

# 周期调制下原子磁力计的非线性动力学 \*

周宇豪<sup>1)</sup> 俞振华<sup>1)†</sup>

1) (中山大学物理与天文学院, 珠海 519082)

原子磁力计可以通过避免自旋交换弛豫 (SERF) 实现磁场测量的高灵敏度, 也可利用多种原子作为工作介质达到良好的长期零偏稳定性; 其自旋系统本质为非线性动力学系统。本文研究了在纵向偏置磁场上施加周期性调制时, 原子磁力计中涌现的非线性动力学行为。我们通过数值求解 Bloch 方程, 结合快速傅里叶变换、庞加莱截面与李雅普诺夫指数分析, 系统扫描了调制幅度与频率参数空间, 绘制了动力学相图。我们的研究表明: 在周期驱动下, 系统呈现准周期、混沌与极限环三种稳态。其中, 准周期态表现为频谱中多个不可公约频率共存; 混沌态则伴随正李雅普诺夫指数与连续宽带频谱; 而极限环则是出现了闭合的周期轨道。我们的研究结果丰富了对周期调制下原子磁力计非线性动力学的认识。

**关键词:** 原子磁力计, 非线性动力学, 周期调制

**PACS:** 02.10.Yn, 33.15.Vb, 98.52.Cf

## 1 引言

如何设计实验探测超出标准模型范畴的新物理现象是精密测量领域的焦点问题<sup>[1]</sup>。这方面的研究内容包括暗物质粒子<sup>[2,3]</sup>、奇异自旋相关力<sup>[4,5]</sup>、永久电偶极矩<sup>[6,7]</sup>, 以及对 CPT 和洛伦兹不变性<sup>[8,9]</sup>。然而, 这些实验探测常常受到磁场噪声及其他磁场相关的系统性效应的影响<sup>[10,11]</sup>。原子磁力计作为精密磁场测量仪器, 通常采用多种原子气体作为工作介质。常见的体系包括: 由  $^3\text{He}$ - $^{129}\text{Xe}$ <sup>[12,13]</sup> 或  $^{129}\text{Xe}$ - $^{131}\text{Xe}$  等核自旋对构成的稀有气体磁力计<sup>[4,14,15]</sup>; 基于  $^{199}\text{Hg}$ - $^{201}\text{Hg}$  同位素对构成的汞磁力计<sup>[16,17]</sup>; 以及利用

† 通信作者. E-mail: yuzhh5@mail.sysu.edu.cn

第一作者. E-mail: zhouyh202512@163.com

\* 量子通信与量子计算机国家科技重大专项 (批准号: 2025ZD0300400), 国家自然科学基金 (批准号: 12474270) 资助的课题。

碱金属蒸气电子自旋的磁力计<sup>[18,19]</sup>。此外，混合体系如 K-<sup>3</sup>He<sup>[20-22]</sup> 或 K-Rb-<sup>21</sup>Ne 组合<sup>[23-26]</sup> 的碱金属-稀有气体磁力计也得到了广泛应用。这类设计通过利用两种或多种自旋体系的共模进动特性，有效抑制了磁场漂移与波动带来的影响<sup>[14,27-30]</sup>。

自旋系统的实验通常在静态偏置磁场环境下进行。除原子磁力计外，常见的实验平台包括碱金属蒸气<sup>[31,32]</sup>、里德堡原子<sup>[33-35]</sup>、氮空位中心<sup>[36]</sup> 等。在这些体系中，自旋在静态磁场作用下会形成恒定的纵向极化平衡态。为抵抗自旋弛豫引起的信号衰减，常采用主动反馈机制。该机制不仅使系统呈现非线性特征，更可驱动系统进入绕磁场方向（z 轴）持续、稳定旋转的极限环状态，从而为精密测量提供可靠的频率参考<sup>[27,37-41]</sup>。在此基础上的外场调制则可导致在更大参数空间中的非线性动力学行为<sup>[42]</sup>，影响原子磁力计输出信号的谱结构、响应速度以及长期工作稳定性，与精密测量中普遍关注的灵敏度、带宽和稳定性等关键指标密切相关。例如，采用  $\pi$  脉冲序列与旋转脉冲平面调制的共磁力计，实现了 7 nHz 的稳定频率分辨率<sup>[13]</sup>。通过对偏置磁场进行脉冲重复率调制的磁力计，实现了在 1 Hz 带宽下  $7 \mu\text{Hz}/\text{Hz}^{1/2}$  的频率白噪声水平和接近 1  $\mu\text{Hz}$  的偏置不稳定性，低频磁场噪声的抑制超过  $10^3$  倍<sup>[43]</sup>。非线性磁光旋转磁力计通过调制实现了超过 100 kHz 的带宽，其磁场探测灵敏度在 8 Hz 频率时达到  $180 \text{ fT}/\text{Hz}^{1/2}$  以及 100 kHz 频率时的  $0.7 \text{ nT}/\text{Hz}^{1/2}$ <sup>[44]</sup>。快速旋转场与脉冲调制相结合，使原子磁力计在维持  $28 \text{ fT}/\text{Hz}^{1/2}$  标量灵敏度的同时，实现了  $35 \text{ fT}/\text{Hz}^{1/2}$  矢量磁场测量灵敏度<sup>[45]</sup>。此外，外场调制也应用于时间晶体的观测<sup>[46]</sup>。

近期实现的弗洛凯微波激射器<sup>[47]</sup> 是对偏置磁场进行周期调制，从而达到同时的多带激发，可以将激发频率下推到非常小的数值区间；此时，弗洛凯微波激射器对应的稳定轨道是准周期。但原子磁力计在偏置磁场周期调制下能否表现出更为丰富的非线性动力学行为呢？本文研究了原子磁力计在偏置磁场周期调制下的非线性动力学行为。我们考查了不同的参数情况，发现系统的稳定轨道除准周期外，还包括混沌和极限环。我们通过系统扫描调制的幅度与频率，绘制出该系统在调制参数空间中的动力学相图。结合系统无调制时的相图，我们给出了系统涌现准周期和混沌行为的定性理解。我们的研究展示了周期调制下原子磁力计的动力学行为的非平庸性质。

## 2 理论方法

图1展示了一个典型的处于外部磁场中的原子磁力计的示意图。我们考虑在气体室中，包含着 <sup>87</sup>Rb 和 <sup>129</sup>Xe 原子气体。我们聚焦 <sup>129</sup>Xe 核自旋的动力学演化，定义 <sup>129</sup>Xe 核自旋极化（矢量）为  $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ 。实验中，<sup>87</sup>Rb 原子的电子自旋被沿着 z 轴方向射入的圆偏振泵浦光极化，并通过自旋交换碰撞来极化 <sup>129</sup>Xe

原子的核自旋<sup>[48-50]</sup>。另一方面，通过沿着  $y$  轴方向传播的线性偏振探测光的偏振旋转，探测  $^{87}\text{Rb}$  电子自旋  $y$  分量，据此来推断  $^{129}\text{Xe}$  核自旋的  $x$  分量<sup>[14,37,47]</sup>。在沿  $z$  轴方向偏置磁场  $\mathbf{B}_z = B_0\hat{z}$  作用下， $^{129}\text{Xe}$  核自旋拉莫尔进动角的固有频率为  $\omega_0 = 2\pi\gamma B_0$ ；其中  $\gamma$  为核旋磁比。此外，在沿  $y$  轴方向，根据探测光偏振旋转的实时测量结果，反馈体系施加一个额外的反馈磁场  $B_f(t) = -\chi P_x(t)$ ；其中  $\chi$  表示反馈增益系数，由反馈线路决定。

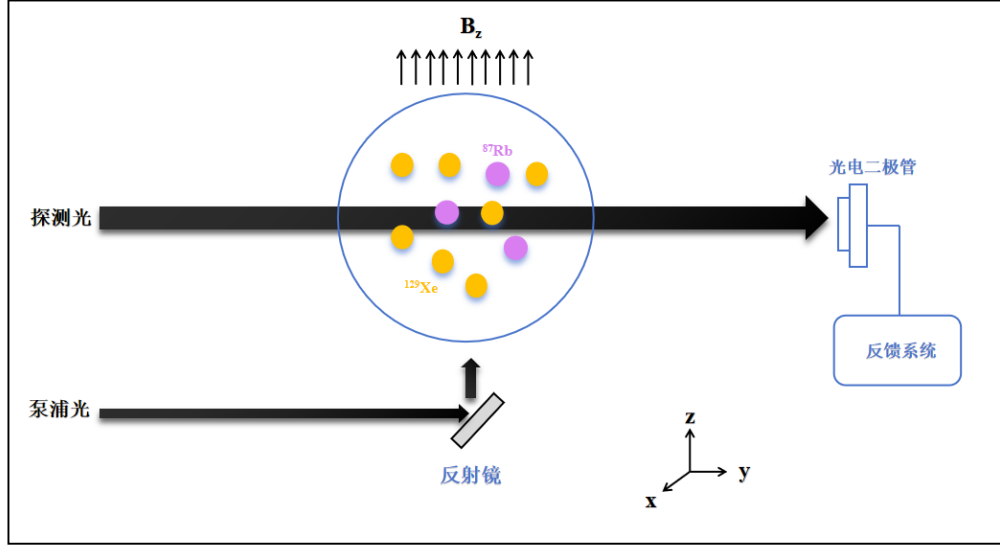


图 1 原子磁力计示意图。

Fig. 1. Schematic of the feedback assisted atomic magnetometer setup.

我们考虑的参数范围是碱金属  $^{87}\text{Rb}$  电子自旋的弛豫速率和光抽运速率远大于其他特征速率，探测光为弱光<sup>[50-52]</sup>。尤其实验中  $^{129}\text{Xe}$  原子密度不能太大，这样系统中的非线性由主动反馈磁场  $B_f(t)$  主导，相比较下  $^{129}\text{Xe}$  核自旋磁矩作用于  $^{87}\text{Rb}$  电子自旋的反向效应所引入的非线性可以忽略。在上述条件下， $^{87}\text{Rb}$  电子自旋被泵浦光在  $z$  方向上极化，对  $^{129}\text{Xe}$  核自旋的首要效应为提供平均极化  $P_{Rb}$ ；我们写下描述  $^{129}\text{Xe}$  核自旋极化  $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$  动力学演化的 Bloch 方程<sup>[30,47,53]</sup>：

$$\frac{dP_x}{dt} = P_y\omega_z(t) - P_z\omega_y(t) - \frac{P_x}{T_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dP_y}{dt} = P_z\omega_x(t) - P_x\omega_z(t) - \frac{P_y}{T_2}, \quad (2)$$

$$\frac{dP_z}{dt} = P_x\omega_y(t) - P_y\omega_x(t) - \frac{P_z}{T_1} + \gamma_{se}(P_{Rb} - P_z). \quad (3)$$

方程组中 (3) 式最后一项描述了  $^{87}\text{Rb}$  电子自旋极化  $P_{Rb}$  对  $^{129}\text{Xe}$  核自旋极化的泵浦效应，其中  $\gamma_{se}$  表示

$^{87}\text{Rb}$  原子和  $^{129}\text{Xe}$  原子之间的自旋交换速率。 $T_1$  和  $T_2$  分别代表  $^{129}\text{Xe}$  核自旋纵向和横向自旋弛豫时间。总磁场为  $\mathbf{B}$ , 对应的  $\boldsymbol{\omega} = 2\pi\gamma\mathbf{B}$ 。我们在  $z$  轴方向引入一个振荡磁场  $B_{ac}\cos(\omega_{ac}t)$  来周期驱动磁力计, 则  $\mathbf{B} = B_f(t)\hat{\mathbf{y}} + [B_0 + B_{ac}\cos(\omega_{ac}t)]\hat{\mathbf{z}}$ ; 此时

$$\omega_z(t)T_2 = \omega_0T_2 + \delta\cos(\omega_{ac}t), \quad (4)$$

其中  $\delta \equiv 2\pi\gamma B_{ac}T_2$  为无量纲化的调整幅度。

值得指出的是, 式 (1-3) 已用于解释先前实验中的非线性动力学现象 [14,47]。当然可以想见, 如果将  $^{87}\text{Rb}$  电子自旋抽运速率减小到一定程度时, 必须同时考虑  $^{87}\text{Rb}$  电子自旋的自由度; 此时可以写下描述  $^{129}\text{Xe}$  核自旋极化与  $^{87}\text{Rb}$  电子自旋极化的 Bloch 方程 [52]。接下来我们会数值积分 (1-3) 式, 确定系统长时间演化后所达到的稳定动力学。我们将通过计算快速傅里叶变换 [54]、庞加莱截面 [55] 和李雅普诺夫指数 [56-58] 来揭示所达到的稳定动力学的性质。

### 3 数值结果

为了数值积分 (1-3) 式, 我们根据实验 [47] 选取参数  $\gamma_{se} = 0.03$  Hz,  $T_1 = 21.5$  s,  $T_2 = 13.65$  s。在本文所考虑的参数区域内,  $^{87}\text{Rb}$  电子自旋的光抽运速率远大于其他特征速率,  $^{87}\text{Rb}$  电子自旋的极化  $P_{Rb}$  变得显著 [59-61]。为了使数值计算结果便于分辨, 我们取  $P_{Rb} = 1$ 。之前的研究表明, 在无周期调制的情况下, 反馈系数  $\chi$  需大于临界值  $\chi_c = (1 + 1/\gamma_{se}T_1)/2\pi\gamma T_2 P_{Rb}$  时 [62], 达到稳定动力学的  $^{129}\text{Xe}$  核自旋极化率在  $x - y$  平面内的分量才可能非 0。我们将  $\omega_0$  和  $\chi$  设置为  $\omega_0T_2 = 1.3$ ,  $\chi/\chi_c = 8$ 。对于纵向磁场周期部分, 我们固定调制频率  $\omega_{ac}T_2 = 4.3$ , 考查随着调制幅度  $\delta$  的变化, 体系的长时间稳定动力学。对于任意参数点  $(\delta, \omega_{ac}T_2)$ , 我们已采用不同的计算精度及  $^{129}\text{Xe}$  核自旋极化  $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$  的初始值进行多次重复计算, 确认系统长时间演化达到的稳定轨道类型保持一致。

图2展示了, 当我们选取三个不同的  $\delta$ , 将 (1-3) 式数值积分到 20000 s, 体系达到的对应的三种不同的稳定动力学, 即准周期、混沌和极限环。图中第一行展示了  $\mathbf{P}(t)$  的相空间轨迹; 第二行是  $\mathbf{P}(t)$  轨迹与平面  $P_z = 0.1$  相交而得的庞加莱截面; 第三行是时间序列  $P_x(t)$ ; 第四行是时序  $P_x(t)$  的傅里叶变换频谱的绝对值。

(1) 准周期轨道。图2第一列针对的情况是  $\delta = 0.125$ , 长时间的稳定轨道表现出准周期的性质。图2(a) 中的相空间轨迹接近一个二维环面。图2(d) 显示相空间轨迹在庞加莱截面上形成四个闭合曲线。图2(g) 中  $P_x(t)$  信号存在规律但没有周期性。相应的, 图2(j) 中的  $P_x$  傅里叶变换频谱的绝对值也表现出规律性, 可

被看作由多组等频率间隔的峰组成。

(2) 混沌。图2第二列针对的情况是  $\delta = 0.2$ ，长时间的稳定轨道表现出混沌的性质。此时，稳定轨道的相空间轨迹与著名的洛伦兹蝴蝶混沌吸引子在几何形态上十分相像<sup>[63]</sup>；轨迹在庞加莱截面上出现成片密集的点云  $P_x(t)$  信号表现出无序性，其傅里叶频谱幅值显著降低，无独立频率尖峰且间隔紧密。

(3) 极限环轨道。图2第三列针对的情况是  $\delta = 0.45$ ，长时间的稳定轨道表现出极限环的性质；其相空间轨迹形成一个非共面的闭合环，并在庞加莱截面上通过六个离散点。 $P_x(t)$  信号展现出周期性，其傅里叶频谱上的尖峰主频率为 0.0131 Hz，并伴随多个  $n$  倍谐波频率 ( $n$  为正整数且大于 1)。

以上三类稳定轨道的李雅普诺夫指数也可以数值计算获得。由于方程组 (1)-(3) 属于显含时间的非自治系统 (non-autonomous systems)，要获得良好定义的不随时间变化的李雅普诺夫指数，我们可以将本文系统先拓展成自治系统<sup>[58]</sup> (即方程中不显含时间  $t$ )，然后再采用针对自治系统的李雅普诺夫指数算法进行计算<sup>[56,57]</sup>。具体而言，在原本系统  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}(\mathbf{P}, t)$  [即方程组 (1)-(3)] 中引入新的变量  $\phi \equiv \omega_{ac}t$ ，如此新的四维变量  $\mathbf{X} \equiv (P_x, P_y, P_z, \phi)$  满足

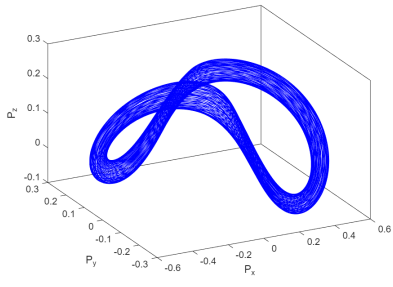
$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}(\mathbf{P}, \phi/\omega_{ac}), \quad (5)$$

$$\dot{\phi} = \omega_{ac}, \quad (6)$$

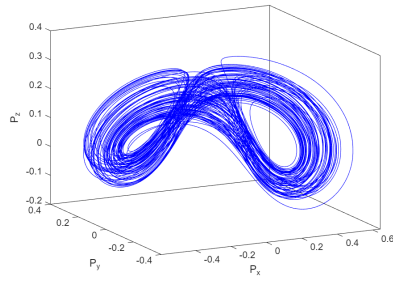
又成为自治系统。对于拓展后的系统，即 (5)-(6)，应有四个李雅普诺夫指数。理论上我们知道，自治系统的李雅普诺夫指数的取值：对于准周期至少有 2 个为 0，其余为负值；对于混沌至少有 1 个为正值；对于极限环只有 1 个为 0，其余为负值<sup>[56,64,65]</sup>。表1给出了我们数值计算方程 (5)-(6) 得到的  $\delta$  三个不同值时稳定轨道的四个李雅普诺夫指数，在  $10^{-4}$  精度水平上，与期望相符合。

进一步，我们数值计算确定了在参数区间  $\delta \in [0.03, 0.5]$ ,  $\omega_{ac}T_2 \in [4, 4.5]$  体系稳定轨道的相图，即图3。我们发现相图由上述的极限环、准周期和混沌三种情况组成。大致而言，准周期处于最左侧区域，混沌处于准周期与极限环区域之间。有趣的是，在准周期区域与混沌区域交界处存在另一极限环区域，由绿色三角与蓝色空心圆包围。我们的结果表明，当  $4.15 \lesssim \omega_{ac}T_2 \leq 4.5$ ，在固定  $\omega_{ac}T_2$  的情况下增大  $\delta$ ，体系将依次发生准周期-混沌-极限环的转变；但当  $4 \leq \omega_{ac}T_2 \lesssim 4.15$ ，固定  $\omega_{ac}T_2$  增大  $\delta$ ，体系所经历转变将变得不同。

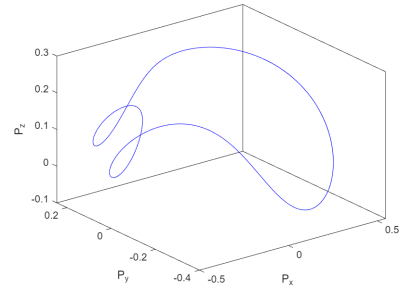
我们发现系统的相图也依赖于参数  $\omega_0 T_2$ 。图4是我们改用  $\omega_0 T_2 = 1.2$ ，在  $\delta \in [0.03, 0.5]$ ,  $\omega_{ac}T_2 \in [4, 4.5]$  区间内确定的相图。虽然，相图仍然由准周期、混沌和极限环组成，但相边界发生了改变。与图3相比，一个显著的变化是准周期的区域压缩到了更小  $\delta$  的数值区间。



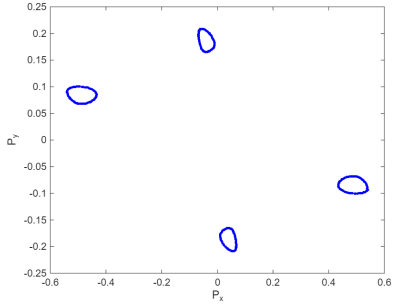
(a)



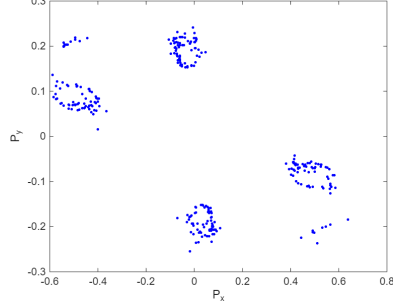
(b)



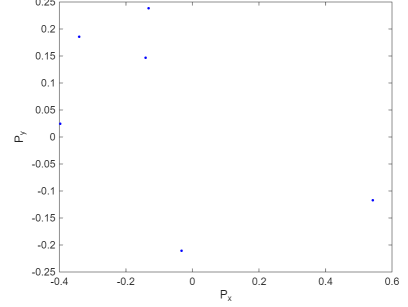
(c)



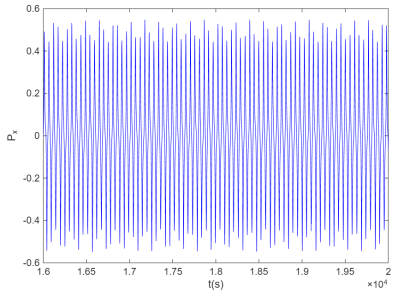
(d)



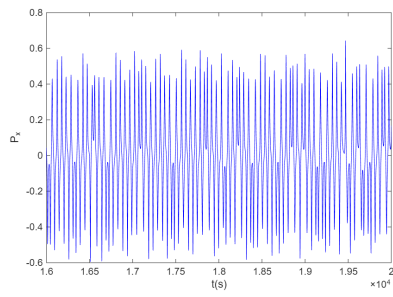
(e)



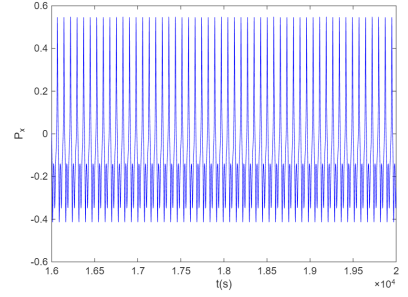
(f)



(g)



(h)



(i)

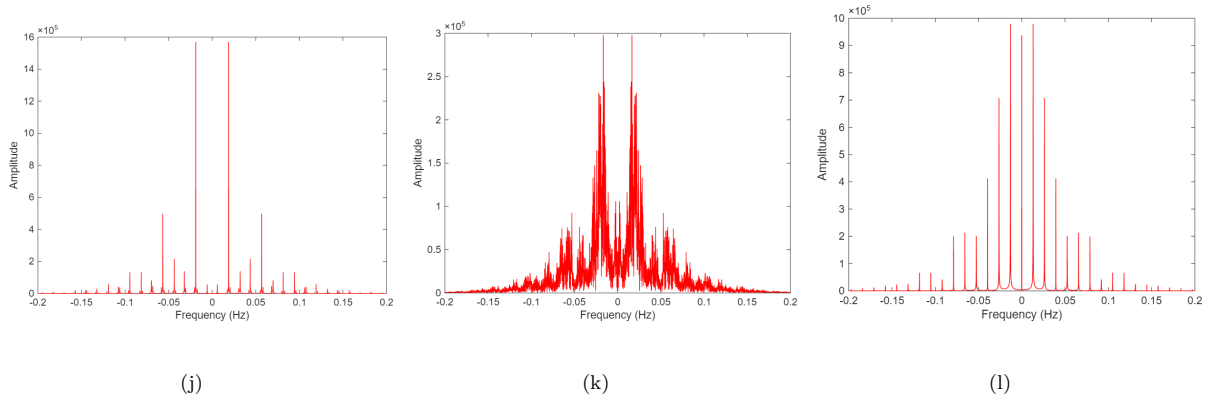


图 2 周期调制下，系统达到稳态轨道准周期（第一列）、混沌（第二列）和极限环（第三列）时的动力学行为。第一列的参数取值为  $\delta = 0.125$ ,  $\omega_{ac}T_2 = 4.3$ ，第二列为  $\delta = 0.2$ ,  $\omega_{ac}T_2 = 4.3$ ，第三列为  $\delta = 0.45$ ,  $\omega_{ac}T_2 = 4.3$ 。

Fig. 2. The steady-state dynamical behaviors of quasi-periodic (first column), chaos (second column) and limit cycle (third column) under the periodic modulation. The parameter values of the first column are  $\delta = 0.125$ ,  $\omega_{ac}T_2 = 4.3$ , the second column is  $\delta = 0.2$ ,  $\omega_{ac}T_2 = 4.3$ , and the third column is  $\delta = 0.45$ ,  $\omega_{ac}T_2 = 4.3$ .

表 1 周期调制下系统中不同吸引子的李雅普诺夫指数

Table 1. The Lyapunov exponents of the different attractors in the periodic-modulation system.

参数 $(\delta, \omega_{ac}T_2)$	李雅普诺夫指数				吸引子类型
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	
(0.125, 4.3)	0.00000	-0.00008	-0.00604	-0.05639	准周期
(0.2, 4.3)	0.00485	0.00000	-0.00245	-0.05556	混沌
(0.45, 4.3)	0.00000	-0.00430	-0.00466	-0.05866	极限环

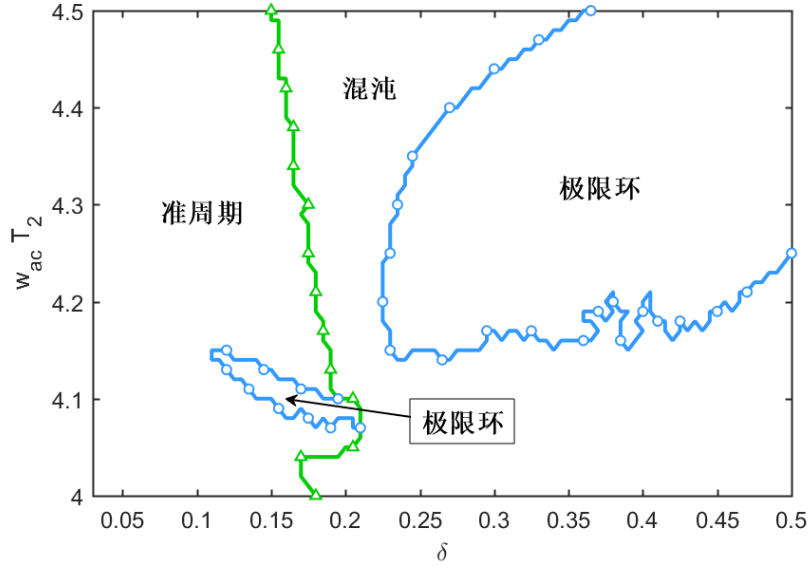


图 3 周期调制下系统的稳定性相图, 参数为  $(\omega_0 T_2, \chi/\chi_c) = (1.3, 8)$ 。图中标出了准周期、混沌和极限环的各自稳定区域; 绿色三角与蓝色空心圆标记的曲线为不同稳定区域的边界。准周期区域位于图最左侧。极限环区域出现在图右上部及左下部。图的其余部分为混沌的稳定区域。

Fig. 3. The stability diagram of the system under the periodic modulation, with the parameters  $(\omega_0 T_2, \chi/\chi_c) = (1.3, 8)$ . The stability regions of quasi-periodic, chaos, and limit cycle are indicated in the figure. The boundaries between different regimes are marked by curves with green triangles and blue open circles. The quasi-periodic region is located on the far left of the diagram. The limit-cycle regimes appear in the upper-right and lower-left portions of the plot, while the remaining area corresponds to stable chaotic behavior.

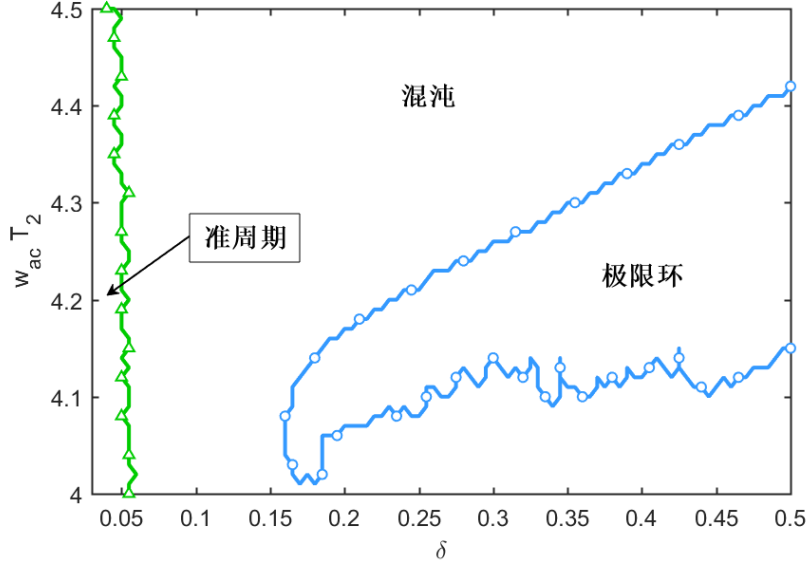


图 4 周期调制下系统的稳定性相图, 参数为  $(\omega_0 T_2, \chi/\chi_c) = (1.2, 8)$ 。图中标出了准周期、混沌和极限环的各自稳定区域。与图3相比, 准周期区域仍位于图最左侧, 但范围显著缩小; 其边界为绿色三角标记的曲线。蓝色空心圆标记的曲线划分了极限环与混沌稳定区域间的边界。

Fig. 4. The stability diagram of the system under the periodic modulation, with the parameters  $(\omega_0 T_2, \chi/\chi_c) = (1.2, 8)$ . The stability regions of quasi-periodic, chaos, and limit cycle are indicated in the figure. Compared with Fig. 3, the quasi-periodic region remains on the far left but is significantly reduced in size; its boundary is marked by the curve with green triangles. The boundary between the limit cycle and chaotic regimes is indicated by the curve with blue open circles.

## 4 讨论

为了解磁场周期调制下出现的上述相图, 我们考虑调制幅度  $\delta \rightarrow 0$  的极限情况。式 (1-3) 在调制幅度  $\delta = 0$  时的相图已在先前的研究中得到 [31,62]。图5是我们采用本文上述使用的参数  $P_{Rb} = 1$ ,  $\gamma_{se} = 0.03Hz$ ,  $T_1 = 21.5s$ ,  $T_2 = 13.65s$  重复出的与文献 [62] 中相同的结果。此时系统的稳定轨道有: 无信号固定点、双固定点、极限环和混沌。

周期调制的相图3是设置了  $(\omega_0 T_2, \chi/\chi_c) = (1.3, 8)$ 。这组参数对应于图5中的 A 点, 落于极限环的相内。从  $\delta = 0$  的极限环解出发, 想象我们在  $\omega_0 T_2$  上加一个幅度  $\delta$  非常小、频率  $\omega_{ac} T_2 (\ll 1)$  也非常小的周期调制; 这样的调整等同于很缓慢的周期改变图5横轴  $\omega_0 T_2$  的数值, 系统的稳定轨道会绝热的跟随  $\omega_0 T_2$

的数值变化。新的稳定轨道可以被认为是由不同  $\omega_0 T_2$  数值对应的极限环轨道拼接而成。新拼接成的轨道一般情况下不会闭合，所以是准周期轨道。这是为什么相图3在小  $\delta$  区域是准周期相。当  $\delta$  不断增大，我们发现很缓慢的周期改变横轴  $\omega_0 T_2$  的数值会进入到图5极限环左侧的混沌相。这也就是为什么图3在  $\delta$  更大的区域是混沌相。基于以上的看法，我们可以解释为什么图4中准周期压缩到了更小  $\delta$  的区域。因为图4使用的参数  $(\omega_0 T_2, \chi/\chi_c) = (1.2, 8)$  在图5中的对应点，比 A 点更接近于图5中准周期与混沌的相边界；更小  $\delta$  幅度，就可使缓慢周期改变的横轴  $\omega_0 T_2$  的数值进入混沌区间。但上述的看法并无法解释图3和图4中极限环的出现。图2(c) 中极限环轨道高度非平庸的形态反映出其复杂性；周期调制下稳定极限环的存在不太可能通过考虑某个极限情况而论证。

值得指出的是，极限环对小扰动通常具有一定鲁棒性。对于本文系统而言，当存在小幅初值偏差、弱环境噪声或控制参数的轻微波动时，系统轨迹虽然会在短时间内偏离原有极限环轨道，但通常会在弛豫时间的尺度回到同一稳定轨道。结合图2第三列的结果可以看出，极限环对应规则的闭合相轨道、有限个离散的庞加莱截面点以及窄线宽间隔频谱峰，这说明该状态的振荡频率十分明确，因此相较于准周期和混沌状态，对弱扰动引起的轨道弥散和频谱展宽更不敏感<sup>[66,67]</sup>。对于原子磁力计而言，这意味着极限环工作状态对偏置磁场的小幅波动、调制幅值或频率的轻微抖动，以及泵浦强度和弛豫参数的小范围漂移具有一定容忍度，从而更有利于稳定信号提取。当然，这种鲁棒性仅限于不改变系统动力学相区的小扰动；若扰

动足够强并使工作点跨越分岔边界，则可能演化为准周期或混沌等其他情况。

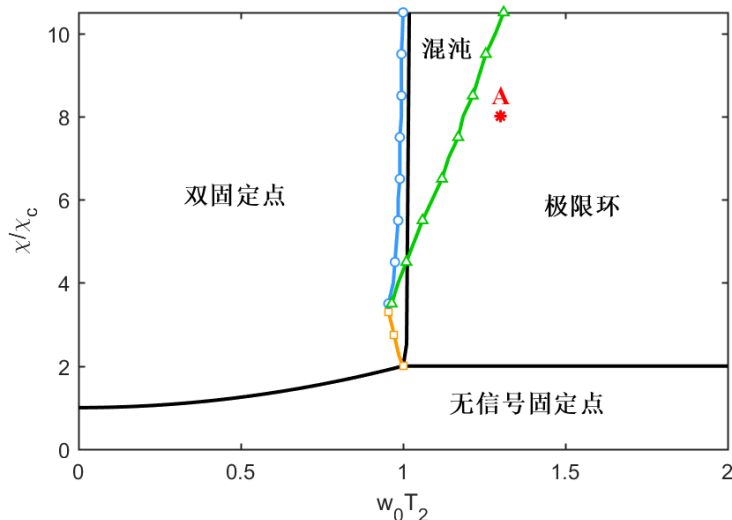


图 5 无周期驱动的系统稳定性相图。图中给出了无信号固定点、双固定点、混沌和极限环四类动力学区域，其边界由黑色实线及蓝色空心圆、黄色方块和绿色三角标记的曲线共同确定。无信号固定点位于下部，双固定点位于左侧，混沌位于中上部，极限环位于右侧。红点 A 表示周期调制分析所选取的参考参数点  $(\omega_0 T_2, \chi/\chi_c) = (1.3, 8)$ 。

Fig. 5. Stability phase diagram of the non-periodically driven system, showing four dynamical regimes: the no-signal fixed point, two fixed points, chaos, and the limit cycle. The phase boundaries are given by black solid lines and curves marked by blue open circles, yellow squares, and green triangles. The red point A denotes the reference parameter set for the periodically modulated analysis,  $(\omega_0 T_2, \chi/\chi_c) = (1.3, 8)$ .

## 5 总结

本文对周期调制作用下原子磁力计的非线性动力学展开探究，并对所呈现的丰富动力学状态进行了分析。引入偏置磁场周期调制后，系统除出现准周期轨道外，当调制参数改变时也会出现混沌轨道，并在某些参数区间出现极限环。通过对比无调制的相图，我们认为准周期的产生可以被看作是在无调制情况下极限环进行扰动得到的，但当扰动大到一定程度后，准周期的性质被破坏，进而转变为混沌。由于体系特有的非线性，极限环也具有稳定的参数区域。如何发挥各相特性在精密测量中的应用，例如混沌轨道对初态的敏感依赖、准周期多模激发对噪声的鲁棒性，将是下一步研究的课题。

## 参考文献

- [1] Safronova M S, Budker D, DeMille D, Kimball D F J, Derevianko A, Clark C W 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 025008
- [2] Budker D, Graham P W, Ledbetter M, Rajendran S, Sushkov A O 2014 *Phys. Rev. X* **4** 021030
- [3] Abel C, Ayres N J, Ban G, Bison G, Bodek K, Bondar V, Daum M, Fairbairn M, Flambaum V V, Geltenbort P, Green K, Griffith W C, van der Grinten M, Grujić Z D, Harris P G, Hild N, Iaydjiev P, Ivanov S N, Kasprzak M, Kermaidic Y, Kirch K, Koch H C, Komposch S, Koss P A, Kozela A, Krempel J, Lauss B, Lefort T, Lemièrè Y, Marsh D J E, Mohanmurthy P, Mtchedlishvili A, Musgrave M, Piegsa F M, Pignol G, Rawlik M, Rebreyend D, Ries D, Roccia S, Rozpędzik D, Schmidt-Wellenburg P, Severijns N, Shiers D, Stadnik Y V, Weis A, Wursten E, Zejma J, Zsigmond G 2017 *Phys. Rev. X* **7** 041034
- [4] Bulatowicz M, Griffith R, Larsen M, Mirijanian J, Fu C B, Smith E, Snow W M, Yan H, Walker T G 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 102001
- [5] Wang Y H, Su H W, Jiang M, Huang Y, Qin Y S, Guo C, Wang Z H, Hu D D, Ji W, Fadeev P, Peng X H, Budker D 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 051801
- [6] Rosenberry M A, Chupp T E 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 22
- [7] Sachdeva N, Fan I, Babcock E, Burghoff M, Chupp T E, Degenkolb S, Fierlinger P, Haude S, Kraegeloh E, Kilian W, Knappe-Grüneberg S, Kuchler F, Liu T, Marino M, Meinel J, Rolfs K, Salhi Z, Schnabel A, Singh J T, Stuißer S, Terrano W A, Trahms L, Voigt J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 143003
- [8] Allmendinger F, Heil W, Karpuk S, Kilian W, Scharth A, Schmidt U, Schnabel A, Sobolev Y, Tullney K 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 110801
- [9] Brown J M, Smullin S J, Kornack T W, Romalis M V 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 151604
- [10] Terrano W A, Romalis M V 2022 *Quantum Sci. Technol.* **7** 014001
- [11] Dang H B, Maloof A C, Romalis M V 2010 *Appl. Phys. Lett.* **97** 151110

- [12] Gemmel C, Heil W, Karpuk S, Lenz K, Ludwig C, Sobolev Y, Tullney K, Burghoff M, Kilian W, Knappe-Grüneberg S, Müller W, Schnabel A, Seifert F, Trahms L, Baeßler S 2010 *Eur. Phys. J. D.* **57** 303
- [13] Limes M E, Sheng D, Romalis M V 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 033401
- [14] Sato T, Ichikawa Y, Kojima S, Funayama C, Tanaka S, Inoue T, Uchiyama A, Gladkov A, Takamine A, Sakamoto Y, Ohtomo Y, Hirao C, Chikamori M, Hikota E, Suzuki T, Tsuchiya M, Furukawa T, Yoshimi A, Bidinosti C, Ino T, Ueno H, Matsuo Y, Fukuyama T, Yoshinaga N, Sakemi Y, Asahi K 2018 *Phys. Lett. A* **382** 588
- [15] Feng Y K, Ning D H, Zhang S B, Lu Z T, Sheng D 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 231803
- [16] Hunter L, Gordon J, Peck S, Ang D, Lin J F 2013 *Science* **339** 928
- [17] Venema B J, Majumder P K, Lamoreaux S K, Heckel B R, Fortson E N 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 135
- [18] Wang Z G, Peng X, Zhang R, Luo H, Li J J, Xiong Z Q, Wang S S, Guo H 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 193002
- [19] Gomez P, Martin F, Mazzinghi C, Benedicto O D, Palacios S, Mitchell M W 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 170401
- [20] Lee J, Lisanti M, Terrano W A, Romalis M 2023 *Phys. Rev. X* **13** 011050
- [21] Bloch I M, Shaham R, Hochberg Y, Kuflik E, Volansky T, Katz O 2023 *Nat. Commun.* **14** 5784
- [22] Kornack T W, Romalis M V 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 253002
- [23] Smiciklas M, Brown J M, Cheuk L W, Smullin S J, Romalis M V 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 171604
- [24] Wei K, Zhao T, Fang X J, Xu Z T, Liu C, Cao Q, Wickenbrock A, Hu Y H, Ji W, Fang J C, Budker D 2023 *Phys. Rev. Lett.* **130** 063201
- [25] Quan W, Wei K, Zhao T, Li H R, Zhai Y Y 2019 *Phys. Rev. A* **100** 012118
- [26] Li R J, Fan W F, Jiang L W, Duan L H, Quan W, Fang J C 2016 *Phys. Rev. A* **94** 032109

- [27] Chupp T E, Hoare R J, Walsworth R L, Wu B 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2363
- [28] Stoner R E, Rosenberry M A, Wright J T, Chupp T E, Oteiza E R, Walsworth R L 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3971
- [29] Bevington P, Gartman R, Stadnik Y V, Chalupczak W 2020 *Phys. Rev. A* **102** 032804
- [30] Padniuk M, Kopciuch M, Cipolletti R, Wickenbrock A, Budker D, Pustelny S 2022 *Sci. Rep.* **12** 324
- [31] Tang Y J, Wang C Y, Liu B, Peng J, Liang C, Li Y H, Zhao X, Lu C C, Zhang S, Liu Y C 2024 arXiv:2407.07697 [quant-ph]
- [32] Chalupczak W, Josephs-Franks P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 033004
- [33] Wu X L, Wang Z Q, Yang F, Gao R C, Liang C, Tey M K, Li X L, Pohl T, You L 2024 *Nat. Phys.* **20** 1389
- [34] Wadenpfehl K, Adams C S 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 143002
- [35] Ding D S, Bai Z Y, Liu Z K, Shi B S, Guo G C, Li W B, Adams C S 2024 *Sci. Adv.* **10** ead15893
- [36] Doherty M W, Manson N B, Delaney P, Jelezko F, Wrachtrup J, Hollenberg L C 2013 *Phys. Rep.* **528** 1
- [37] Yoshimi A, Asahi K, Sakai K, Tsuda M, Yogo K, Ogawa H, Suzuki T, Nagakura M 2002 *Phys. Lett. A* **304** 13
- [38] Inoue T, Furukawa T, Yoshimi A, Nanao T, Chikamori M, Suzuki K, Hayashi H, Miyatake H, Ichikawa Y, Tsuchiya M, Hatakeyama N, Kagami S, Uchida M, Ueno H, Matsuo Y, Fukuyama T, Asahi K 2016 *Eur. Phys. J. D.* **70** 129
- [39] Goldenberg H M, Kleppner D, Ramsey N F 1960 *Phys. Rev. Lett.* **5** 361
- [40] Oxborrow M, Breeze J D, Alford N 2012 *Nature* **488** 353
- [41] Breeze J D, Salvadori E, Sathian J, Alford N M, Kay C W M 2018 *Nature* **555** 493
- [42] Liu G B 2019 *Phys. Rev. A* **99** 033409

- [43] Thrasher D A, Sorensen S S, Weber J, Bulatowicz M, Korver A, Larsen M, Walker T G 2019 *Phys. Rev. A* **100** 061403
- [44] Li R J, Baynes F N, Luiten A N, Perrella C 2020 *Phys. Rev. Appl.* **14** 064067
- [45] Wang T, Lee W, Limes M, Kornack T, Foley E, Romalis M 2025 *Nat. Commun.* **16** 1374
- [46] Wang W Y, Feng M J, Ma Q J, Cai Z, Li E W, Liu G B 2025 *Commun. Phys.* **8** 191
- [47] Su H W, Wang Y H, Jiang M, Ji W, Fadeev P, Hu D D, Peng X H, Budker D 2021 *Sci. Adv.* **7** eabe0719
- [48] Happer W 1972 *Rev. Mod. Phys.* **44** 169
- [49] Happer W, Miron E, Schaefer S, Schreiber D, van Wijngaarden W A, Zeng X 1984 *Phys. Rev. A* **29** 3092
- [50] Walker T G, Happer W 1997 *Rev. Mod. Phys.* **69** 629
- [51] Klinger E, Liu T, Padniuk M, Engler M, Kornack T, Pustelny S, Jackson Kimball D F, Budker D, Wickenbrock A 2023 *Phys. Rev. Appl.* **19** 044092
- [52] Shaham R, Katz O, Firstenberg O 2022 *Nat. Phys.* **18** 506
- [53] Liu G, Guarrera V, Gu S, Zhang S 2021 *Phys. Rev. A* **104** 032827
- [54] Cochran W T, Cooley J W, Favin D L, Helms H D, Kaenel R A, Lang W W, Maling G C, Nelson D E, Rader C M, Welch P D 1967 *Proc. IEEE* **55** 1664
- [55] Zhang Z Y, Dai L M 2025 *Chaos Solitons Fractals* **199** 116849
- [56] Parker T S, Chua L 2012 *Practical numerical algorithms for chaotic systems* (New York: Springer), pp 57–82
- [57] Benettin G, Galgani L, Strelcyn J M 1976 *Phys. Rev. A* **14** 2338
- [58] Kloeden P E, Rasmussen M 2011 *Nonautonomous Dynamical Systems* (Rhode Island: American Mathematical Society), pp 23–31

- [59] Song B, Wang Y, Zhao N 2021 *Phys. Rev. A* **104** 023105
- [60] Gao G, Hu J, Tang F, Liu W, Zhang X, Wang B, Deng D, Zhu M, Zhao N 2024 *Phys. Rev. Appl.* **21** 014042
- [61] Wang J, Lee J, Loughlin H, Hedges M, Romalis M V 2025 *Phys. Rev. A* **111** 053103
- [62] Wang T S, Yu Z H 2025 *Phys. Rev. A* **111** 033506
- [63] Strogatz S H 2000 *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (Boca Raton: CRC Press), pp 301–347
- [64] Haken H 1983 *Phys. Lett. A* **94** 71
- [65] Sandri M 1996 *Math. J.* **6**
- [66] Giacomini G, Poquet C, Shapira A 2018 *J. Differ. Equ.* **264** 1019
- [67] Goldobin D S, Teramae J N, Nakao H, Ermentrout G B 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 154101

# Nonlinear Dynamics of Atomic Magnetometers under a Periodic Magnetic Field Modulation\*

ZHOU Yuhao<sup>1)</sup> YU Zhenhua<sup>1)†</sup>

1) (*School of Physics and Astronomy, Sun Yat-Sen University (Zhuhai Campus), Zhuhai  
519082, China*)

## Abstract

Atomic magnetometers can achieve high magnetic-field sensitivity in the spin-exchange relaxation-free (SERF) regime, while multi-species media can provide good long-term zero-bias stability. Their underlying spin system is intrinsically nonlinear. In this work, we study the nonlinear dynamical behavior of a feedback-assisted atomic magnetometer under periodic modulation of the longitudinal bias magnetic field. In the parameter range considered here, the  $^{87}\text{Rb}$  electron-spin polarization remains close to a quasi-steady state, so the long-time dynamics are dominated by the  $^{129}\text{Xe}$  nuclear-spin polarization and are described by a simplified Bloch model, Eqs. (1) to (3). By numerically integrating the Bloch equations, we determine the stable dynamical states reached after long-time evolution. To characterize the nature of these states, we combine fast Fourier transform spectrum, Poincaré section and Lyapunov exponents. Our results show that, under periodic driving, the system exhibits three distinct states: quasi-periodic orbits, chaos and limit cycles. The quasi-periodic state is characterized by multiple incommensurate frequencies in the spectrum. The chaotic state shows a positive Lyapunov exponent and a continuous broadband spectrum. The limit cycle state corresponds to a stable closed periodic orbit in phase space. By scanning

---

\* Project supported by Quantum Science and Technology-National Science and Technology Major Project (Grant No.2025ZD0300400), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12474270)

† Corresponding author. E-mail: yuzhh5@mail.sysu.edu.cn  
The First Author. E-mail: zhoyuh202512@163.com

the modulation amplitude  $\delta$  and modulation frequency  $\omega_{ac}T_2$  (see Eq. (4)), we construct the dynamical phase diagram in the modulation-parameter space. In particular, for  $(\omega_0T_2, \chi/\chi_c) = (1.3, 8)$ , the phase diagram, Fig. 3 (also see the left figure below), is mainly composed of quasi-periodic, chaotic, and limit-cycle regions, with a small isolated limit-cycle island near the boundary between the quasi-periodic and chaotic regions. Increasing  $\delta$  can drive the system from quasi-periodic to chaos and then to a limit cycle. For comparison, when  $(\omega_0T_2, \chi/\chi_c) = (1.2, 8)$ , the quasi-periodic region shrinks markedly toward smaller  $\delta$ , which is shown in the phase diagram, Fig. 4 (also see the right figure below). Based on the phase diagram without modulation, Fig. 5, we give a qualitative argument for the origins of the quasi-periodic and chaotic dynamics, and comment that the limit cycles with intricate trajectories (see Fig. 2(e)) are emergent from the nonlinearity of the system. These results enrich the understanding of nonlinear spin dynamics in periodically modulated atomic magnetometers.

**Keywords:** atomic comagnetometer, nonlinear dynamics, periodic modulation

