

基无关的物理源量子相干性及复数系统见证*

王玉坤^{1)2)†} 韩文敏¹⁾ 邢锦程¹⁾

1) (中国石油大学(北京)人工智能学院, 北京 102249)

2) (中国科学院计算技术研究所, 处理器芯片全国重点实验室, 北京 100190)

(2025年12月3日收到; 2025年12月25日收到修改稿)

量子相干性是量子理论的核心特征, 与量子纠缠、量子复数系统及量子随机性理论紧密相关, 具有重要应用价值. 近年来, 量子相干性被视作一种量子资源, 并建立了系统的相干性度量框架, 涌现出多种度量方法. 这些相干性度量方法都依赖于量子态的精确表征和预先选定的参考基. 本文指出, 量子相干性可以在半设备无关场景下被观测到, 这意味着除了二维量子系统外, 无需再信任相关设备及预先选择参考基. 首先, 建立了非相干源的严格数学定义, 进而利用 Gram 矩阵的秩分析理论, 构建了线性和非线性两类相干性见证方案. 理论证明显示, 该方法不仅能有效区分相干源与非相干源, 还能进一步鉴别系统的底层结构特性, 即判定系统属于经典系统、实数量子系统还是复数量子系统. 特别地, 证明了在最小测量资源下线性见证的可行性, 并通过行列式见证提供了更完备的检测手段. 本研究为量子相干性资源验证提供了新的理论工具, 对量子设备认证和量子基础研究具有重要意义.

关键词: 量子相干, 设备无关, 相干见证, 复量子系统**DOI:** 10.7498/aps.75.20251659**CSTR:** 32037.14.aps.75.20251659

1 引言

量子系统具有波粒二象性, 能够同时处于两个或多个不同的状态, 这种奇特的性质被称为量子相干性 (quantum coherence). 量子相干性是量子理论区别于经典理论的关键特征之一^[1-3]. 传统意义上, 相干性通常与物质波干涉现象密切相关, 被视为量子理论的基础组成部分. 然而, 伴随着量子信息科学的发展, 相干性不再仅仅是一种理论现象, 而逐渐成为可分析、可操控的量子资源. 在量子光学实验中, 已能主动操控单光子源的空间相干性^[4], 甚至利用纠缠光子对更高阶的量子相干空间结构进行精密操控^[5], 并观测其在非经典态 (如双模压缩态) 中的动力学行为^[6]. 这些对相干性从理论分析到实验操控能力的提升, 使其在量子计算与量子通信中发挥了关键作用^[7-10].

为了系统刻画量子相干这一资源, 研究者提出基于资源理论的分析框架^[11,12]. 现代量子资源理论表明, 相干性与一系列重要量子资源存在深刻关联, 例如量子纠缠^[13,14]、内禀随机性^[15-17]以及量子计算复杂度^[18]. 研究指出, 任意形式的相干都可以通过非相干操作转换为纠缠^[11], 测量所产生的不可预测性本质上源自量子相干的破坏^[15,17], 而量子计算中指数级态叠加所体现的相干增长能够显著降低计算时间复杂度^[18]. 这一框架甚至能够应用于粒子物理等基础领域, 用于定量分析中微子振荡等现象中的量子资源特性^[19].

在资源理论框架中, 相干性的定义依赖于: 1) 非相干态集合, 以及 2) 非相干操作的集合, 该类操作将非相干态集合映射到自身. 基于这一框架, 如果一个物理系统无法与非相干态集合兼容, 我们就称该系统具有相干性. 通常, 一个维度为 d 的量子系统会指定一个参考基 $R = |i\rangle_{i=1}^d$, 并基

* 国家自然科学基金 (批准号: 62101600) 和处理器芯片全国重点实验室开放课题 (批准号: CLQ202404) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wykun06@gmail.com

于该基定义非相干态集合:

$$\mathcal{I}_R = \left\{ \rho \in \mathcal{H}_d \mid \rho = \sum_{i=1}^d \lambda_i |i\rangle\langle i| \right\}, \quad (1)$$

其中 $\sum_i \lambda_i = 1$. 也就是说, \mathcal{I}_R 是在 R 中对角化的密度算符的集合. 基于这种依赖于基的非相干态定义, 存在多种自然的相干性度量. 例如, 较为经典的相对熵相干度量, $\mathbb{C}_{\text{rel}}(\rho) = S(\Delta_R(\rho)) - S(\rho)$, 其中 $\Delta_R(\cdot)$ 是完全退相干映射 $\Delta_R(\rho) = \sum_i |i\rangle\langle i|\rho|i\rangle\langle i|$, $S(\cdot)$ 是冯·诺依曼熵. 除此之外, 研究者也定义了 l_1 -范数^[20]、干涉条纹^[21]、相对熵^[22] 和偏斜信息^[23] 等相干性度量. 此外, 相干性也被推广到了子空间框架下, 即基于投影测量的块相干性 (block coherence)^[24]. 然而, 所有提到的相干性度量都依赖于对量子态与测量操作的精确信息, 并显式依赖参考基. 特别地, 如果观测者与预定义的基矢不一致, 相干性可能会消失. 例如, 量子比特状态 $\rho = |+\rangle\langle +|$ 在计算基矢 $Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ 下被认为是相干的, 但在对角基矢 $X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ 下则不是. 因此, 研究如何在没有预定义基矢的情况下检测一般系统中的相干性具有根本意义.

本文借助随机源 (random sources) 给出肯定答案. 考虑以下问题: 给定一个具有固定希尔伯特空间维度 d 和 n 个经典输入的未知物理源, 如图 1 所示, 该源是否为非相干源? 为解决此问题, 我们首先引入非相干源概念:

定义 1 (非相干源). 假设一个物理源接受经典输入 $x \in \{1, 2, \dots, n\}$, 并输出一个具有固定希尔伯特空间维度 d 的 (不一定已知的) 物理系统集合 $\{\rho_x\}_x$. 那么, 如果存在一个基, 使得所有输出系统在该基下都是联合对角的, 则称该源是非相干的.

重要的是, 我们并不要求预先定义一个参考基. 一个源是非相干的唯一条件是, 在某个基下所

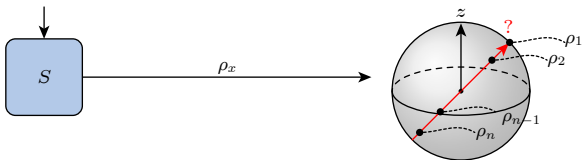


图 1 黑箱系统 S 输出 n 个未知态, 唯一已知信息是它们的维度

Fig. 1. Black box S produces n unknown states, with the only knowledge of states being their dimension.

有输出系统都是联合可对角化的. 实际上, 如果找到了这样一个基 R' , 那么定义 1 关于一个随机源量子系统的量子相干性就简化为 (1) 式, 即 $\rho_x \in \mathcal{I}_{R'}$ 用于 $x = 1, 2, \dots, n$. 我们进一步观察到, 非相干源是一个经典源.

本文在仅假设系统维度已知的半设备无关 (semi-device-independent) 框架下, 围绕随机源量子系统的量子相干性检测进行研究, 提出一种无需预设参考基和量子层析, 仅依赖观测统计的相干性度量方法. 与传统方法不同, 本文关注的是一个量子态集合所呈现的整体量子性, 而非单个量子态在给定参考基下的相干性. 基于 Gram 矩阵的秩分析理论, 我们构造了线性和非线性两类相干性见证方案, 并在理论上证明了其有效性. 进一步地, 我们指出该框架不仅可用于验证系统是否存在量子相干性, 还可用于区分量子输出源的类型, 即判断其来源于经典系统、实量子系统还是复量子系统.

2 背景介绍

2.1 半设备无关场景

本研究将讨论限制在二维系统, 即 $d = 2$ 的量子源设置. 为了检测来自源 S 的量子态是否具有相干性, 引入一个额外的测量装置 M (测量过程不需要已知其内部结构), 构建如图 2 所示的制备-测量框架. 测量盒 M 接收经典输入 $y \in \{1, 2, \dots, m\}$ 并输出二元测量结果 $b \in \{0, 1\}$. 假设测量装置 M 与制备源 S 相互独立, 这种假设在设备独立分析及量子随机性认证中被广泛采用^[25,26]. 源 S 与测量盒 M 共同构成了一个维度受限但设备行为未知的框架, 即所谓半设备无关 (semi-device-independent, SDI) 模型^[25,27-29]. 在该框架下, 无需假设测量过程或制备态的具体形式, 而仅依赖于可观测的实验统计数据:

$$E_{xy} = \sum_b (-1)^b p(b|x, y), \quad (2)$$

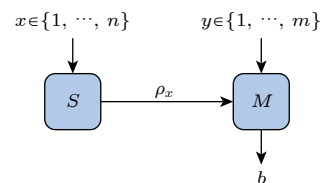


图 2 半设备无关量子态的制备和测量场景

Fig. 2. General prepare-and-measure scenario.

其中 $p(b|x, y)$ 表示当制备装置向测量盒发送态 ρ_x 并选择测量输入 y 时, 输出测量结果 b 的条件概率. 该概率分布可由量子测量形式化为

$$p(b|x, y) = \text{tr}(\rho_x \mathbf{M}_y^{(b)}), \quad (3)$$

其中 $\mathbf{M}_y^{(0)}, \mathbf{M}_y^{(1)}$ 表示对应输入 y 的二元 POVM 量子测量, 并满足 $\mathbf{M}_y^{(0)} + \mathbf{M}_y^{(1)} = \mathbf{I}$.

需要注意的是, 在二维量子系统与二元测量设置下, 所有 POVM 均可等价转换为投影测量的凸组合^[30,31]. 在这种极值分解下, 投影测量充当了探测量子相干性的最灵敏探针, 其对应相干性见证在理论上达到极大值; 而非投影 POVM 则可视为了引入了经典不确定性的退化测量. 由于非投影测量的探测能力被投影测量的凸包 (Convex Hull) 所覆盖, 在 SDI 框架下排除非投影 POVM 的讨论, 不仅没有丢失物理完备性, 反而通过剔除经典不确定性的混合, 使得相干性见证的判定边界更加紧凑和严谨. 因此无需讨论更一般的 POVM 情况, 而只考虑投影算符测量即可.

2.2 布洛赫球中的量子比特

在我们的假设中, 制备装置与测量装置所对应的希尔伯特空间维度均为 2. 因此, 从源 S 发射的任意量子态均可写为布洛赫表示形式:

$$\rho_x = (\mathbf{I} + \mathbf{r}_x \cdot \boldsymbol{\sigma})/2, \quad (4)$$

其中 \mathbf{r}_x 是布洛赫球中的 Bloch 向量, 满足 $|\mathbf{r}_x| \leq 1$; $\boldsymbol{\sigma}$ 表示 Pauli 自旋矩阵向量^[32]. 相应地, 测量盒 M 中的投影测量可写为

$$\mathbf{M}_y = \mathbf{q}_y \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (5)$$

其中 \mathbf{q}_y 是单位 Bloch 向量, 满足 $|\mathbf{q}_y| = 1$. 通过上述形式, 可将实验可观测的期望值写为

$$\begin{aligned} E_{xy} &= \text{tr}(\rho_x \mathbf{M}_y) = \text{tr}\left(\frac{\mathbf{I} + \mathbf{r}_x \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} (\mathbf{q}_y \cdot \boldsymbol{\sigma})\right) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{I} (\mathbf{q}_y \cdot \boldsymbol{\sigma})) + \frac{1}{2} \text{tr}((\mathbf{r}_x \cdot \boldsymbol{\sigma}) (\mathbf{q}_y \cdot \boldsymbol{\sigma})) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_x)_i (\mathbf{q}_y)_j \text{tr}(\sigma_i \sigma_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_x)_i (\mathbf{q}_y)_j \cdot 2\delta_{ij} = \mathbf{r}_x \cdot \mathbf{q}_y, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $(\mathbf{r}_x)_i$ 与 $(\mathbf{q}_y)_j$ 分别表示向量 \mathbf{r}_x 与 \mathbf{q}_y 的第 i 个和第 j 个分量. 值得注意的是, 如果两个量子态 ρ_x 和 $\rho_{x'}$ 可以被联合对角化, 则它们在布洛赫球中对

应的向量位于同一方向 (记为方向 \mathbf{r}). 此时系统可由单参数 l 表征, 即

$$\mathbf{r}_x = l \cdot \mathbf{r}, \quad l \in [-1, 1], \quad (7)$$

意味着 Bloch 向量集合 \mathbf{r}_x 的维度为 1. 此时, 所有状态的 Bloch 向量都落在同一直线上, 其向量集合的维度为 1, 等价地说, 这些状态是可同时对角化的经典态, 不具备真正的量子相干性.

然而, 如果态集合中存在至少两态 ρ_x 和 $\rho_{x'}$ 不可对易 (即 $[\rho_x, \rho_{x'}] \neq 0$), 则它们不能被联合对角化, 其布洛赫向量不再共线, 而是覆盖二维甚至更高维结构. 此时, 集合 \mathbf{r}_x 的秩满足 $\text{rank}(\mathbf{r}_x) \geq 2$. 因此, 通过判断该向量集合的秩是否大于 1, 即可判断态源设备 S 中是否存在量子相干性. 这是与基矢选择无关的相干性度量. 例如, 假设源 S 输出两个量子态

$$\rho_1 = |0\rangle\langle 0|, \quad \rho_2 = |+\rangle\langle +|, \quad (8)$$

可以发现在计算基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 下, ρ_1 为对角矩阵, ρ_2 具有非零的非对角元, 此时 ρ_2 显示相干; 而在计算基 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 下, ρ_2 为对角矩阵, ρ_1 则具有非对角元, ρ_1 显示相干. 说明存在一个基使得这两个态中至少一个有相干性. 而且由于态不能同时对角化, 无论选择基矢如何都会存在态显示相干.

这一基无关相干性满足量子资源理论的三个基本要求: 自由态、自由操作和资源度量^[33]. 这里的自由态即为定义 1 所定义的非相干源, 指存在一个公共基使得集合内所有量子态均可同时对角化的态集合. 自由操作则定义为“联合可对角化保持操作”. 具体地, 一个量子操作 \mathcal{E} 是自由的, 当且仅当它对任意自由态 $\{\rho_x\}$ 进行变换后, 输出态集合 $\mathcal{E}(\rho_x)$ 仍是一个非相干源 (即仍存在某个基使其能同时对角化). 可以看到, 么正变换 (基变换) 是此类操作的一个特例. 对于资源度量, 可基于态集合的几何结构构造. 这里考虑以该集合生成的 Gram 矩阵的秩进行度量 (见第 3 节). 该矩阵的秩直接反映了态集合在布洛赫球中所张成的空间维度: 秩为 1 对应于自由态 (所有态共线, 对应于经典随机源); 秩为 2 或 3 则表明态集合张成了更高维的量子空间, 从而见证了非经典的、基无关相干性的存在.

接下来展示如何刻画能够证实源设备中存在相干性的可观测数据集合, 并构造与具体基无关量子相干性见证 (coherence witness).

3 基无关量子相干性见证 (basis-independent coherence witness)

为了在半设备无关框架中构建有效的相干性

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \dots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_n & | & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{q}_m \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_1 & \dots & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n & | & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{q}_m \\ \hline \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \dots & \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}_n & | & \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_m \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{q}_m \cdot \mathbf{r}_1 & \dots & \mathbf{q}_m \cdot \mathbf{r}_n & | & \mathbf{q}_m \cdot \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{q}_m \cdot \mathbf{q}_m \end{bmatrix}. \quad (9)$$

这样构造的核心目的在于: 利用实验可直接获取的测量统计数据, 来推断源的内在量子特性. 具体而言, 矩阵 G 具有以下性质: 其左上对角块 A 由态与态的内积 $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$ 构成, 它编码了源所制备状态之间的重叠关系, 直接反映了源的相干性问题, 如果所有态在某个基下联合对角化, 则 A 的秩会受到限制. 右上块 B (及其转置构成的左下块) 则由态与测量的内积 $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{q}_k$ 构成, 这对应于实验中可观测的期望值.

作为 Gram 矩阵, G 满足以下性质: 1) $G \geq 0$, 即 G 为半正定矩阵; 2) $\text{rank}(G) = \text{rank}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m)$; 3) 左上角子矩阵记为 A , 右上角子矩阵记为 B , 则有 $\text{rank}(A) \geq \text{rank}(B)$; 4) $\text{rank}(B^T B) = \text{rank}(B)$, 其中 $\text{rank}(\cdot)$ 表示矩阵的秩. 性质 3) 意味着, 通过估计 B 的秩即可推断 A 的秩, 从而判断制备态是否具有相干性.

为简化讨论, 在本研究中仅考虑 $m = 2$ 测量情形. 这一设定并非仅出于数学上的简洁性. 在实际实验时, 测量数量越少, 实验实现的噪声累积越低且装置校准复杂度越小, 因此 $m = 2$ 代表一种兼顾理论判定能力与实验可行性的平衡选择. 另一方面, $m = 1$ 并不足以实现相干性判别, 根本原因在于: 单一测量只能建立一个观测方向, 而 Bloch 向量的真实维度信息需要至少两个非共线测量方向才能区分经典概率分布与真正来源于量子相干的不可对易结构. 如果仅有一个测量, 则所有观测都可由一条 Bloch 球直径上的点来模拟, 即使系统本质具有相干性, 也会退化为等价的经典可模拟统计. 因此, $m = 2$ 是判别量子相干的最小必要测量数.

见证, 我们需要一种方法, 使相干性见证不依赖于对量子态和测量算符的完整描述. 为此, 将由源制备的未知状态向量 \mathbf{r} 和测量装置对应的未知向量 \mathbf{q} 共同编码为一个 Gram 矩阵:

在给出相干性见证之前, 首先分析由矩阵 B 作为元素的集合 $\mathbb{B} = \{B\}$ 的结构性质. 矩阵 B 的元素对应于观测统计量 $\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{q}_y = \text{tr}(\rho_x M_y)$. 不失一般性, 对于 $\text{rank}(B) = 2$ 的情况, 这里假设 $B_{:,3} = \lambda_1 B_{:,1} + \lambda_2 B_{:,2}$ 且 $\lambda_1, \lambda_2 \in [-1, 1]$, 代表第三列由前两列生成. 因此对给定的 (λ_1, λ_2) , 满足该线性约束的所有 B 构成一个仿射子空间, 是凸集. 而由所有秩为 2 的 B 构成的集合 $\mathbb{B} = \{B | \text{rank}(B) = 2\}$ 并不是凸集, 是若干仿射子空间 (不同 (λ_1, λ_2)) 的并集, 整体上是非凸的. 类似地, 集合 $\mathbb{B} = \{B | \text{rank}(B) = 1\}$ 也是非凸集.

这种非凸结构具有重要的物理意义, 说明任何秩为 2 的观测矩阵 B 都无法通过经典模型凸混合过程来模拟. 经典模型所能生成的数据集合本身是一个凸集, 任意两个经典可实现数据点的凸组合仍属于该集合, 因此秩为 2 的观测数据必然超出经典凸模型的描述范围. 这直接证明了观测数据必须来源于非经典的、非共线的 Bloch 几何结构, 从而确认了量子相干性的存在.

3.1 线性量子相干性见证

尽管该集合是非凸的, 但仍然可以找到以下线性不等式作为相干性见证. 以下结论基于 $m = 2$, 消耗最少的测量资源时.

定理 1 (线性相干性见证) 定义

$$W_1 = \sum_{i=1}^n (B_{i1} - (-1)^i B_{i2}). \quad (10)$$

则有如下分界:

$$W_1 \leq \begin{cases} 2\lceil n/2 \rceil & (\text{无相干性}/\text{rank}(\mathbf{B}) = 1), \\ 2\sqrt{\lceil n/2 \rceil^2 + (n - \lceil n/2 \rceil)^2} & (\text{存在相干性}/\text{rank}(\mathbf{B}) = 2), \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\lceil x \rceil$ 是上取整函数. 当实验观测满足 $W_1 > 2\lceil n/2 \rceil$ 时, 可以判定装置 S 中的量子态必然具有相干性.

证明: 对于无相干情形 ($\text{rank}(\mathbf{B}) = 1$), 矩阵列满足线性关系 $B_{i,j} = \lambda B_{i,j+1}$, 其中 $\lambda \in [-1, 1]$, $j = 0$ 或 1. 因此,

$$W_1 = \sum_i B_{i,j} (1 - (-1)^i \lambda) \leq \sum_i (1 - (-1)^i) = 2\lceil n/2 \rceil. \quad (12)$$

对于相干情形 ($\text{rank}(\mathbf{B}) = 2$) 有

$$W_1 = \sum_i \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{q}_1 - (-1)^i \mathbf{q}_2) \leq \lceil n/2 \rceil \|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\| + (n - \lceil n/2 \rceil) \|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\|. \quad (13)$$

设 θ 为测量方向向量 \mathbf{q}_1 与 \mathbf{q}_2 的夹角, 对 (13) 式右侧关于 θ 求导可得最大值:

$$W_1^{\max} = 2\sqrt{\lceil n/2 \rceil^2 + (n - \lceil n/2 \rceil)^2}. \quad (14)$$

当所有 $\mathbf{r}_i // \mathbf{q}_1 - (-1)^i \mathbf{q}_2$ 且

$$\cos \theta = \frac{\lceil n/2 \rceil^2 - (n - \lceil n/2 \rceil)^2}{\sqrt{\lceil n/2 \rceil^2 + (n - \lceil n/2 \rceil)^2}}$$

时达到上界, 从而证明成立.

图 3 所示为二维情形 ($n = 2, m = 2$) 下矩阵 \mathbf{B} 的几何结构. 为了可视化, 将四个独立的矩阵元素 $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ 通过约束条件投影到三维空间, 而 B_{22} 由量子合法性条件确定为依赖变量. 在该三维空间中, 不同的曲面代表不同物理理论可实现的集合的边界结构:

1) 非超光速曲面 (No-signaling boundary) 对应非超光速条件下允许的最大关联集合. 这里 No-signaling 条件要求测量选择不能影响另一方的边缘统计概率. 对于任意输出 a, b 和制备-测量设定 x, y , 有

$$\begin{aligned} \sum_b P(a|x, y) &= \sum_b P(a|x, y'), \\ \sum_a P(a|x, y) &= \sum_a P(a'|x', y). \end{aligned} \quad (15)$$

即

$$\begin{aligned} P_A(a|x) &= \sum_b P(a, b|x, y) = \sum_b P(a, b|x, y'), \\ P_B(b|y) &= \sum_a P(a, b|x, y) = \sum_a P(a, b|x', y). \end{aligned} \quad (16)$$

该条件确保测量选择不携带可被利用的通信信息.

2) 弯曲曲面 (quantum boundary) 表示量子理论可实现的关联结构, 对于 W_1 所取得的最大违背值.

3) 蓝色平面 ($\text{rank}(\mathbf{B}) = 1$ boundary) 对应退化情况, 其满足 $\det(\mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \text{rank}(\mathbf{B}) = 1$. 此时两个状态矢量满足 $\mathbf{r}_1 // \mathbf{r}_2$, 意味着系统无量量子相干性, 因此该曲面作为相干性见证的阈值超平面.

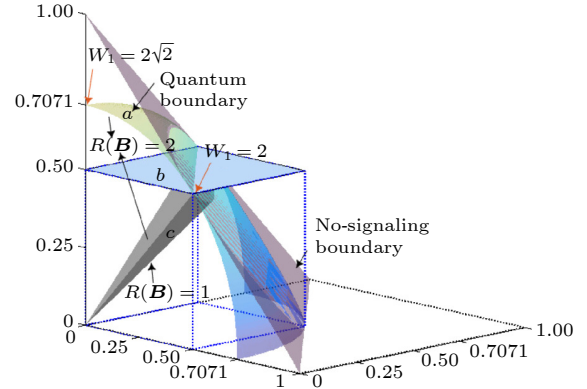


图 3 三维空间中由两个纯态 ($n = 2$) 构成的 \mathbf{B} 集合的空间结构. 图中的三个坐标轴分别对应 $x = (1 + B_{11})/2$, $y = (1 + B_{12})/2$, $z = (1 + B_{13})/2$. 其中 a 是量子集的边界 (quantum boundary), c 是 $\text{rank}(\mathbf{B}) = 1$ 对应的超平面, b 是相干性见证平面, a 与 b 平面之间均对应 $\text{rank}(\mathbf{B}) = 2$

Fig. 3. Spatial structure of the set formed by \mathbf{B} for pure states with $n = 2$ in three-dimensional space. The three coordinate axes in the figure correspond to $x = (1 + B_{11})/2$, $y = (1 + B_{12})/2$, and $z = (1 + B_{13})/2$. Here, a denotes the quantum boundary, c corresponds to the hyperplane where $\text{rank}(\mathbf{B}) = 1$, b is the coherence witness plane, and the region between planes a and b corresponds to $\text{rank}(\mathbf{B}) = 2$.

从几何上可以看到, 相干区域位于曲面 a 与 c 之间, 而不可达区域则被 No-signaling 边界所限制. 因此, 图 3 清晰展示了 $P_{\text{classical}} \subset P_{\text{coherent}} \subset P_{\text{quantum}} \subset P_{\text{no-signaling}}$ 之间的严格包含关系. 此外, 还可以看出, W_1 能够见证的相干空间位于平面 b ($W_1 = 2$) 与曲面 a ($W_1 = 2\sqrt{2}$) 之间, 而相干区域 ($\text{rank}(\mathbf{B}) = 2$) 则处于曲面 a 与 c 之间, 这表明 b 与 c 之间的相干性无法被见证.

3.2 非线性量子相干性见证

除了 3.1 节给出的线性不等式外, 进一步发现矩阵 \mathbf{B} 的行列式同样可作为有效的相干性见证. 与线性方法不同, 行列式见证直接检测矩阵秩, 因

此是一类非线性但更完备的秩证据.

定理 2 (行列式相干性见证) 对于 $n = 2$ 的情形, 实验可观测矩阵 B 可写为

$$B = \begin{bmatrix} r_1 \cdot q_1 & r_1 \cdot q_2 \\ r_2 \cdot q_1 & r_2 \cdot q_2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

若 $\det(B) \neq 0$, 则必有 $\text{rank}(B) = 2$, 从而推断 $\text{rank}(A) \geq 2$.

对于 $n \geq 2$, 构造方阵

$$C = B^T B. \quad (18)$$

若 $\det(C) \neq 0$, 则必有 $\text{rank}(B) = 2$, 从而推断 $\text{rank}(A) \geq 2$. 这意味着制备装置 S 中的两个量子态在布洛赫球中必然非共线, 即系统存在可检出的量子相干性.

由秩之间的关系很容易得到此定理. 更进一步, 由于对于任意 $l \leq n$, 可对子矩阵执行相同检测, 因此行列式见证还具有逐步筛查能力: 通过任意采样, 可以判断每 $l (l \leq n)$ 个状态是否保持相干.

4 实量子系统和复量子系统见证

复量子系统通过引入相对相位 (即模为 1 的复数) 描述态叠加, 相比实系统能更完整地刻画量子干涉现象. 量子力学的正确描述离不开复数, 主流量子算法如傅里叶变换^[2]、相位估计^[26]等均基于复数框架. 尽管高维实系统在理论上可模拟复数行为^[34], 但大量实验表明, 存在量子现象必须借助复数才能完全解释^[35-38]. 并且, 基于实数量子系统设计任务可能存在被伪造的风险^[39]. 因此, 复数在量子力学中具有不可或缺的地位, 并已逐渐被视为一种量子资源, 形成了相应的资源理论^[40]. 这种资源与量子相干性密切相关: 对于给定的参考基, 某些态的相干性必须用复数描述. 对于量子复数这种资源, 研究者提出了多种复数系统的见证方案, 如基于网络非定域性的见证^[41]、酉不变观测量 (如 Bargmann 不变量和多变量迹)^[42]等. 其中, 文献^[43]引入了一种与基无关的见证方法, 通过纯态内积定义的 Bargmann 不变量来刻画态集合的复数特性. 本文研究与文献^[43]类似, 关注一个态集合的复数性进行见证, 但本文通过可直接观测的物理量及测量数据, 而非依赖于量子态内积的 Bargmann 不变量, 来推断复数描述的必要性. 换言之, 本方法从测量结果反推复数系统的存在性, 不以内积信息为

前提.

在二维场景中, 为了实现见证复量子系统, A 的秩必须为 3. 为了实现 $\text{rank}(A) = 3$ 的观测, 至少需要三个态和三个不同测量. 在此假设 M 端有三个测量.

命题 1 (复量子系统的必要条件判据) 在二维量子系统中, 若制备态集合能够生成 Bloch 球中的三条线性无关向量, 则矩阵 A 的秩满足:

$$\text{rank}(A) = 3, \quad (19)$$

并可判定系统为复量子系统. 若 $\text{rank}(A) \leq 2$, 则系统可完全嵌入实 Hilbert 空间, 无需复相干项引入.

证明: 二维量子系统中, 任意量子态均可映射至 Bloch 球上的一个实向量. 若所有量子态处于 Bloch 球上的同一平面上, 则它们的 Bloch 表示仅占据二维子空间, 从而 $\text{rank}(A) \leq 2$, 该系统可由实振幅态集合刻画; 若存在至少三个量子态生成三维线性空间, 则 $\text{rank}(A) = 3$, 意味着 Bloch 球的相位维度被激活, 即存在复相干项, 系统无法退化为实量子系统. 因此 $\text{rank}(A) = 3$ 是复系统存在性的充分必要条件.

三态-三测量的实验方案对应可观测矩阵 B :

$$B = \begin{bmatrix} r_1 \cdot q_1 & r_1 \cdot q_2 & r_1 \cdot q_3 \\ r_2 \cdot q_1 & r_2 \cdot q_2 & r_2 \cdot q_3 \\ r_3 \cdot q_1 & r_3 \cdot q_2 & r_3 \cdot q_3 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

首先尝试利用线性不等式作为检测工具. 由 Bloch 几何约束, 构造如下量子相干性及复量子系统见证:

定理 3 (三态-三测量线性量子相干性/复量子系统见证) 定义

$$W_2 = \sum_{i,j=1}^3 B_{ij} - 2B_{2,3} - 2B_{3,2}. \quad (21)$$

则有以下上界:

$$W_2 \leq \begin{cases} 5 & (\text{无相干性}/\text{rank}(B) = 1), \\ 5 + \frac{9}{\sqrt{15}} & (\text{存在相干性}/\text{rank}(B) = 2). \end{cases} \quad (22)$$

此外, 若存在配置使得 $\det(B) \neq 0$, 则 $\text{rank}(B) = 3$, 从而 $\text{rank}(A) = 3$, 系统为复量子系统; 由于可以由 $\text{rank}(B) = 2$ 的共面量子态达到 W_2 的紧界, 故不存在线性不等式能区分 $\text{rank}(B) = 2$ 与 $\text{rank}(B) = 3$.

表达式 (22) 的推导与前文表达式 (10) 类似,

其紧界 $W_2 = 5 + \frac{9}{\sqrt{15}}$ 由 $\text{rank}(\mathbf{B}) = 2$ 的几何极值实现, 即

$$\begin{aligned} r_1 // (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3), \\ r_2 // (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3), \\ r_3 // (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3). \end{aligned}$$

进一步设 θ_1 为 \mathbf{q}_1 与 \mathbf{q}_2 夹角, θ_2 为 \mathbf{q}_3 与 $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$ 的夹角, 则边界由

$$\cos(\theta_1) = \frac{1/\sqrt{15} - 1}{2}, \quad \theta_2 = 0$$

实现. 由于该最大值仍可以由共量子面态实现 (即 $R(\mathbf{B}) = 2$ 情况仍可达到上界), 因此, 不存在线性见证能区分 $\text{rank}(\mathbf{B}) = 2$ 与 $\text{rank}(\mathbf{B}) = 3$.

然而, 利用行列式结构可得到非线性见证:

$$\det(\mathbf{B}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(\mathbf{B}) = 3. \quad (23)$$

结合 $\text{rank}(\mathbf{B}) \leq \text{rank}(\mathbf{A})$, 可推出:

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = 3 \Rightarrow \text{系统为复量子系统}. \quad (24)$$

这意味着行列式方法具有如“针式判别”般的效果: 一旦 $\det(\mathbf{B}) \neq 0$, 即可立刻确认复量子结构的存在.

最后, 为获得具有更高鲁棒性的线性复量子系统见证, 扩展至四态-三测量方案.

定理 4 (四态-三测量实/复量子系统见证)

定义

$$W_3 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 B_{ij} - 2B_{2,3} - 2B_{3,2} - 2B_{4,1}. \quad (25)$$

则该线性函数在下列三类物理模型中有严格不同的上界:

$$W_3 \leq \begin{cases} 6 & (\text{经典, classical}), \\ 2 + 2\sqrt{5} & (\text{实量子, real quantum}), \\ 4\sqrt{3} & (\text{复量子, complex quantum}). \end{cases} \quad (26)$$

因此, 当观测 W_3 落在不同区间时, 可将系统归类为经典、实量子、复量子三种情况之一.

该不等式提供了对经典系统 \rightarrow 实量子系统 \rightarrow 复量子系统的三级见证, 解决了三态-三测量场景下线性方法不能见证复量子系统的问题.

5 结 论

本文系统性地建立了基于半设备无关框架的量子相干性见证理论. 通过将物理源的输出特性与

矩阵秩分析相结合, 建立了一套完整的相干性检测方法. 首先, 提出了非相干源的严格数学定义, 突破了传统相干性度量对参考基和态层析的依赖, 为设备无关场景下的量子相干资源验证奠定了基础; 在此框架下, 系统设计了线性和非线性两类相干性见证方案, 并首次在半设备无关框架下实现了经典系统、实数量子系统和复数量子系统的三级见证, 其中 W_3 见证方案为复数量子优势的验证提供了线性方案.

本研究的理论成果在量子设备认证、量子基础问题研究及量子计算等方面具有广泛的应用前景. 具体而言, 可基于基无关相干性或量子复数系统等不依赖于特定参考系的量子资源, 设计新型量子操作与算法, 从而有效规避由参考系漂移或未知局部噪声所引起的错误. 例如, 通过非对易态集合构建的几何相位门, 实现与计算基无关的量子信息处理, 以简化纠错流程和提升逻辑门的容错能力. 在量子密码学方面, 该框架也为发展设备无关的密码协议提供了新思路, 例如可借助复数系统所支持的非局域特性, 构建更高安全性的密钥分发或随机数生成方案. 未来工作可从以下几个方向展开: 首先, 将现有框架推广至高维量子系统, 发展相应的高维相干性见证方法; 其次, 研究在噪声环境下具有鲁棒性的见证方案, 提升其实用性; 最后, 将相干性见证与其他量子资源 (如量子纠缠、量子互文性) 的检测相结合, 构建统一的量子资源验证理论框架. 相关研究将进一步推动量子技术在不可信环境下的安全应用, 为量子互联网与分布式量子计算的发展提供重要理论支撑.

参考文献

- [1] Shor P W 1999 *SIAM Rev.* **41** 303
- [2] Nielsen M A, Chuang I L 2010 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press) pp21-128
- [3] Li B M, Hu M L, Fan H 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 030304 (in Chinese) [李保民, 胡明亮, 范桁 2019 物理学报 **68** 030304]
- [4] You C L 2024 *Chin. Phys. Lett.* **41** 094201
- [5] Huang S Y, Gao J, Ren Z C, Cheng Z M, Zhu W Z, Xue S T, Lou Y C, Liu Z F, Chen C, Zhu F, Yang L P, Wang X L, Wang H T 2024 *Chin. Phys. Lett.* **41** 074205
- [6] Yu J, Zhang Y, Wu Y H, Yang W H, Yan Z H, Jia X J 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 034202 (in Chinese) [蔚娟, 张岩, 吴银花, 杨文海, 闫智辉, 贾晓军 2023 物理学报 **72** 034202]
- [7] Gisin N, Ribordy G, Tittel W, Zbinden H 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 145
- [8] Scarani V, Bechmann-Pasquinucci H, Cerf N J, Dušek M,

- Lüttkenhaus N, Peev M 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1301
- [9] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2004 *Science* **306** 1330
- [10] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photonics* **5** 222
- [11] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401
- [12] Winter A, Yang D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 120404
- [13] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [14] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
- [15] Acín A, Masanes L 2016 *Nature* **540** 213
- [16] Yuan X, Zhou H Y, Cao Z, Ma X F 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022124
- [17] Herrero-Collantes M, Garcia-Escartin J C 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 015004
- [18] Unruh W G 1995 *Phys. Rev. A* **51** 992
- [19] Wang G J, Song X K, Ye L, Wang D 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 070301 (in Chinese) [王光杰, 宋学科, 叶柳, 王栋 2025 物理学报 **74** 070301]
- [20] Streltsov A, Singh U, Dhar H S, Bera M N, Adesso G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 020403
- [21] Wang Y T, Tang J S, Wei Z Y, Yu S, Ke Z J, Xu X Y, Li C F, Guo G C 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 020403
- [22] Bu K, Singh U, Fei S M, Pati A K, Wu J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 150405
- [23] Girolami D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 170401
- [24] Wang P, Li Z Y, Meng H X 2024 *Chin. Phys. B* **33** 080308
- [25] Bowles J, Quintino M T, Brunner N 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 140407
- [26] Dorner U, Demkowicz-Dobrzanski R, Smith B J, Lundeen J S, Wasilewski W, Banaszek K, Walmsley I A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 040403
- [27] Pawłowski M, Brunner N 2011 *Phys. Rev. A* **84** 010302
- [28] Li H W, Yin Z Q, Wu Y C, Zou X B, Wang S, Chen W, Guo G C, Han Z F 2011 *Phys. Rev. A* **84** 034301
- [29] Wang Y K, Li Z Y, Xu K, Wang Z Z 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100303 (in Chinese) [王玉坤, 李泽阳, 许康, 王子正 2023 物理学报 **72** 100303]
- [30] Wootters W K, Fields B D 1989 *Ann. Phys.* **191** 363
- [31] Masanes L 2005 arXiv: quant-ph/0512100 [quant-ph]
- [32] Napoli C, Bromley T R, Cianciaruso M, Piani M, Johnston N, Adesso G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 150502
- [33] Chitambar E, Gour G 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 025001
- [34] McKague M, Mosca M, Gisin N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 020505
- [35] Chen M C, Wang C, Liu F M, Wang J W, Ying C, Shang Z X, Wu Y, Gong M, Deng H, Liang F T, Zhang Q, Peng C Z, Zhu X, Cabello A, Lu C Y, Pan J W 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 040403
- [36] Li Z D, Mao Y L, Weilenmann M, Tavakoli A, Chen H, Feng L, Yang S J, Renou M O, Trillo D, Le T P, Gisin N, Acín A, Navascués M, Wang Z, Fan J 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 040402
- [37] Wu D, Jiang Y F, Gu X M, Huang L, Bai B, Sun Q C, Zhang X, Gong S Q, Mao Y, Zhong H S, Chen M C, Zhang J, Zhang Q, Lu C Y, Pan J W 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 140401
- [38] Bednorz A, Batle J 2022 *Phys. Rev. A* **106** 042207
- [39] Renou M O, Trillo D, Weilenmann M, Le T P, Tavakoli A, Gisin N, Acín A, Navascués M 2021 *Nature* **600** 625
- [40] Hickey A, Gour G 2018 *J. Phys. A: Math. Theor.* **51** 414009
- [41] Tavakoli A, Pozas-Kerstjens A, Brown P, Araújo M 2024 *Rev. Mod. Phys.* **96** 045006
- [42] Oszmaniec M, Brod D J, Galvao E F 2024 *New J. Phys.* **26** 013053
- [43] Fernandes C, Wagner R, Novo L, Galvão E F 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 190201

Detecting quantum coherence and complex quantum systems in physical sources without a predefined basis*

WANG Yukun^{1)2)†} HAN Wenmin¹⁾ XING Jincheng¹⁾

¹⁾ (College of Artificial Intelligence, China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

²⁾ (State Key Lab of Processors, Institute of Computing Technology, CAS, Beijing 100190, China)

(Received 3 December 2025; revised manuscript received 25 December 2025)

Abstract

Quantum coherence is a fundamental feature of quantum mechanics and a key factor that distinguishes quantum mechanics from classical theories. From theoretical and practical perspectives, the characterization and quantification of coherence are crucial problems in quantum information science. Although quantum coherence has been recognized as a quantum resource and a systematic framework for its quantification has been developed, existing measurements generally depend on a pre-fixed reference basis. This dependence poses significant challenges in practical scenarios where the reference frame may be misaligned or the measurement

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 62101600) and the State Key Lab of Processors, Institute of Computing Technology, CAS (Grant No. CLQ202404).

† Corresponding author. E-mail: wykun06@gmail.com

devices may be uncharacterized.

To overcome these limitations, we detect quantum coherence within a semi-device-independent (SDI) framework. We introduce the concept of an “incoherent source,” defined as a collection of unknown quantum states that are jointly diagonalizable on an unspecified basis. By using the rank analysis theory of Gram matrices, we transform the problem of coherence detection into the evaluation of experimental correlation matrices. This approach eliminates the need for prior knowledge of the state’s density matrix or the alignment of measurement bases, requiring only the assumption of a bounded Hilbert space dimension (e.g. qubits).

We systematically construct two types of coherence witnesses: linear inequalities and nonlinear determinant-based criteria. For the minimal resource case involving two preparations and two measurements, $n = 2, m = 2$, we derive a linear witness W_1 and prove its tight upper bounds for classical and coherent systems. Moreover, we demonstrate that the determinant of the data matrix B (or $B^T B$) serves as a sharp, nonlinear witness. A non-zero determinant unambiguously implies $\text{rank}(B) \geq 2$, providing a robust and conclusive test for coherence.

Furthermore, we demonstrate that this framework not only has the ability to detect coherence, but also has remarkable discriminatory power. By increasing the number of preparations and measurements, the rank of the underlying state correlation matrix A , which is larger than or equal to 3, can be probed. We show that $\text{rank}(A) \geq 3$ necessitates a complex quantum system, thus requiring the full complex structure of the Hilbert space. We construct specific linear witnesses (e.g. W_3) that can distinguish three hierarchical levels: classical, real-quantum, and complex-quantum, based solely on experimental data. We also analytically demonstrate that although linear witnesses W_2 in $n = 3, m = 3$ scenarios fail to isolate complex structures due to geometric overlaps, the nonlinear determinant witness provides a definitive “pinpoint” identification of complex-number quantum systems.

In summary, we establish a comprehensive SDI theory for witnessing quantum coherence and complex-number structure, without the need for state tomography, or trusted measurements, or a pre-defined basis. Our results provide a novel tool for proving quantum resources, which is of great significance for fundamental research on device-independent cryptography, randomness generation, classical–quantum boundaries, and the role of complex numbers in quantum mechanics.

Keywords: quantum coherence, device-independent, coherence witness, complex quantum system

DOI: [10.7498/aps.75.20251659](https://doi.org/10.7498/aps.75.20251659)

CSTR: [32037.14.aps.75.20251659](https://cstr.net/urn:identifier:32037.14.aps.75.20251659)

基无关的物理源量子相干性及复数系统见证

王玉坤 韩文敏 邢锦程

Detecting quantum coherence and complex quantum systems in physical sources without a predefined basis

WANG Yukun HAN Wenmin XING Jincheng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 060601 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20251659

CSTR: 32037.14.aps.75.20251659

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251659>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

关联退化量子信道中qutrit–qutrit系统的量子相干性演化

Evolution of quantum coherence of qutrit–qutrit system under correlated depolarizing channels

物理学报. 2022, 71(7): 070303 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212067>

双模压缩态量子相干性演化的实验研究

Experimental demonstration on quantum coherence evolution of two–mode squeezed state

物理学报. 2023, 72(3): 034202 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221923>

自旋轨道耦合量子点系统中的量子相干

Quantum coherence in spin–orbit coupled quantum dots system

物理学报. 2022, 71(7): 078502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212111>

准一维混合自旋(1/2, 5/2) Ising–XXZ模型的量子相干和互信息

Quantum coherence and mutual information of mixed spin–(1/2, 5/2) Ising–XXZ model on quasi–one–dimensional lattices

物理学报. 2023, 72(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230381>

微纳尺度稀土掺杂晶体的量子相干性能及其应用研究进展

Research progress of quantum coherence performance and applications of micro/nano scale rare–earth doped crystals

物理学报. 2023, 72(12): 120302 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222166>

基于室温里德伯原子四波混频的微波–光波转换特性

Microwave–to–optics conversion characteristics based on four–wave mixing of Rydberg atoms at room temperature

物理学报. 2025, 74(16): 164209 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250706>