = 1$  时, 色散方程的解与  $\bar{\varepsilon}$  的关系  
 Fig. 5. Complex-plane trajectories of the roots of the dispersion equation: (a) Variation with  $\bar{\sigma}$  at  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_s = \bar{\varepsilon} = 1$ ; (b) variation with  $\bar{\varepsilon}$  at  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_s = \bar{\sigma} = 1$ .

与此同时,当表面模量较小时 ( $\bar{\varepsilon} = 0.1$ ),由图 5(b)可知,体系中主要存在两对复根分别记为根 III 与根 IV,和两对纯虚根分别记为根 I 与根 II.其中根 III 的实部与虚部均较小且变化平缓,表现为低频振荡模式;根 IV 的实部较大、虚部较大,对应较高频率阻尼较强的振荡模式.因此当  $\bar{\varepsilon} = 0.1$  时,体系的功率谱几乎完全由表面张力决定,表面膨胀模量的影响只在谱中以右侧肩峰形式出现,表明界面仅提供微弱的附加弹性,而整体波动依旧为毛细波主导.

当表面模量增大至  $\bar{\varepsilon} = 1$ ,界面具有一定弹性恢复能力.根 III 实部随模量逐渐增大,而虚部减小,此时根 III 对应的振荡模式已接近典型的毛细波模式,即实部趋近  $\sqrt{\bar{\sigma}} = 1$ ;根 IV 开始对  $\bar{\varepsilon}$  敏感.由图 7(b)可知,根 III 对应功率谱出现明显的峰结构,中心频率提高、峰宽减小.而根 IV 在高频侧表现为轻微的肩峰,这是因为虽模量提高,但同时也增大耗散,使弹性传播模式被阻尼,从而在功率谱上表现并不突出.

当表面模量增大至  $\bar{\varepsilon} = 10$ ,此时色散方程的根 IV 虽然对  $\bar{\varepsilon}$  的变化非常敏感,但并未在图 7(c)中表现出明显的振荡特征.其原因在于,复表面膨胀模量的虚部在  $r < 1$  时,随  $\bar{\varepsilon}$  增大迅速增大,使得界面耗散增强,从而使得根 IV 表现为过阻尼模式.而根 III 对应的毛细波模式虽弱但阻尼较小,所以仍由毛细波模式主导.该情况表明,在体系采用 Maxwell 表面膨胀模量模型时,随表面黏弹性的增强,界面体系会更接近固体状态,界面扰动难以形成振荡模式,表现为强耗散的过阻尼响应,这一趋势符合界面黏弹体系的一般动力学特征<sup>[39]</sup>.

因此,界面振荡的频率与强度主要由  $\bar{\sigma}$  和  $\bar{\varepsilon}$  共同决定. $\bar{\sigma}$  决定了界面对扰动的稳定性并决定了毛细波频率的上限;而  $\bar{\varepsilon}$  则反映了界面的弹性表现.两者相互作用与影响决定了界面振荡的主导频率区间及功率谱峰的结构.因此,在弛豫时间固定的前提下,通过改变  $\bar{\sigma}$  或  $\bar{\varepsilon}$ ,能够改变体系中恢复力与阻尼的比值,从而改变根的分布,进而影响功率谱特征.

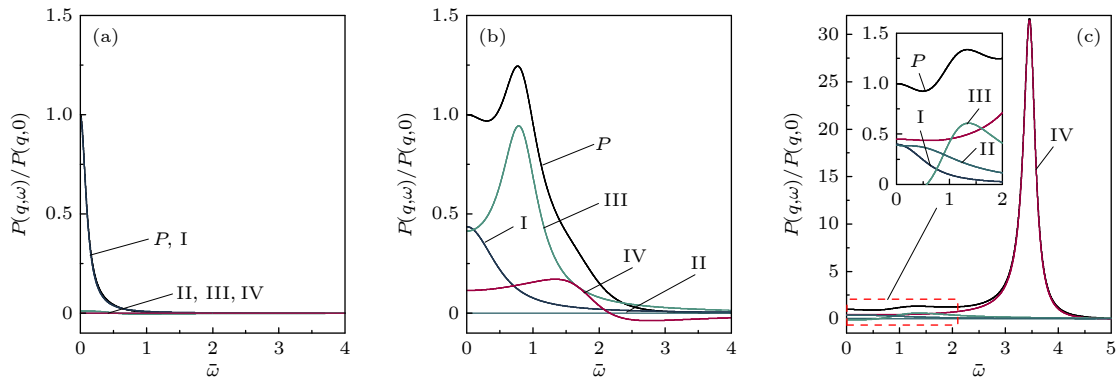


图 6  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_s = \bar{\varepsilon} = 1$  时,不同  $\bar{\sigma}$  时功率谱及其分解 (a)  $\bar{\sigma} = 0.1$ ; (b)  $\bar{\sigma} = 1$ ; (c)  $\bar{\sigma} = 10$

Fig. 6. Power spectra and their decompositions for  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_s = \bar{\varepsilon} = 1$  at different values of  $\bar{\sigma}$ : (a)  $\bar{\sigma} = 0.1$ ; (b)  $\bar{\sigma} = 1$ ; (c)  $\bar{\sigma} = 10$ .

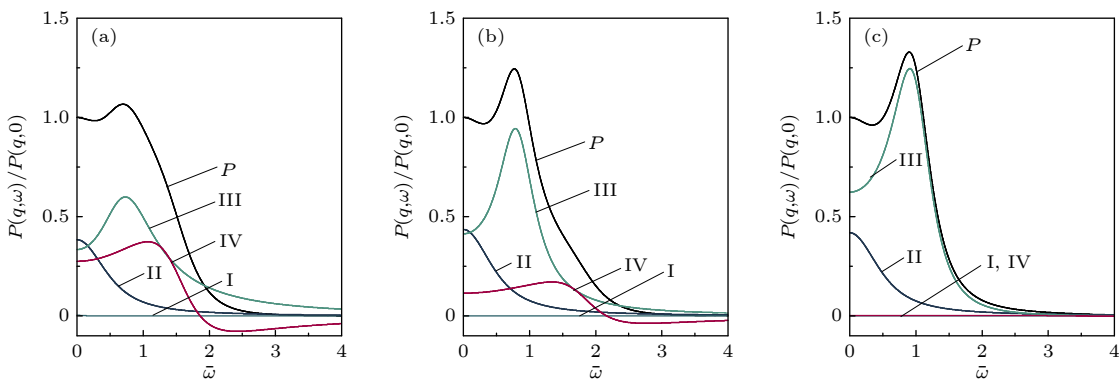


图 7  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_s = \bar{\sigma} = 1$  时,不同  $\bar{\varepsilon}$  时功率谱及其分解 (a)  $\bar{\varepsilon} = 0.1$ ; (b)  $\bar{\varepsilon} = 1$ ; (c)  $\bar{\varepsilon} = 10$

Fig. 7. Power spectra and their decompositions for  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_s = \bar{\sigma} = 1$  at different values of  $\bar{\varepsilon}$ : (a)  $\bar{\varepsilon} = 0.1$ ; (b)  $\bar{\varepsilon} = 1$ ; (c)  $\bar{\varepsilon} = 10$ .

### 3.3 复杂流体的情况

单一体相与界面 Maxwell 模型因其形式简洁、参数易于确定,在初步描述黏弹性体系的动力学行为时具有较好的效果<sup>[22]</sup>.然而,实际体系的应力响应往往较为复杂,由界面膜中吸附解吸、链段重排等多个独立过程共同决定,不论是体相或是界面,单一松弛时间模型难以描述更加复杂的体系,描述实验观测到的黏弹谱特征<sup>[26,27,30]</sup>.

因此,为描述在不同时间尺度下的多重松弛特性,可将本文采用的单一体相与界面 Maxwell 模型扩展为广义 Maxwell 形式,即具有多个弛豫时间.前期工作中已成功利用多弛豫时间 Maxwell 模型描述体相黏弹性的影响,其理论结果能更好描述复杂体系体相的黏弹性表现,为进一步扩展模型至多弛豫时间 Maxwell 模型提供了理论基础<sup>[28]</sup>.然而,引入多弛豫时间模型将显著增加色散方程的阶数,使根的数量和模式结构大幅复杂化,从而不利于识别体相与界面黏弹性之间的主导耦合机制.

因此,本文在分析黏弹性耦合的基本物理图像时,仍以单一 Maxwell 模型作为最小理论单元,以突出体相与界面之间的竞争关系;在此基础上,该框架可自然扩展至多弛豫时间模型,用于描述具有宽谱松弛特性的复杂流体体系.

## 4 结 论

本文基于体相与界面均具有 Maxwell 型黏弹性响应的模型,系统分析了体相与界面弛豫时间( $\bar{\tau}$ ,  $\bar{\tau}_s$ ),表面张力( $\bar{\sigma}$ )及表面膨胀模量( $\bar{\varepsilon}$ )对体系的影响. $\bar{\tau}$ 与 $\bar{\tau}_s$ 共同控制体系的时间记忆特征, $\bar{\sigma}$ 与 $\bar{\varepsilon}$ 则决定界面波动的恢复力强度.四者的相互作用决定了体系在不同振荡模式之间过渡.合适的参数组合下,功率谱可呈现清晰双峰结构,对应实验中常见的毛细-弹性混合波动.主要结论如下:

1) 体相弛豫时间 $\bar{\tau}$ 控制体相由黏性向弹性转变, $\bar{\tau}$ 增大使体系储能增强,毛细波模式成为主导.

2) 界面弛豫时间 $\bar{\tau}_s$ 控制界面由流动到冻结的过程, $\bar{\tau}_s$ 增大增强界面弹性并产生弹性波模式,对毛细波模式有抑制作用.

3) 表面张力 $\bar{\sigma}$ 控制界面的恢复力, $\bar{\sigma}$ 增大使毛细波频率按 $\sqrt{\bar{\sigma}}$ 上升并占据主要地位,对体系的作用明显突出.

4) 表面膨胀模量 $\bar{\varepsilon}$ 表现界面对面积扰动的黏弹响应, $\bar{\varepsilon}$ 增大提供恢复力,使谱峰增强,但 $\bar{\varepsilon}$ 提高界面恢复力的同时也增大耗散, $\bar{\varepsilon}$ 过大反而会会引起界面的耗散现象.

## 参考文献

- [1] Fuller G G, Vermant J 2012 *Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng.* **3** 519
- [2] Banerjee S, Bhattacharya S 2012 *Crit. Rev. Food Sci. Nutr.* **52** 334
- [3] Hua Y Q, Jin R G 2019 *Polymer Physics* (Beijing: Chemical Industry Press) p198 (in Chinese) [华幼卿, 金日光 2019 高分子物理 (北京: 化学工业出版社) 第 198 页]
- [4] Langevin D 2000 *Adv. Colloid Interface Sci.* **88** 209
- [5] Lucassen J, Van Den Tempel M 1972 *Chem. Eng. Sci.* **27** 1283
- [6] Lucassen-Reynders E H 1993 *Food Struct.* **12** 1
- [7] Koelsch P, Motschmann H 2005 *Langmuir* **21** 6265
- [8] Ravera F, Loglio G, Kovalchuk V I 2010 *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.* **15** 217
- [9] Maldonado-Valderrama J, Patino J M R 2010 *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.* **15** 271
- [10] Yang Z Y, Barbhai S, Ji B Q, Jie F 2024 *Soft Matter* **20** 4868
- [11] Krainer S, Smit C, Hirn U 2019 *RSC Adv.* **9** 31708
- [12] Staat H J, van der Bos A, van den Berg M, Reintjes H, Wijshoff H, Versluis M, Lohse D 2017 *Exp. Fluids* **58** 2
- [13] Shao H F, Gao Y L, Ren W J, Li Y L, Liu Y J, Liu Z M 2019 *Chem. Anal. Meterage* **28** 6 (in Chinese) [邵鸿飞, 高岩立, 任万杰, 李艳玲, 刘元俊, 刘忠民 2019 化学分析计量 **28** 6]
- [14] Langevin D 1992 *Light Scattering by Liquid Surfaces and Complementary Techniques* (New York: Marcel Dekker Inc) pp iii-iv
- [15] Zhao G J, Yuan Z M, Zhang X, Yin J G, Ma S X 2021 *Int. J. Refrig.* **127** 194
- [16] Zhao G J, Bi S S, Wu J T 2015 *J. Eng. Thermophys.* **36** 36 (in Chinese) [赵贯甲, 毕胜山, 吴江涛 2015 工程热物理学报 **36** 36]
- [17] Zhao G J, Yuan Z M, Liu X N, Wang P L, Yin J G, Ma S X 2020 *J. Mol. Liq.* **317** 113980
- [18] Giraudet C, Klein T, Zhao G J, Rausch M H, Koller T M, Fröba A P 2019 *J. Phys. Chem. B* **123** 123
- [19] Earnshaw J C, McGivern R C, McLaughlin A C, Winch P J 1990 *Langmuir* **6** 649
- [20] Loglio G, Kovalchuk V I, Bykov A G, Ferrari M, Krägel J, Liggieri L, Miller R, Noskov, B A, Pandolfini P, Ravera F, Santini E 2019 *Colloids Interfaces* **3** 66
- [21] Harden J L, Pleiner H, Pincus P A 1991 *J. Chem. Phys.* **94** 5208
- [22] Ohmasa Y, Yao M 2011 *Phys. Rev. E* **83** 031605
- [23] Wang C H, Huang Q R 1997 *J. Chem. Phys.* **107** 5898
- [24] Huang Q R, Wang C H, Deng N J 1998 *J. Chem. Phys.* **108** 3827
- [25] Huang Q R, Wang C H 1998 *J. Non-Cryst. Solids* **235** 464
- [26] Cao B H, Kim M W, Cummins H Z 1995 *J. Chem. Phys.* **102** 9375
- [27] Cummins H Z, Pike E R 2013 *Photon Correlation Spectroscopy and Velocimetry* (Cham: Springer Science & Business Media) pp515, 516
- [28] Li H X, Sun H S, Zhao G J 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 174704

- (in Chinese) [李昊轩, 孙浩森, 赵贯甲 2025 物理学报 **74** 174704]
- [29] Zang D Y, Zhang Y J 2011 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **54** 1587
- [30] Miller R, Liggieri L 2009 *Interfacial Rheology* (Vol. 1) (Boca Raton, FL: CRC Press) pp220–222
- [31] Levich V G, Spalding D B 1962 *Physicochemical Hydrodynamics* (New Jersey: Prentice-Hall) pp591–599
- [32] Zhao G J 2013 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University) (in Chinese) [赵贯甲 2013 博士学位论文 (西安: 西安交通大学)]
- [33] Kadanoff L P, Martin P C 1963 *Ann. Phys.* **24** 419
- [34] Langevin D 1992 *Light Scattering by Liquid Surfaces and Complementary Techniques* (New York: Marcel Dekker) pp35–59
- [35] Li H, Cui C, Cao X 2023 *Molecules* **28** 5436
- [36] Guzmán E, Maestro A, Carbone C, Ortega F, Rubio R G 2022 *Fluids* **7** 335
- [37] Ablowitz M J, Fokas A S 2003 *Complex Variables: Introduction and Applications* (Cambridge: Cambridge University Press) pp206–245
- [38] Ohmura Y, Hoshino T, Osada R, Yao M 2009 *Phys. Rev. E* **79** 061601
- [39] Cicuta P, Hopkinson I 2004 *Colloids Surf. A* **233** 97

# Surface-wave dispersion equation and power spectrum of viscoelastic fluids with interfacial membrane<sup>\*</sup>

LI Haoxuan    SUN Haosen    ZHAO Guanjin<sup>†</sup>

(College of Electrical and Power Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

(Received 12 November 2025; revised manuscript received 23 December 2025)

## Abstract

This study aims to address the key challenge of simultaneously and accurately characterizing the bulk and interfacial rheological properties of complex fluids that possess both bulk and interfacial viscoelasticity. Considering that the non-contact surface light scattering (SLS) technique enables the broadband characterization of interfacial dynamics, this study focuses on constructing and analyzing the dispersion behaviors of surface waves in such viscoelastic systems. Specifically, the bulk complex viscosity and the interfacial complex dilational modulus are respectively described by Maxwell models, leading to a dispersion equation that combines both bulk and interfacial relaxation times. The systematic analyses of the complex-root structure of this equation and the corresponding power spectral characteristics reveal how the coupling between bulk and interfacial relaxations induces the transformation between capillary and elastic modes and drives the evolution of spectral structures. These findings provide a theoretical foundation for accurately extracting bulk and interfacial thermophysical parameters of such systems by using the SLS method.

Viscoelastic interfacial systems generally exhibit multi-timescale stress relaxation. Although multi-mode models can provide a more complete physical description, they often result in mathematically cumbersome dispersion relations that hinder analytical interpretation. Therefore, in this study, a single-mode Maxwell model is employed to characterize both the bulk complex viscosity and the interfacial complex dilational modulus. This simplified physically consistent framework enables the analytical derivation of the surface wave dispersion relation and facilitates a clear examination of the influences of four key dimensionless parameters, that is, the bulk and interfacial relaxation times ( $\bar{\tau}$ ,  $\bar{\tau}_s$ ), surface tension ( $\bar{\sigma}$ ), and surface dilational modulus ( $\bar{\varepsilon}$ ), on the modal distribution and power spectrum characteristics of surface waves.

The results show that  $\bar{\tau}$  governs the transition between viscous-dominated and elastic-dominated regimes, and the increase of can lead to mode bifurcation and damping reduction. The interfacial relaxation time  $\bar{\tau}_s$  controls the appearance and evolution of elastic wave branches, the increase of can enhance the interfacial contribution and promote double peak spectra. The surface tension  $\bar{\sigma}$  determines the characteristic frequency scale of capillary modes, while the surface dilatational modulus  $\bar{\varepsilon}$  adjusts the relative strength and width of spectral peak, reflecting interfacial elasticity and energy dissipation. Parameter variations can induce transitions between overdamped, capillary, and elastic modes.

By combining bulk and interfacial Maxwell models, this study establishes a self-consistent framework that links rheological relaxation parameters to measurable surface-wave spectra. The analysis clarifies the physical roles of  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{\tau}_s$ ,  $\bar{\sigma}$  and  $\bar{\varepsilon}$  in governing mode structure and spectral evolution, thereby providing theoretical guidance for explaining SLS data and extracting viscoelastic properties of complex interfacial systems over a wide frequency range.

**Keywords:** complex fluid, complex viscosity, complex surface dilational modulus, surface light scattering, dispersion equation

DOI: [10.7498/aps.75.20251548](https://doi.org/10.7498/aps.75.20251548)

CSTR: [32037.14.aps.75.20251548](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20251548)

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51976132).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [zhaoguanjin@tyut.edu.cn](mailto:zhaoguanjin@tyut.edu.cn)



含界面膜黏弹性流体的表面波色散方程和功率谱

李昊轩 孙浩森 赵贯甲

Surface-wave dispersion equation and power spectrum of viscoelastic fluids with interfacial membrane

LI Haoxuan SUN Haosen ZHAO Guanjia

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 061001 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20251548

CSTR: 32037.14.aps.75.20251548

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251548>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

黏弹性非牛顿流体的表面波色散方程

Surface wave dispersion equations for viscoelastic non-Newtonian fluids

物理学报. 2025, 74(17): 174704 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250675>

eXtended Pom-Pom黏弹性流体的改进光滑粒子动力学模拟

Improved smoothed particle dynamics simulation of eXtended Pom-Pom viscoelastic fluid

物理学报. 2023, 72(3): 034701 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221922>

非均匀流体的体积黏度: Maxwell弛豫模型

Volume viscosity of inhomogeneous fluids: a Maxwell relaxation model

物理学报. 2024, 73(6): 066601 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231459>

基于双面声学超表面的伪表面波隐身装置设计

Design of acoustic cloaking for spoof surface waves based on double-sided acoustic metasurface

物理学报. 2025, 74(15): 154301 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250379>

磁流体管内“泡对”在磁声复合场中的振荡行为

Oscillation behavior of bubble pair in magnetic fluid tube under magneto-acoustic complex field

物理学报. 2022, 71(8): 084302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212150>

耦合界面张力的三维流体界面不稳定性的格子Boltzmann模拟

Lattice Boltzmann simulation of three-dimensional fluid interfacial instability coupled with surface tension

物理学报. 2022, 71(4): 044701 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212061>