

# 非磁化热尘埃等离子体中(3+1)维尘埃声波的传播特征

林麦麦<sup>†</sup> 汪亚萍 陈富艳 崔海波

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

**摘要:** 本文以磁流体力学理论为基础, 探讨当非磁化热尘埃等离子体由尘埃颗粒、电子和 nonthermal 分布离子构成时, 该系统中(3+1)维非线性尘埃声波的演化行为。首先, 依次使用线性化方法、约化摄动法和 Sagdeev 势方法, 推导获得色散关系、Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程以及 Sagdeev 势函数的解析表达式, 用以描述(3+1)维非线性尘埃声波随时空的演化与动力学行为。然后, 利用数值模拟方法, 探讨系统处于等温和绝热两种不同状态时, 各种系统状态参数对非线性尘埃声波的色散关系、KP 方程演化特征、二维自治系统相空间结构演变、Sagdeev 势函数零点的变化及孤立波波形的影响。最后, 研究结果表明: 当(3+1)维非磁化热尘埃等离子体系统处于等温和绝热两种不同热力学状态时, 诸如 nonthermal 离子特征、等离子体各组分的温度状态以及组分浓度等各类系统状态参数均会对稀疏型非线性孤立波传播频率、振幅、宽度及波形等演化特征产生显著作用。

**关键词:** 非磁化热尘埃等离子体, (3+1)维非线性尘埃声波, 线性化方法, 约化摄动法, Sagdeev 势方法

## 1. 引言

近年来, 关于复杂等离子体系统中非线性尘埃声孤波的研究课题<sup>[1-12]</sup>, 已经成为探索宇宙尘埃等离子体集体行为的重要理论基石<sup>[13,14]</sup>, 这一研究领域的不断深入研究不仅提高了人们对宇宙中等离子体物质状态的基本认识水平, 也推动了极端复杂空间环境中非线性波动行为的前沿探索<sup>[15,16]</sup>。非线性尘埃声波最早由 Rao 等人首次在 1990 年进行理论预测<sup>[17]</sup>。并于 1995 年被 Barkan 等人通过实验观测所验证<sup>[18]</sup>。自此, 非线性尘埃声波理论和实验研究成为学者们广泛关注的热门课题之一。例如: Xie 等人研究了尘埃电荷对尘埃声孤子的影响<sup>[19]</sup>。Schamel 则提出在实验室等离子体和空间等离子体环境中, 等离子体所含离子将偏离经典的 Maxwell 分布状态, 呈现多种不同形式的非热力学平衡状态<sup>[20]</sup>。而非热力学平衡的离子分布状态将极大地改变大振幅静电孤立波的传播特性<sup>[21-23]</sup>。Gao 等人

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: linmaimai1514@126.com

在含有带负电的尘埃颗粒与 Cairns 分布离子的复杂等离子体系统中引入“广义极化力”的概念，推导并分析了修正的色散系数与非线性系数的典型特征，结果表明：极化力与 Cairns 分布离子及非广延效应耦合后，将显著改变孤波的碰撞相位与动力学稳定性<sup>[21]</sup>。林麦麦等人则证实了非热电子与陷俘离子的协同作用能够控制势阱形态，从而影响非线性尘埃声孤波的存在域及其特性<sup>[22]</sup>。Bezbaruah 等人在土星 E 环的非热等离子体模型中引入负离子调制，采用约化摄动法推导得到 mKP/KdV 型演化方程，结果表明：负离子与非热离子共同调控孤波的相速度、振幅及稳定性，并在特定参数范围内使系统产生稀疏型的孤波阵列<sup>[23]</sup>。

关于空间等离子体中非线性波动过程的研究，由于其理论复杂，所以通常均采用经典模型，而考察更接近于真实空间环境的多种物理因素对非线性尘埃声波的影响应更具理论意义和应用价值<sup>[24-28]</sup>。Naeem 等人研究了在同时存在 Kappa 分布离子和尘埃流情况下的等离子体系统中任意振幅的尘埃声孤波，并深入探讨了尘埃流对大振幅孤波的调制作用<sup>[24]</sup>。林麦麦等人研究了(2+1)维多组分热尘埃等离子体发现，孤立波的相空间存在域和特性将受到马赫数、多种粒子数密度、粒子温度及 nonthermal 离子数的直接影响<sup>[25]</sup>。Singh 等人对尘埃声孤波的演化过程进行模拟，发现离子和电子 Kappa 指数的增强会有效削弱孤波稳定性并降低波速与振幅<sup>[26]</sup>。Dubinov 等人分析了存在带电尘埃流的非线性尘埃声波结构，指出周期波使尘流方向与相速度相反，而孤波可携带尘粒同向传输<sup>[27]</sup>。Gogoi 等人通过实验观测到非平面尘埃声孤波，并验证其与非平面几何修正方程的理论解保持一致<sup>[28]</sup>。

本文着重研究当非磁化热尘埃等离子体由尘埃颗粒、电子和 nonthermal 离子构成时，该体系内的(3+1)维非线性尘埃声波的传播与演化行为。首先，线性化方法推导获得尘埃声波的色散关系；接下来，以约化摄动法构建(3+1)维的 KP 演化方程，用来描述非线性尘埃声波运动特征，并借助数值模拟，对系统参数变化下 KP 方程中非线性系数和色散系数的响应特性进行了研究；最终，将约化摄动法、Sagdeev 势方法和数值模拟结果相结合，对系统相空间轨迹的演化、Sagdeev 势函数的零点位置变化，以及稀疏型非线性尘埃声孤波的振幅、宽度和波形等传播演化特征所受到的影响进行了系统讨论。

## 2. 原始方程及其求解

基于磁流体力学理论框架，构建由尘埃颗粒、电子和 nonthermal 分布离子所组成的非磁化热尘埃等离子体模型<sup>[29]</sup>，采用恰当的归一化方式，并忽略粒子间碰撞效应以及尘埃电荷涨落效应，可将系统的连续性方程、动量方程及泊松方程统一表示为一组无量纲化流体方程组<sup>[25,29]</sup>：

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial(n_d u_d)}{\partial x} + \frac{\partial(n_d v_d)}{\partial y} + \frac{\partial(n_d w_d)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_d}{\partial t} + u_d \frac{\partial u_d}{\partial x} + v_d \frac{\partial u_d}{\partial y} + w_d \frac{\partial u_d}{\partial z} + \frac{\sigma_d}{n_d} \frac{\partial p_d}{\partial x} = \frac{Z_d}{m_d} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_d}{\partial t} + u_d \frac{\partial v_d}{\partial x} + v_d \frac{\partial v_d}{\partial y} + w_d \frac{\partial v_d}{\partial z} + \frac{\sigma_d}{n_d} \frac{\partial p_d}{\partial y} = \frac{Z_d}{m_d} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial w_d}{\partial t} + u_d \frac{\partial w_d}{\partial x} + v_d \frac{\partial w_d}{\partial y} + w_d \frac{\partial w_d}{\partial z} + \frac{\sigma_d}{n_d} \frac{\partial p_d}{\partial z} = \frac{Z_d}{m_d} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4)$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial t} + u_d \frac{\partial p_d}{\partial x} + v_d \frac{\partial p_d}{\partial y} + w_d \frac{\partial p_d}{\partial z} + \gamma p_d \left( \frac{\partial u_d}{\partial x} + \frac{\partial v_d}{\partial y} + \frac{\partial w_d}{\partial z} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = Z_d n_d + \frac{\mu}{1-\mu} e^{\sigma_d \phi} - \frac{1}{1-\mu} n_i \quad (6)$$

其中  $n_d$  为尘埃颗粒数密度，以其初始平衡状态密度  $n_{d0}$  为基准进行归一化处理。

尘埃流体速度分量  $u_d$ ， $v_d$ ， $w_d$  (在  $x$ ， $y$ ， $z$  三个不同方向)，均通过尘埃声速

$C_d = \sqrt{\frac{Z_d T_i}{m_d}}$  无量纲化，其中声速表达式中的  $Z_d$ 、 $m_d$ 、 $T_i$  分别为尘埃颗粒荷电量、

质量及离子温度。压强  $p_d$  由  $n_{d0} Z_d T_d$  无量纲化，此处  $T_d$  是尘埃温度。电势  $\phi$  以离子

温度归一化  $\frac{T_i}{e}$  引入。空间变量  $x$ ， $y$ ， $z$  选用 Debye 长度  $\lambda_{Dd} = \sqrt{\frac{T_i}{4\pi Z_d^2 n_d e^2}}$  进

行归一化，以尘埃等离子体频率的倒数  $\omega_{pd}^{-1} = \sqrt{\frac{m_d}{4\pi Z_d^2 n_d e^2}}$  为标尺，对时间  $t$  实

施归一化。其他等离子体系统的状态参数： $\sigma_d = \frac{T_d}{T_i}$ ， $\mu = \frac{n_{e0}}{n_{i0}}$ ， $\sigma_i = \frac{T_i}{T_e}$ ，其中  $T_e$  为

电子温度， $n_{e0}$  和  $n_{i0}$  分别表示未扰动的电子和离子数密度。 $\gamma = 1$  和  $\gamma = 5/3$  分别表

示等离子体系统处于等温和绝热状态<sup>[25,28,29]</sup>。

Nonthermal 分布的离子数密度  $n_i$  满足下列表达式<sup>[30,31]</sup>:

$$n_i = \left[ 1 + \frac{4\alpha}{1+3\alpha} (\phi + \phi^2) \right] e^{-\phi} \quad (7)$$

其中  $\alpha$  是衡量离子分布偏离热平衡程度的参数, 即 nonthermal 离子数。当  $\alpha = 0$  时, nonthermal 分布退化为 Maxwell 分布状态; 当  $0 < \alpha < 1$ , 则表征 nonthermal 分布状态<sup>[32,34]</sup>。

首先, 利用线性化方法, 探讨(3+1)维非线性尘埃声波传播的色散关系特征。

假设  $n_d = 1 + \varepsilon n_{d1} e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$ ,  $u_d = \varepsilon u_{d1} e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$ ,  $v_d = \varepsilon v_{d1} e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$ ,  $w_d = \varepsilon w_{d1} e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$ ,  $p_d = \varepsilon p_{d1} e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$ ,  $\phi = \varepsilon \phi_1 e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$ 。将以上各式代入方程(1)-(6), 可得到如下形式的(3+1)维非线性尘埃声波的色散关系:

$$\omega^2 = \gamma \sigma_d (k^2 + l^2 + m^2) + m_d^{-1} \left[ 1 + \frac{1}{(1-\mu)(k^2 + l^2 + m^2)} \left( \mu \sigma_i - \frac{\alpha-1}{1+3\alpha} \right) \right]^{-1}$$

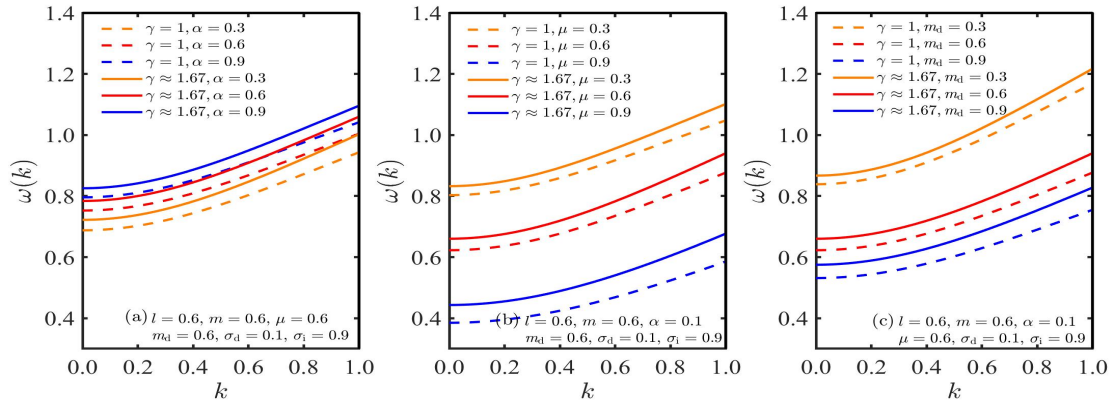


图 1 等离子体状态参数  $\alpha$ 、 $\mu$ 、 $m_d$  对非线性尘埃声波色散关系  $\omega = \omega(k)$  的影响

**Fig.1. Variations of dispersion relation  $\omega = \omega(k)$  for the nonlinear dust acoustic waves with different parameters  $\alpha$ ,  $\mu$  and  $m_d$ , respectively.**

接下来, 通过数值模拟方法研究非线性尘埃声波的传播特征。图 1 给出了在等温和绝热两种状态下 ( $\gamma = 1$  和  $\gamma = 5/3$ ), 等离子体的多种状态参数  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $m_d$  对非磁化热尘埃等离子体系统中(3+1)维非线性尘埃声波的色散关系的影响。图示显示: 在等温和绝热两种状态下, 非线性尘埃声波的频率均随着波数  $k$  的增大呈

现出单调上升的变化趋势。这表明，对于非磁化热尘埃等离子体中的(3+1)维非线性尘埃声波而言，不论是等温还是绝热状态下，波数越大非线性尘埃声波的传播频率越高。图 1(a)表明：一方面，在等温和绝热两种不同状态下，尘埃声波的传播频率 $\omega$ 随 nonthermal 离子数 $\alpha$ 的增大而增大；另一方面，当其他系统参数取值相同时，绝热状态下尘埃声波的传播频率明显高于等温状态下的传播频率。这表明等温和绝热状态下，非磁化热尘埃等离子体内 nonthermal 离子数的增加，会促使系统出现以更高频率传播的非线性尘埃声波。图 1(b)则给出了等温和绝热状态下，非线性尘埃声波的频率 $\omega$ 随等离子体参数 $\mu$ 的变化规律。结果表明：当 $\gamma=1$ 和 $\gamma=5/3$ 时， $\omega$ 随 $\mu$ 的增大而减小。考虑到 $\mu = n_{e0}/n_{i0}$ ，这说明在等温和绝热状态下，当非磁化热尘埃等离子体所含的未扰动电子数密度越大且未扰动的离子数密度越小时，在此等离子体系统中，非线性尘埃声波将具备更高的传播频率；而未扰动离子数密度越高且未扰动的离子数密度越低时，非线性尘埃声波的传播频率将降低。图 1(c)则探讨了尘埃颗粒质量 $m_d$ 对非线性尘埃声波传播频率的影响。结果表明：不论是等温还是绝热状态，尘埃颗粒的质量越小，则非线性尘埃声波的传播频率越快，而尘埃颗粒的质量越大则尘埃声波的传播频率越慢。

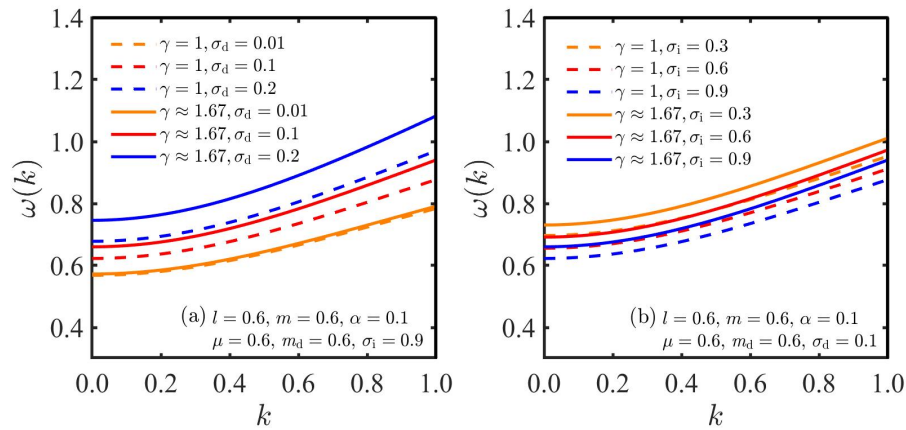


图 2 等离子体状态参数 $\sigma_d$ 、 $\sigma_i$ 对非线性尘埃声波色散关系 $\omega = \omega(k)$ 的影响

**Fig.2. Variations of dispersion relation  $\omega = \omega(k)$  for the nonlinear dust acoustic waves with different parameters  $\sigma_d$  and  $\sigma_i$ , respectively.**

等离子体的状态参数 $\sigma_d$ 和 $\sigma_i$ 对非磁化热尘埃等离子体系统中(3+1)维非线性尘埃声波色散关系由图 2 给出。不难看出：当等离子体状态参数 $\sigma_d$ 和 $\sigma_i$ 变化时，

非线性尘埃声波的传播频率仍将随着波数  $k$  的增大而增大。与此同时，在等温和绝热两种热力学条件下，非线性尘埃声波的频率  $\omega$  随  $\sigma_d$  增大而升高，随  $\sigma_i$  的增大而减小。考虑到  $\sigma_d = T_d/T_i$ ， $\sigma_i = T_i/T_e$ ，这说明当  $\gamma = 1$  时，等离子体系统处于等温状态，若尘埃颗粒和电子的温度越高、离子温度越低，则尘埃声波的传播频率越高；相反地，尘埃颗粒和电子温度越低、离子温度越高，则尘埃声波的传播频率越低。对比来看，相同的参数取值条件下，等温状态的等离子体系统的非线性尘埃声波的传播频率将显著低于绝热状态情况。综上所述，诸如 nonthermal 离子数、等离子体各组分的温度状态以及组分数密度之比等各类系统状态参数对等温和绝热状态下(3+1)维尘埃声波的传播频率均存在显著影响。

### 3. 小振幅非线性尘埃声波的演化特征

我们采用约化摄动法，研究长波近似下小振幅非线性尘埃声波的演化特征。首先，假设三维尘埃声波沿  $z$  轴方向传播、较弱的横向扰动出现在  $xoy$  平面，且时间慢变，则由小参数  $\varepsilon$  所构建的坐标伸展变换为： $\zeta = \varepsilon x$ ， $\eta = \varepsilon y$ ， $\tau = \varepsilon^{3/2} t$ ， $\zeta = \varepsilon^{1/2} (z - v_0 t)$ ，其中  $v_0$  为线性波传播速度。其次，对(1)-(6)中涉及的各未知量，引入如下形式的摄动级数展开：

$$n_d = 1 + \varepsilon n_{d1} + \varepsilon^2 n_{d2} + \varepsilon^3 n_{d3} + \dots \quad (8)$$

$$u_d = \varepsilon^{3/2} u_{d1} + \varepsilon^{5/2} u_{d2} + \varepsilon^{7/2} u_{d3} + \dots \quad (9)$$

$$v_d = \varepsilon^{3/2} v_{d1} + \varepsilon^{5/2} v_{d2} + \varepsilon^{7/2} v_{d3} + \dots \quad (10)$$

$$w_d = \varepsilon w_{d1} + \varepsilon^2 w_{d2} + \varepsilon^3 w_{d3} + \dots \quad (11)$$

$$p_d = 1 + \varepsilon p_{d1} + \varepsilon^2 p_{d2} + \varepsilon^3 p_{d3} + \dots \quad (12)$$

$$\phi = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + \dots \quad (13)$$

将上述各式代入方程(1)-(6)，分别按  $\varepsilon$  的不同阶次幂进行求解。

在  $\varepsilon$  的最低次幂量级下，求解得到：

$$n_{d1} = \frac{Z_d}{m_d (\gamma \sigma_d - v_0^2)} \phi_1$$

$$w_{d1} = \frac{v_0 Z_d}{m_d (\gamma \sigma_d - v_0^2)} \phi$$

$$p_{d1} = \frac{\gamma Z_d}{m_d (\gamma \sigma_d - v_0^2)} \phi$$

$$\frac{\partial u_{d1}}{\partial \zeta} = \frac{Z_d v_0}{m_d (\gamma \sigma_d - v_0^2)} \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial v_{d1}}{\partial \zeta} = \frac{Z_d v_0}{m_d (\gamma \sigma_d - v_0^2)} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}$$

在  $\varepsilon$  的较高次幂下:

$$\begin{aligned} -v_0 \frac{\partial n_{d2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial n_{d1}}{\partial \tau} + \frac{\partial u_{d1}}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_{d1}}{\partial \eta} + \frac{\partial w_{d2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial n_{d1} w_{d1}}{\partial \zeta} &= 0 \\ -v_0 \frac{\partial u_{d2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_{d1}}{\partial \tau} + \sigma_d \frac{\partial p_{d2}}{\partial \zeta} - \frac{Z_d}{m_d} \left( n_{d1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta} \right) &= 0 \\ -v_0 \frac{\partial v_{d2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_{d1}}{\partial \tau} + \sigma_d \frac{\partial p_{d2}}{\partial \eta} - \frac{Z_d}{m_d} \left( n_{d1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) &= 0 \\ -v_0 \frac{\partial w_{d2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_{d1}}{\partial \tau} + \sigma_d \frac{\partial p_{d2}}{\partial \zeta} - \frac{Z_d}{m_d} \left( n_{d1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta} \right) &= 0 \\ -v_0 \frac{\partial p_{d2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial p_{d1}}{\partial \tau} + w_{d1} \frac{\partial p_{d1}}{\partial \zeta} + \gamma \frac{\partial u_{d1}}{\partial \zeta} + \gamma \frac{\partial v_{d1}}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial w_{d2}}{\partial \zeta} + \gamma p_{d1} \frac{\partial w_{d1}}{\partial \zeta} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2} = Z_d n_{d2} + \frac{1}{1-\mu} \left( \mu \sigma_i + 1 - \frac{4\alpha}{1+3\alpha} \right) \phi_2 + \frac{1}{2(1-\mu)} (\mu \sigma_i^2 - 1) \phi_1^2 & \end{aligned}$$

最终求得(3+1)维非线性尘埃声波运动所满足的 KP 方程:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + A \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} + B \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \zeta^3} \right) + C \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2} \right) = 0 \quad (14)$$

其中:

$$A = \frac{\gamma \sigma_d - v_0^2}{2v_0} \frac{(\mu \sigma_i^2 - 1)(1+3\alpha)}{(\mu \sigma_i + 1)(1+3\alpha) - 4\alpha} - \frac{3v_0^2 - 2\gamma \sigma_d + \gamma^2 \sigma_d}{2v_0} \sqrt{\frac{(\mu \sigma_i + 1)(1+3\alpha) - 4\alpha}{(1-\mu)(1+3\alpha)m_d(v_0^2 - \gamma \sigma_d)}}$$

$$B = \frac{(v_0^2 - \gamma \sigma_d)(1-\mu)(1+3\alpha)}{2v_0 [(\mu \sigma_i + 1)(1+3\alpha) - 4\alpha]}$$

$$C = \frac{v_0}{2}$$

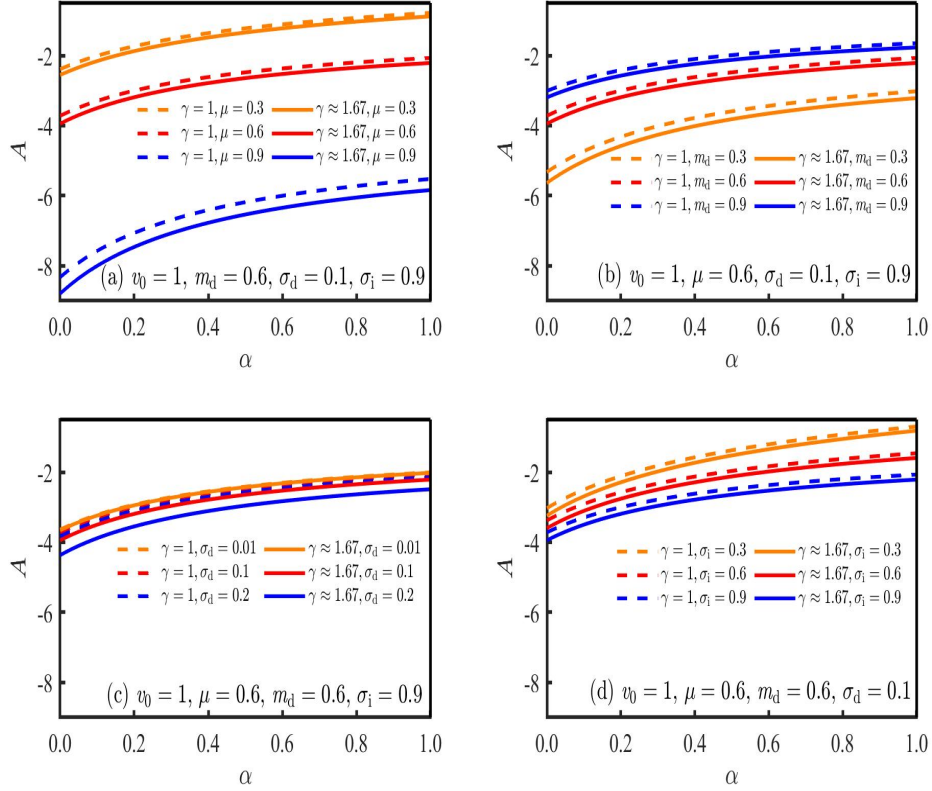


图 3 等离子体状态参数  $\mu$ 、 $m_d$ 、 $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  对 KP 方程的非线性系数  $A$  的影响

**Fig. 3. Variations of the nonlinear coefficient  $A$  in KP equation with different parameters  $\mu$ ,  $m_d$ ,  $\sigma_d$  and  $\sigma_i$ , respectively.**

图 3 探讨了 KP 方程的非线性系数  $A$  在非磁化热尘埃等离子体体系中，不同物理参数的取值对其调控作用。从图 3 可以看出：无论是等温条件( $\gamma=1$ )还是绝热条件( $\gamma=5/3$ )，KP 方程的非线性系数  $A$  总会随着 nonthermal 离子数  $\alpha$  的增大呈单调递增趋势，而其他系统参数  $\mu$ 、 $m_d$ 、 $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  的变化对  $A$  的调控作用效果则存在差异。从图 3(a)不难发现：当  $\gamma=1$  和  $\gamma=5/3$  时，KP 方程的非线性系数  $A$  将随着未扰动的电子与离子数密度之比  $\mu$  的增大而减小。但图 3(b)则显示：尘埃颗粒质量  $m_d$  对非线性系数  $A$  的影响则恰好相反。而图 3(c)和图 3(d)的模拟结果则表明体系中尘埃颗粒、电子和离子的温度之比对非线性系数  $A$  的强弱也存在一定影响。

图 4 探讨了系统参数  $\mu$ ,  $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  取为定值时, 在等温和绝热两种热力学状态下, KP 方程中色散系数  $B$  随着 nonthermal 离子数  $\alpha$  的演化规律。从中不难发现: 当  $\gamma=1$  和  $\gamma=5/3$  时, 色散系数  $B$  随 nonthermal 离子数  $\alpha$  的增加而增大的变化趋势保持一致, 而其它系统参数  $\mu$ ,  $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  的逐步增大将导致色散系数  $B$  逐渐减小。这表明, 非磁化热尘埃等离子体中尘埃颗粒、电子、离子的数密度、温度等状态参数均会影响非线性尘埃声波的色散效应。

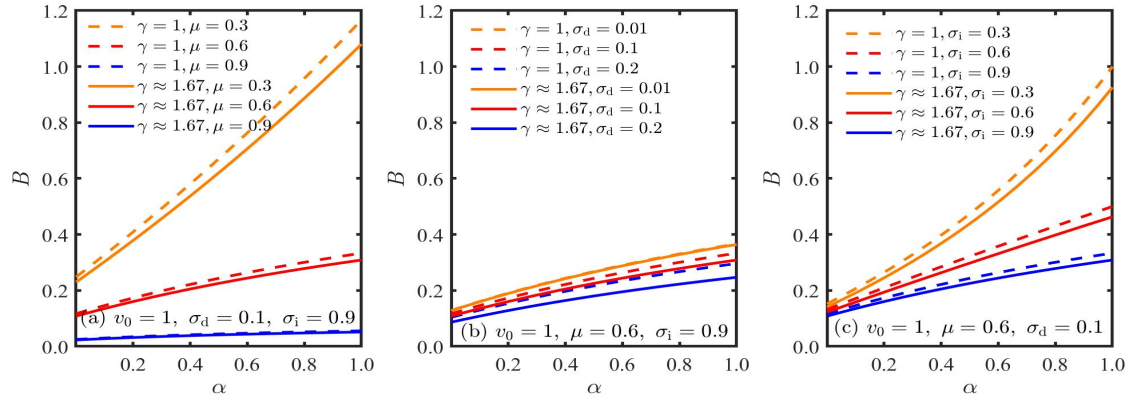


图 4 等离子体状态参数  $\mu$ 、 $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  对 KP 方程的色散系数  $B$  的影响

**Fig. 4. Variations of the dispersion coefficient  $B$  in KP equation with different parameters  $\mu$ ,  $\sigma_d$  and  $\sigma_i$ , respectively.**

相比之下, 若考察(2+1)维非线性尘埃声波的演化特征, 已有的理论研究结果表明<sup>[25]</sup>: 首先(2+1)维非线性波演化所服从的 KP 方程的非线性演化系数  $A$  和色散系数  $B$ , 均会随 nonthermal 离子数的增大而减少, 这显然与(3+1)维非线性尘埃声波的演化特征存在明显差异。其次, 非磁化热尘埃等离子体中尘埃颗粒、电子、离子的数密度、温度等状态参数对(2+1)和(3+1) 维非线性波色散效应的影响也各不相同。

#### 4. 小振幅非线性尘埃声波的动力学特征分析

假设 KP 方程(14)有如下形式的孤立波解:  $\phi_1 = \phi_1(\theta)$ ,  $\theta = k\zeta + l\eta + m\zeta - u_0\tau$ , 其中  $k$ ,  $l$ ,  $m$  分别为  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  方向的波数,  $u_0$  为波速。则(14)式可以变为:

$$m \frac{d}{d\theta} \left( -u_0 \frac{d\phi_1}{d\theta} + Am\phi_1 \frac{d\phi_1}{d\theta} + Bm^3 \frac{d^3\phi_1}{d\theta^3} \right) + C \left( k^2 \frac{d^2\phi_1}{d\theta^2} + l^2 \frac{d^2\phi_1}{d\theta^2} \right) = 0 \quad (15)$$

(15)式积分后可得

$$\frac{d^2\phi_1}{d\theta^2} = -\frac{C(k^2+l^2)-mu_0}{Bm^4}\phi_1 - \frac{A}{2Bm^2}\phi_1^2 \quad (16)$$

化为二维自治系统:

$$\begin{cases} \frac{d\phi_1}{d\theta} = \psi \\ \frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{C(k^2+l^2)-mu_0}{Bm^4}\phi_1 - \frac{A}{2Bm^2}\phi_1^2 \end{cases} \quad (17)$$

后续将采用数值模拟分析手段, 探讨多种不同的体系参数对非线性尘埃声波的动力学特性的作用效果。

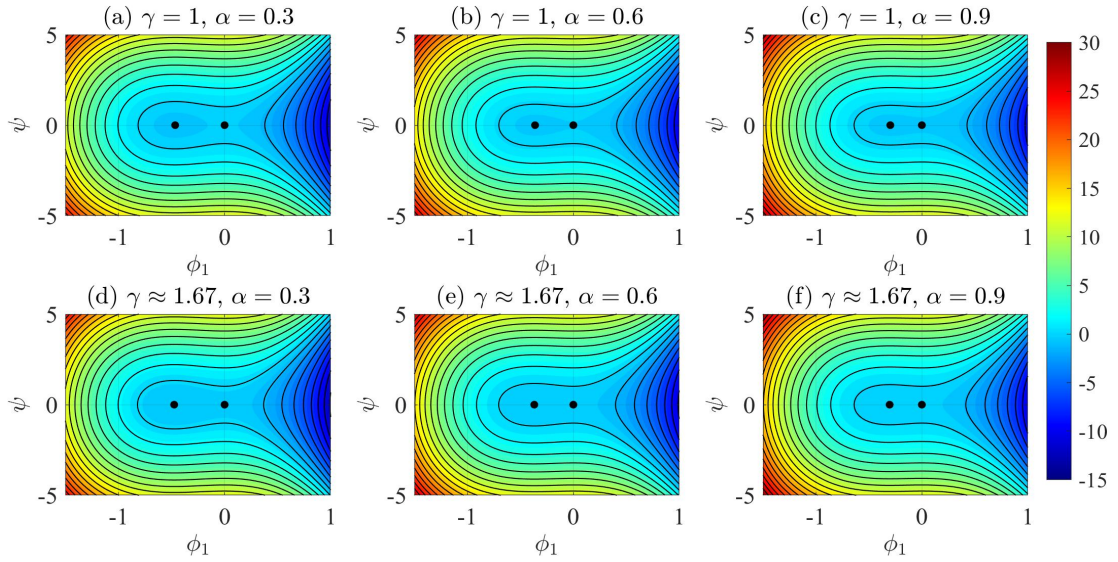


图 5 等温( $\gamma = 1$ )和绝热( $\gamma = 5/3$ )状态下, 系统相图随 nonthermal 离子数  $\alpha$  的演化图

**Fig. 5. Variations of the system phase diagram with different values of the nonthermal ion parameter  $\alpha$  under isothermal ( $\gamma = 1$ ) and adiabatic ( $\gamma = 5/3$ ) conditions, respectively.**

图 5 给出了含有 nonthermal 离子的非磁化热尘埃等离子体系统中, 二维相平面的相轨道结构随着 nonthermal 离子数  $\alpha$  变化的演化特征, 其中参数分别取值为  $\mu = 0.6$ ,  $m_d = 0.6$ ,  $\sigma_d = 0.1$ ,  $\sigma_i = 0.9$ 。从图 5(a)、(b)和(c)可以看出: 在  $\gamma = 1$  的等温状态下, 当 nonthermal 离子数  $\alpha$  分别为 0.3, 0.6, 0.9 时, 在非磁化热尘埃等离子体系统中, 相平面结构显示两个平衡点, 分别具有中心点和鞍点的动力学

特征；与此同时，在中心点附近分布有线性与非线性周期波轨道；另外，还出现了连接同一鞍点的同宿轨道结构<sup>[35]</sup>。这说明该等离子体系统中同时对应于三种轨道的三种解，即线性、非线性周期波解和钟形孤立波解。再者，图示进一步表明：随着 *nonthermal* 离子数的增加，系统相空间中的三类相轨道所对应的相空间区域会出现略微收缩的现象。图 5(d)、(e)和(f)则给出了  $\gamma = 5/3$  的绝热状况下，系统相轨道的类似特征及变化趋势。综上所述，*nonthermal* 离子数对非磁化热尘埃等离子体系统的三类相轨道在相空间中的存在区域的影响并不显著。

以上结论与已有的关于(2+1)维非线性尘埃声波的理论研究结果类似<sup>[25]</sup>，但其数值模拟结果所给定的鞍点位置及其属性存在明显差异。这也说明，(3+1)维非线性尘埃声波为典型的振幅小于零的稀疏型孤立波，而这与(2+1)维情形下“仅存在振幅大于零的压缩孤立波”的结论明显不同。

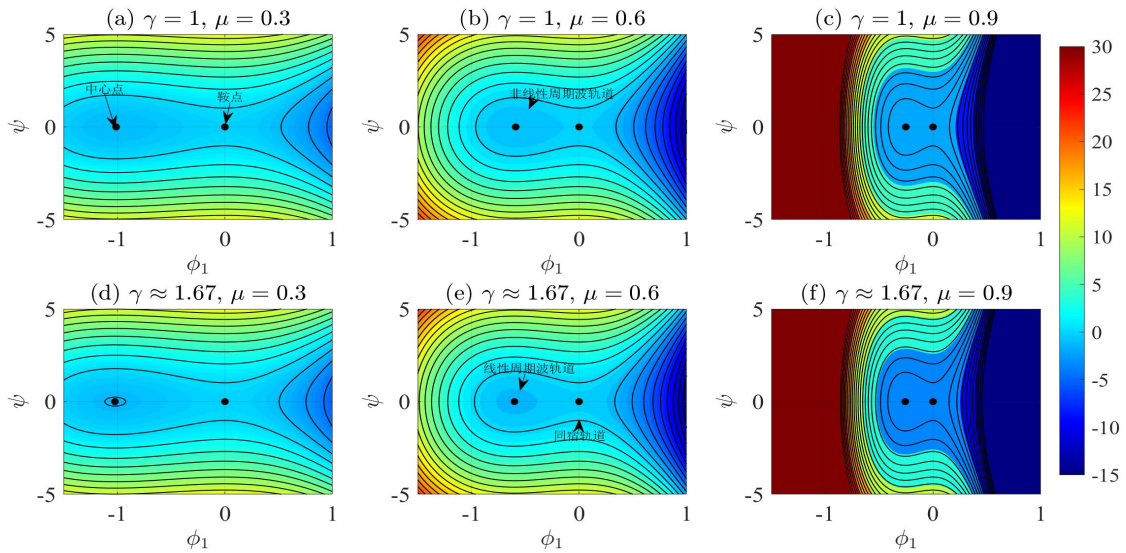


图 6 等温( $\gamma = 1$ )和绝热( $\gamma = 5/3$ )状态下，系统相图随参数  $\mu$  的演化规律

**Fig. 6. Variations of the system phase diagram with different values of  $\mu$  under isothermal ( $\gamma = 1$ ) and adiabatic ( $\gamma = 5/3$ ) conditions, respectively.**

图 6 揭示了相图随着平衡状态下的电子与离子数密度之比  $\mu$  的演化，其中  $\alpha = 0.1$ ， $m_d = 0.6$ ， $\sigma_d = 0.1$ ， $\sigma_1 = 0.9$ 。从图中不难看出：在  $\gamma = 1$  的等温状态和  $\gamma = 5/3$  的绝热状态下，尽管系统的状态参数  $\mu$  取值各不相同，但该体系内含一个中心点、一个鞍点及三类轨道的基本构型保持不变，其整体拓扑形态也未发生变

化。与之不同的是，三类轨道所存在的相空间区域会随系统参数 $\mu$ 的差异呈显著的收缩效应。这说明该系统中未扰动的电子和离子数密度的变化对非线性尘埃声波的波动模式影响较为显著。

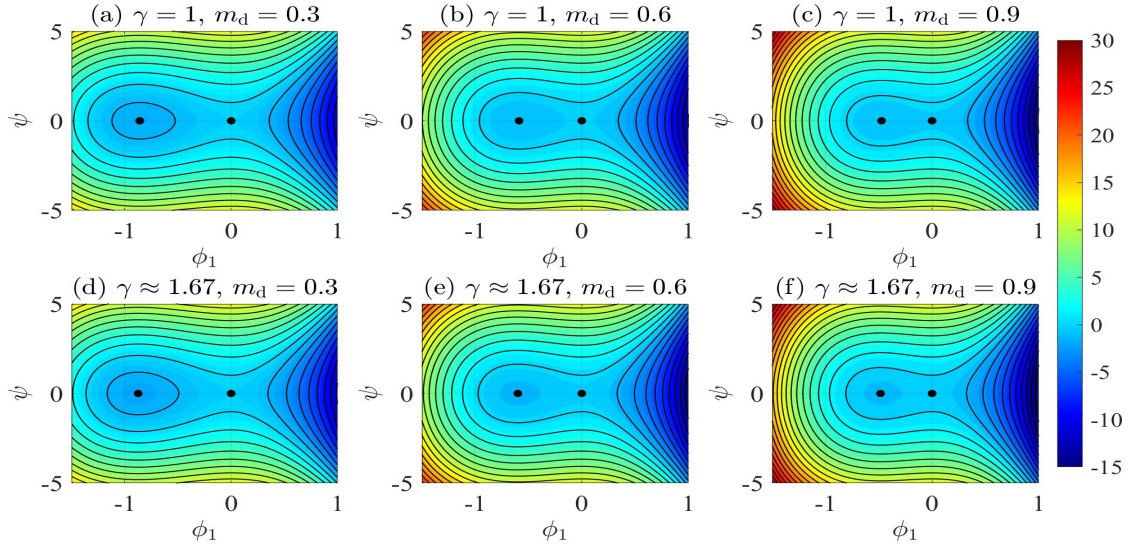


图 7 等温( $\gamma = 1$ )和绝热( $\gamma = 5/3$ )状态下，系统相图随尘埃颗粒质量  $m_d$  的演化规律

**Fig. 7. Variations of the system phase diagram with different values of the dust grain mass  $m_d$**

**under isothermal ( $\gamma = 1$ ) and adiabatic ( $\gamma = 5/3$ ) conditions, respectively.**

图 7 给出了二维自治系统的相图随着尘埃颗粒质量  $m_d$  的变化规律，其中  $\alpha = 0.1$ ,  $\mu = 0.6$ ,  $\sigma_d = 0.1$ ,  $\sigma_i = 0.9$ 。从图中可以看出在等温( $\gamma = 1$ )和绝热( $\gamma = 5/3$ )两种状态下，对于含有 nonthermal 离子的非磁化热尘埃等离子体体系而言，其内部的中心点、鞍点及围绕中心点的闭合轨道和连接鞍点的同宿轨道的存在状态，均会受到尘埃颗粒质量  $m_d$  的调控。这意味着较大的尘埃颗粒质量会削弱系统的非线性活动范围，使得孤波对应的相轨迹更容易被限制在较窄的区域内，从而影响孤波结构的宽度、振幅和稳定性。

图 8 给出了等离子体状态参数  $\alpha = 0.1$ ,  $\mu = 0.6$ ,  $m_d = 0.6$ ,  $\sigma_i = 0.9$  时，参数  $\sigma_d$  变化对二维自治系统相图的影响。图示显示：系统状态参数  $\sigma_d$  对绝热状态下系统相图的影响更为明显。考虑到  $\sigma_d = T_d/T_i$ ，结合图中的变化趋势可以确定，在包含 nonthermal 离子的非磁化热尘埃等离子体中，尘埃温度与离子温度之间的

比值对波动的周期解和孤波解均具有调控作用，这将使线性振荡、非线性周期波及孤立波在不同温度比下表现出一定的差别。

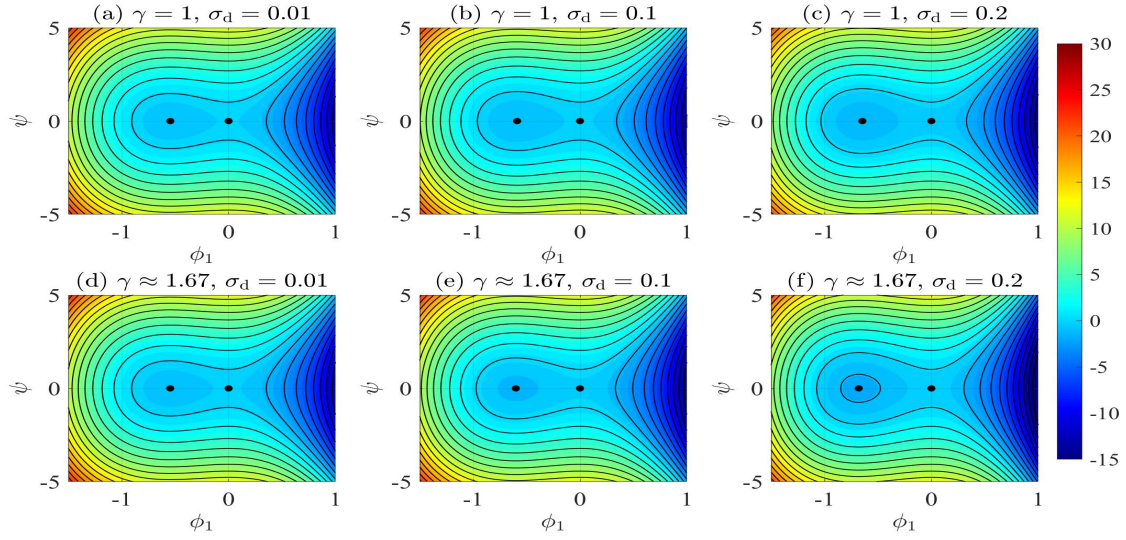


图 8 等温( $\gamma=1$ )和绝热( $\gamma=5/3$ )状态下，系统相图随参数 $\sigma_d$ 的演化规律

Fig. 8. Variations of the system phase diagram with different values of  $\sigma_d$  under

isothermal ( $\gamma=1$ ) and adiabatic ( $\gamma=5/3$ ) conditions, respectively.

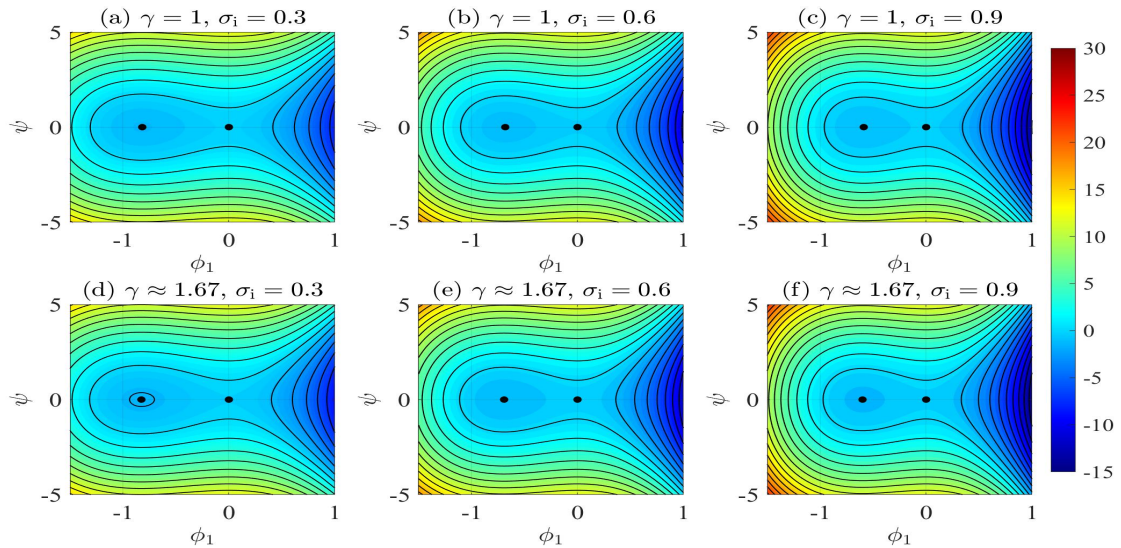


图 9 等温( $\gamma=1$ )和绝热( $\gamma=5/3$ )状态下，系统相图随参数 $\sigma_i$ 的演化规律

Fig. 9. Variations of the system phase diagram with different values of  $\sigma_i$  under

isothermal ( $\gamma=1$ ) and adiabatic ( $\gamma=5/3$ ) conditions, respectively.

图 9 给出了在等温和绝热两种状态下，参数 $\sigma_i$ 对二维自治系统相图的调控规律，其中 $\alpha=0.1$ ， $\mu=0.6$ ， $m_d=0.6$ ， $\sigma_d=0.1$ 。当 $\sigma_i$ 分别取值 0.3, 0.6, 0.9 时，

非磁化热尘埃等离子体体系中，中心点、鞍点及三类典型相轨道仍存在。进一步地，图中表明：线性、非线性周期波轨道以及同宿轨道所存在的相空间区域会因  $\sigma_i$  的逐步增大而呈现逐渐收缩的趋势。这说明离子和电子温度之比的不同对该系统的非线性尘埃声波的波动模式存在一定差异性的影响。

对(16)式积分一次，可得 Sagdeev 势方程：

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_1}{d\theta} \right)^2 + V(\phi_1) = 0 \quad (18)$$

其中 Sagdeev 势函数为如下形式：

$$V(\phi_1) = \frac{C(k^2 + l^2) - m\mu_0}{2Bm^4} \phi_1^2 + \frac{A}{6Bm^2} \phi_1^3 \quad (19)$$

接下来，探讨等离子体系统多种状态参数对 Sagdeev 势函数的调控效应。已有的研究成果指出<sup>[36]</sup>：当 Sagdeev 势函数满足  $\phi_1=0$  时， $V(\phi_1)=0$ ， $\frac{dV(\phi_1)}{d\phi_1}=0$  且

$\frac{d^2V(\phi_1)}{d\phi_1^2} < 0$  的条件，系统存在孤立波。利用数值模拟的方法，可获得如图 10 和

图 11 所示的，由电子、nonthermal 离子和尘埃颗粒所组成的非磁化热尘埃等离子体系统中，Sagdeev 势函数  $V(\phi_1)$  随多种状态参数的演化规律。

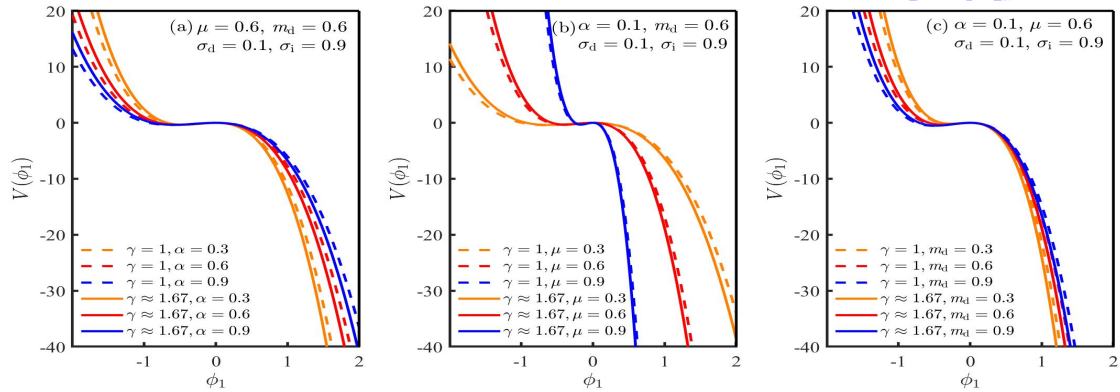


图 10 等温和绝热状态下，Sagdeev 势函数  $V(\phi_1)$  随  $\alpha$ ， $\mu$ ， $m_d$  的变化情况

Fig. 10. Variations of the Sagdeev potential  $V(\phi_1)$  under isothermal and adiabatic conditions with different parameters  $\alpha$ ,  $\mu$  and  $m_d$ , respectively.

图 10 的数值模拟结果显示：在等温和绝热状态下，尽管多种系统参数取值

各不相同，但 Sagdeev 势函数  $V(\phi_1)$  却始终存在两个零点，且  $\phi_1 = \phi_m (< 0)$ 、 $\phi_2 = 0$ 。而这恰好与图 5-7 中系统相图的两个平衡点对应，这表明该复杂等离子体体系内压缩型孤立波无法形成，而仅存在振幅  $\phi_m < 0$  小于零的稀疏型孤立波。与此同时，图示还表示：当 nonthermal 离子数  $\alpha$  增大时，系统的稀疏型孤立波的振幅  $\phi_m$  将增大；而当系统参数  $\mu$  逐渐增大时，稀疏型孤立波的振幅  $\phi_m$  将逐渐减小；随着另一系统参数  $m_d$  逐步增大，孤立波的振幅  $\phi_m$  又表现出随之呈现增加的变化特征。该结论与图 5-图 7 中二维自治系统相图的平衡点及同宿轨道特征分析规律相契合。

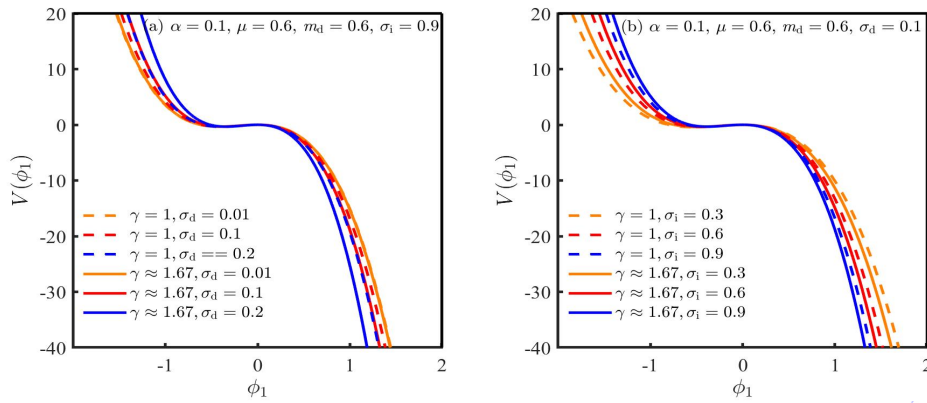


图 11 等温和绝热状态下 Sagdeev 势函数  $V(\phi_1)$  随  $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  变化情况

Fig. 11. Variations of the Sagdeev potential  $V(\phi_1)$  under isothermal and adiabatic conditions with different parameters  $\sigma_d$  and  $\sigma_i$ , respectively.

图 11 可以看出：在等温和绝热状态下，系统参数  $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  的取值变化，并未改变体系仅存在振幅为负的稀疏型孤立波这一特征；不仅如此，两参数  $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  取值增大时，还会使两种热力学状态下稀疏型孤立波的振幅  $\phi_m$  呈现逐步减小的态势，这一结论与图 8-图 9 中二维自治系统同宿轨道的相轨线分析规律相契合。综上所述，对于非磁化热尘埃等离子体体系而言，其内部的多种系统状态要素均对 Sagdeev 势函数及孤立波的波形具有显著的调控效应。

为了直观地了解(3+1)维非线性尘埃声孤波的振幅和宽度等传播特征，采用椭圆方程的一般理论对 Sagdeev 势方程(18)式进行解析求解，可以得到 KP 方程

的孤立波解如下<sup>[37,40]</sup>:

$$\phi_1 = \phi_m \operatorname{sech}^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$$

其中  $\phi_m = \frac{3(mu_0 - Ck^2 - Cl^2)}{Am^2}$  和  $\omega = 2m^2 \sqrt{\frac{B}{mu_0 - Ck^2 - Cl^2}}$  分别为孤立波的振幅和宽度的具体表达式。

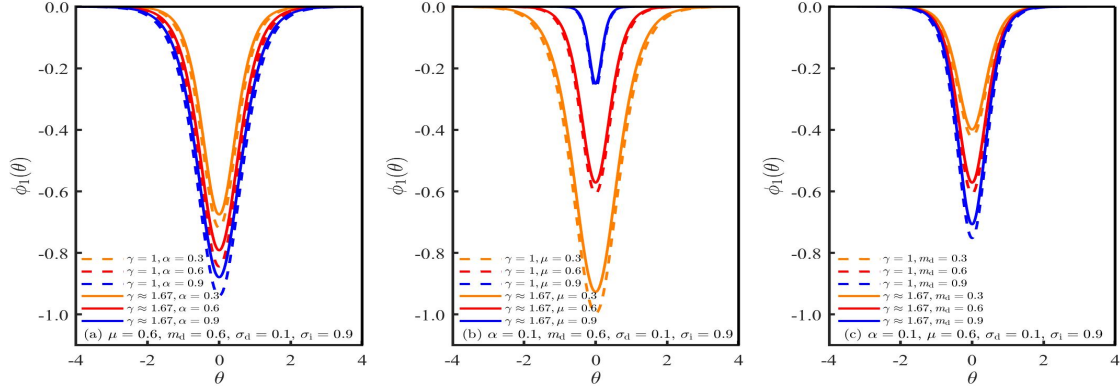


图 12 孤立波  $\phi_1(\theta)$  的波形随  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $m_d$  的变化情况

**Fig. 12. The waveform variations of solitary waves  $\phi_1(\theta)$  with different parameters  $\alpha$ ,  $\mu$  and  $m_d$ , respectively.**

图 12 给出非线性尘埃声孤波的波形随系统参数的变化趋势：在等温和绝热两种系统状态下，当参数  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $m_d$  取值各不相同，非磁化热尘埃等离子体系统中仅存在稀疏型孤立波，且其振幅恒小于零。进一步可以观察到，随着 nonthermal 离子数  $\alpha$  增大、参数  $\mu$  取值减小或尘埃颗粒质量  $m_d$  的增大，会驱动稀疏型孤立波振幅逐渐增大，同时使其宽度呈现逐渐收窄的变化趋势，以上结果与图 10 的结论具有一致性。

图 13 显示：在等温和绝热状态下，当状态参数  $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  变动时，并未改变系统仍然仅含振幅为负的稀疏型孤立波这一特征，而且当系统参数  $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  的改变会影响稀疏型孤立波的振幅和宽度的基本特征，其具体变化规律与图 8-图 9 中二维自治系统的相轨线分析结果，图 11 中 Sagdeev 势函数的研究结论均保持一致。据此可以得出结论：在等温状态和绝热状态下，含有 nonthermal 离子的非磁化热

尘埃等离子体中，诸如  $\alpha$ 、 $\mu$ 、 $m_d$ 、 $\sigma_d$  和  $\sigma_i$  等各类状态参数均会对(3+1)维非线性尘埃声孤波的振幅、宽度等波形传播特征具有不可忽视的调控作用。

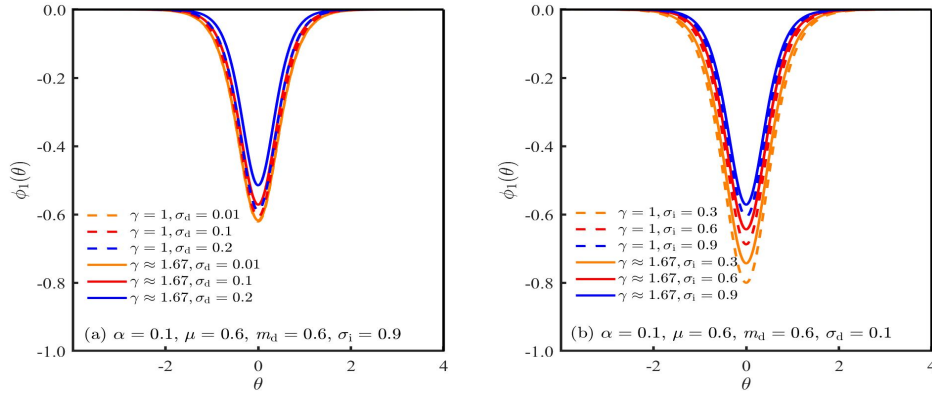


图 13 孤立波  $\phi_1(\theta)$  的波形随  $\sigma_d$ ， $\sigma_i$  的变化情况

Fig. 13. The waveform variations of solitary waves  $\phi_1(\theta)$  with different parameters  $\sigma_d$  and  $\sigma_i$ , respectively.

## 5. 结论

本文中探讨了非磁化热尘埃等离子体中(3+1)维非线性尘埃声孤波的传播特征，其中该系统由电子、nonthermal 离子和尘埃颗粒所构成。首先，推导并分析了尘埃声波的非线性色散关系；然后，利用约化摄动法推导，得到用来表征小振幅非线性尘埃声波运动演化过程的 KP 方程，并结合数值模拟分析结果讨论了非磁化热尘埃等离子体系统处于等温和绝热两种状态时，不同参数对 KP 方程的非线性系数和色散系数的影响；与此同时，关于二维自治系统动力学行为的研究结果显示：该等离子体系统中同时存在线性、非线性周期波解和钟形孤立波解。接下来，针对 Sagdeev 势函数的分析结果确定：在等温和绝热两种状态下，系统中仅存在振幅小于零的稀疏型孤立波，而压缩型孤立波无法形成。最后，进一步的详细讨论表明：诸如平衡态电子与离子数密度、nonthermal 离子含量、尘埃粒子质量以及离子与尘埃的温度等多个关键参数，都会显著影响系统中所存在的稀疏型尘埃声孤波的振幅、宽度及传播波形，其调控作用不可忽略。

## 参考文献

- [1] Rosenberg M, Kalman G 1997 *Phys. Rev. E* **56** 7166
- [2] Gill T S, Bains A S, Bedi C 2010 *Phys. Plasmas* **17** 013701
- [3] El-Taibany W F, El-Bedwehy N A, El-Shamy E F 2011 *Phys. Plasmas* **18** 033703
- [4] Sabry R, Moslem W M, Shukla P K 2009 *Phys. Plasmas* **16** 032302
- [5] Singh K, Kaur N, Saini N S 2017 *Phys. Plasmas* **24** 063703
- [6] Ghosh S, Bharuthram R, Khan M, Gupta M R 2004 *Phys. Plasmas* **11** 3602
- [7] El-Taibany W F, Wadati Miki, Sabry R 2007 *Phys. Plasmas* **14** 032304
- [8] Ghosh U N, Chatterjee P 2012 *Indian J. Phys.* **86** 407
- [9] Seadawy A R, Lu D 2016 *Results Phys.* **6** 590
- [10] Bhakta S, Ghosh U, Sarkar S 2017 *Phys. Plasmas* **24** 023704
- [11] Iqbal M, Seadawy A R, Lu D, Zhang Z D 2019 *Mod. Phys. Lett. B* **38** 2341016
- [12] El-Bedwehy N A, El-Taibany W F 2020 *Phys. Plasmas* **27** 012107
- [13] Bliokh P V, Yaroshenko V V 1985 *Sov. Astron.* **29** 330
- [14] Goertz C K 1989 *Rev. Geophys.* **27** 271
- [15] Alam N, Mannan A, Mamun A A 2023 *AIP Adv.* **13** 105104
- [16] Shahzad M A, Aman-ur-Rehman, Ahmad M, Sarfraz M, Bilal M, Mahmood S  
2024 *Phys. Lett. A* **502** 129397
- [17] Rao N N, Shukla P K, Yu M Y 1990 *Planet. Space Sci.* **38** 543
- [18] Barkan A, Merlino R L, Angelo D N 1995 *Phys. Plasmas* **2** 3563
- [19] Xie B S, He K F, Huang Z Q 1999 *Phys. Plasmas* **6** 3808
- [20] Schamel H 1986 *Phys. Rep.* **140** 161
- [21] Gao D N, Zhen X J, Lin S M, Zhao L 2025 *Phys. Plasmas* **32** 112113
- [22] Lin M M, Song C G, Wang M Y, Chen F Y 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 075201 ([in Chinese](#)) [林麦麦, 宋晨光, 王明月, 陈富艳 2024 *物理学报* **73** 075201]
- [23] Bezbaruah T, Karmakar P K 2024 *Chin. J. Phys.* **89** 1611
- [24] Naeem S N, Qamar A, Rahman A, Albalawi W 2023 *Z. Naturforsch. A* **78** 1081
- [25] Lin M M, Fu Y J, Song Q Y, Yu T X, Wen H S, Jiang L 2022 *Acta Phys. Sin.* **71**  
095203 ([in Chinese](#)) [林麦麦, 付颖捷, 宋秋影, 于腾萱, 文惠珊, 蒋蕾 2022

- [26] Singh K, Kakad A, Kakad B, Kourakis I 2022 *Astron. Astrophys.* **666** A37
- [27] Dubinov A E, Kitayev I N 2023 *High Temp.* **61** 11
- [28] Gogoi P, Chutia B, Sut P, Bailung Y, Adhikary N C, Bailung H 2024 *Phys. Plasmas* **31** 023706
- [29] Mamun A A, Cairns R A, Shukla P K 1996 *Phys. Plasmas* **3** 2610
- [30] Cairns R A, Mamun A A, Bingham R, Bostrom R, Dendy R O, Nairn C M C, Shukla P K 1995 *Geophys. Res. Lett.* **22** 2709
- [31] Mamuna A A, Russell S M, Cesar A, Mendoza-Briceño C A, Alamb M N, Datta T K, Das A K 2000 *Planet. Space Sci.* **48** 163
- [32] Kalita B C, Kalita R, Das S 2024 *Astrophysics* **67** 80
- [33] Baluku T K, Hellberg M A, Kourakis I, Saini N S 2010 *Phys. Plasmas* **17** 053702
- [34] Sahu B, Tribeche M 2012 *Astrophys. Space Sci.* **338** 259
- [35] Saha A, Tamang J 2018 *Adv. Space. Res.* **63** 1596
- [36] Pakzad H R, Tribeche M 2012 *J. Fusion Energy* **31** 611
- [37] Kadomtsev B B, Petviashvili V I 1970 *Sov. Phys. Dokl.* **15** 539
- [38] Singh K, Sethi P, Saini N S 2018 *Phys. Plasmas* **25** 033705
- [39] Mir A, Bandyopadhyay P, Choudhury M, Kumar K, Sen A 2025 *Phys. Rev. E* **111** 065201
- [40] Arshad M, Seadawy A R, Tanveer M, Yasin F 2023 *Fractal Fract.* **7** 691

# The Propagating Characteristics of (3+1)-Dimensional Dust Acoustic Waves

## in an Unmagnetized Warm Dusty Plasma

Lin Mai-mai<sup>†</sup> Wang Ya-ping Chen Fu-yan Cui hai-bo

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University,  
Lanzhou Gansu 730070, China)

**Abstract:** Based on the magnetohydrodynamics (MHD) theory, the propagating characters of (3+1)-dimensional nonlinear dust acoustic waves (DAW) have been studied in an unmagnetized warm dusty plasma which containing with the dust particles, electrons, and nonthermal distributed ions respectively. Firstly, the dynamic evolution of (3+1)-dimensional nonlinear DAW has been investigated with the dispersion relation, the Kadomtsev–Petviashvili (KP) equation and the Sagdeev potential function by the help of the linearized method, the reductive perturbation method and the Sagdeev potential technique, respectively. Secondly, the numerical simulations have been performed to research the effects of various system parameters on the nonlinear dispersion relation, the KP equation, the phase-space structures, the Sagdeev potential profiles, and the dust acoustic solitary waves for the isothermal ( $\gamma = 1$ ) and adiabatic ( $\gamma = 5/3$ ) conditions, respectively. Finally, the results can be concluded that the propagating properties of the nonlinear rarefactive dust acoustic solitary wave can be influenced by the various system parameters. Moreover, the frequency, the amplitude, the width and the waveform of DAW have been effected by the nonthermal ions, the partial's temperature in an unmagnetized warm dusty plasma under the isothermal and adiabatic states, respectively.

**Keywords:** unmagnetized warm dusty plasma, (3+1)-dimensional nonlinear dust acoustic waves, linearized method, reductive perturbation method, Sagdeev potential method

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: linmimai1514@126.com