

专题: 超冷原子分子物理

## 船载量子-经典混合加速度计的数值模拟\*

李轲<sup>1)</sup> 董保云<sup>1)†</sup> 盛佳<sup>1)</sup> 张炯阳<sup>3)</sup> 肖玉华<sup>3)</sup> 汪涛<sup>1)2)‡</sup> 张学锋<sup>1)††</sup>

1) (重庆大学物理学院, 重庆市强耦合微观物理重点实验室, 重庆 401331)

2) (重庆大学溧阳智慧城市研究院现代物理中心, 溧阳 213300)

3) (兰州空间技术物理研究所真空科学技术与物理实验室, 兰州 730000)

(2026年1月21日收到; 2026年3月8日收到修改稿)

加速度计的精度、稳定性和带宽对惯性导航、运动控制等至关重要。实验表明利用卡尔曼滤波算法将石英挠性加速度计与冷原子干涉仪相融合, 可以提高加速度测量的准确性。我们利用马尔可夫过程的蒙特卡洛算法精确仿真了船载情形下的两种加速度计, 准确复现传感器自噪声与环境振动噪声。新的振动补偿方案极大的稳定了原子干涉仪的输出。本文基于优化卡尔曼滤波算法实时监测原子干涉仪输出, 模拟结果表明极端恶劣环境下混合加速度计仍然能够实现稳定、精确且高带宽的测量输出。另外, 噪声的系统分析显示石英挠性加速度计 91.62% 的测量误差能够被消除, 与此同时, 低通滤波在一定程度上缓解了振动噪声带来的测量误差。最后, 船舶发生碰撞的场景模拟验证了极端工况下混合加速度计的稳定性。

**关键词:** 混合加速度计, 冷原子干涉仪, 卡尔曼滤波, 惯性导航**DOI:** 10.7498/aps.75.20260109**CSTR:** 32037.14.aps.75.20260109

## 1 引言

得益于冷原子干涉仪, 绝对重力精密测量技术在过去数十年间取得了突破性进展。在实验室环境下, 原子重力仪已展现出卓越性能, 其测量精度可达微伽 ( $\mu\text{Gal}$ ,  $1\text{Gal} = 10^{-2}\text{m/s}^2$ ) 量级, 灵敏度、稳定性及环境适应性均不断被提升<sup>[1-4]</sup>。随着仪器小型化与鲁棒性增强, 原子干涉仪已逐步应用于复杂环境中的绝对重力测量<sup>[5-7]</sup>。在动态测量领域, 原子干涉仪面临振动噪声、载体运动等严峻挑战, 但通过创新性的系统设计与信号处理算法, 已成功实现多种移动平台上的应用<sup>[8,9]</sup>。在航海场景中, 文献<sup>[10,11]</sup>通过搭载于船舶的冷原子重力仪与经典

加速度计结合, 利用扩展卡尔曼、粒子群优化等振动补偿算法实现了在复杂海况下的绝对重力测量, 精度可达亚毫伽 (mGal) 水平, 为海洋重力测绘、资源勘探及水下导航提供了全新手段。航空航天方面, 原子干涉仪集成于机载平台和人造卫星等的研究也在进行, 通过组合协议与高动态跟踪算法, 可实现空中绝对重力或加速度测量, 进一步拓展了其在快速移动载体中的应用潜力<sup>[12-14]</sup>。对于加速度近似恒定的场景, 原子干涉仪表现出了卓越的性能, 而复杂动态环境下则会出现干涉条纹紊乱的问题且对中高频振动无响应。

加速度的精确测量是惯性导航、运动控制、姿态稳定及精密仪器领域的核心基础。为满足不同层级的应用需求, 加速度计技术已发展出原理迥异、

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12274045、12347101), 量子光学与光量子器件国家重点实验室项目 (批准号: KF202211), 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2011AA06Z000), 国家自然科学基金联合基金项目 (批准号: U2341247), 甘肃省重大科技专项计划 (批准号: 24ZDGA004), 以及中国航天科技集团有限公司钱学森青年创新基金。

† 通信作者。E-mail: 20222701004@stu.cqu.edu.cn

‡ 通信作者。E-mail: tauwaang@cqu.edu.cn

†† 通信作者。E-mail: zhangxf@cqu.edu.cn

性能各异的多种技术路线<sup>[15,16]</sup>. 传统高性能加速度计主要包括伺服摆式加速度计和摆式积分陀螺加速度计. 其中, 石英挠性加速度计作为一种经典的伺服摆式加速度计, 因其结构相对简单、精度高、可靠性好的特点, 已成为中高精度惯性系统的首选方案之一, 广泛应用于各类导弹、卫星、飞机及舰船的导航与制导系统<sup>[17-19]</sup>. 然而其标度因数和零偏的不稳定性受多种复杂因素影响且难以精确建模, 制约了性能的进一步提升. 另外, 振动梁加速度计、微机电系统加速度计、静电悬浮加速度计等虽然测量精度高, 但目前技术不够成熟<sup>[20-22]</sup>.

长航时恶劣动态环境下, 通过将量子传感器与经典器件深度融合, 并采用卡尔曼滤波、贝叶斯等最优估计方法, 可构建出兼具高带宽与长期稳定性的混合惯性导航测量单元<sup>[23,24]</sup>. 这不仅能有效抑制经典传感器的零偏漂移, 还能在动态环境下实现连续、高精度的加速度与角速度测量. 文献<sup>[25]</sup>在实验室条件下首次实现了原子干涉仪与石英挠性加速度计的混合, 灵敏度可达  $3.1\text{mGal}/\sqrt{\text{Hz}}$  且连续运行 36 小时没有出现长期不稳定的迹象. 然而许多惯性导航应用场景的振动噪声可达数伽 (Gal) 且经典加速度计的标度因数同时受到负载的影响, 利用加热诱导的温度波动和小型扬声器产生的振动噪声远小于实际舰载环境的噪声水平.

与基于态密度的全过程原子干涉仪仿真<sup>[26]</sup>不同, 本文利用马尔可夫链蒙特卡洛算法同时模拟了两种加速度计的主要测量过程, 其中物质波的演化通过龙格-库塔法精确实现, 并以船舶惯性导航为需求, 提出新振动噪声补偿方案和优化卡尔曼滤波算法来实现高稳定性、高带宽、高精度的混合加速度计. 其中, 石英挠性加速度计标度因数退化、零偏漂移以及电路白噪声得到深度还原, 海洋船舶振动噪声被精确提取并输入到仿真过程中. 此外, 通过激光相位调制保证了原子干涉仪每次测量都在 Fisher 信息最大位置附近, 从而实现物质波相位差对加速度的最佳响应. 最后, 模拟了高强度冲击作用于混合加速度计的场景, 通过实时监测卡尔曼滤波器的输出验证了此系统的鲁棒性.

## 2 两种加速度计的精确仿真

采用原子干涉仪的重力测量是目前精度最高、稳定性最好的方案之一, 将其运用于动态环境下加

速度的高精度测量是未来的一个重要方向. 但是, 测量频率较小 (每秒测量 6 次左右) 和复杂动态环境干涉条纹紊乱是限制其运用到加速度测量领域的主要原因. 石英挠性加速度计是传统加速度测量的典型代表, 它被广泛用于航空器、船舶、汽车以及自然灾害监测等. 而对于许多连续运行时间长达数月甚至一两年的特殊工况, 机械漂移问题使其难以实现加速度的高精度测量. 长期以来, 许多针对石英挠性加速度计机械漂移的数学模型被提出, 然而此问题是由自身机械部件材料和工艺、电子元器件性能和工作环境等复杂因素共同导致, 因此这些方法都难以准确消除漂移. 本节将回顾两种加速度计的工作原理和数学模型, 然后利用计算机对其进行仿真与分析, 以此复现出它们在加速度测量过程中面临的挑战.

两种传感器的仿真主要涉及到马尔科夫链蒙特卡洛算法和龙格-库塔法. 以振动噪声蒙特卡洛抽样为例, 根据噪声功率谱密度  $P(\nu)$  把频率轴  $\nu$  等间距  $\Delta\nu$  离散化为  $N$  点  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots, \nu_N$ , 且对应峰值为  $A_n = \sqrt{2P(\nu_n)\Delta\nu}$ , 每个特征频率从均匀分布中独立抽取相位  $\phi_{\text{vib}}^{(n)}$ . 为了高效且精细的获取复杂形式振动, 需要按照其功率谱密度做重要性抽样. 最后做逆傅里叶变换和插值得到几乎连续的时域振动噪声. 原子干涉仪的物质波内外态演化本质上都是解微分方程组, 本文采用四阶龙格-库塔法从数值上求解. 该方法的核心是在一个步长范围内 ( $h = t_{n+1} - t_n$ ) 选取四点计算斜率 ( $K_1 = f(t_n, \psi_n)$ ,  $K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, \psi_n + \frac{h}{2}K_1)$ ,  $K_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, \psi_n + \frac{h}{2}K_2)$ ,  $K_4 = f(t_n + h, \psi_n + hK_3)$ ) 且加权平均, 然后计算函数值  $\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ , 其中  $f$  是含时哈密顿量相关的函数或原子团动量、位置相关的函数,  $t_n$  是离散化的时间,  $\psi_n$  是波函数或动量、位置构成的矢量.

### 2.1 原子干涉仪

原子干涉仪又可称为原子加速度计, 其基本原理与光的 Mach-Zehnder(MZ) 干涉相似, 是两束由双光子拉曼跃迁控制的“ $\lambda$ 型”的三能级原子系综构成的物质波发生干涉, 并将加速度信息编码到原子的干涉条纹中. 双光子跃迁过程中, 当中间态与拉曼光的失谐  $\Delta$  远远大于整体失谐  $\delta$  时, 原子占

据在中间态的概率几乎为零, 因此, 消除中间能级后系统可近似为二能级形式. 原子内态发生跃迁时碰撞导致外态 (动量) 会相应的改变, 即基态  $|g, \mathbf{p}_g\rangle$  与激发态  $|e, \mathbf{p}_e\rangle$  之间动量差为  $\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_g = \hbar \mathbf{k}_{\text{eff}}$ , 其中  $g, e$  分别表示原子的内基态和内激发态,  $\hbar$  是普朗克常数,  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  为两束拉曼光的等效波矢, 另外其有效角频率和复合初始相位分别记作  $\omega_{\text{eff}}, \phi$ . 因此系统基矢为  $(|g, \mathbf{p}_g(t)\rangle |e, \mathbf{p}_e(t)\rangle)'$ , 其中的“'”表示求矩阵的转置, 动量在非惯性系统中是时间的函数. 原子干涉仪的理想工作时段: 首先给制备在基态  $\psi(0) = (1 \ 0)'$  的冷原子团打持续时间为  $\tau$  的  $\pi/2$  脉冲的有效拉曼光, 使其被均分为两束物质波  $\psi^A(\tau) = (\psi_1(\tau) \ 0)'$ ,  $\psi^B(\tau) = (0 \ \psi_2(\tau))'$ ,  $\psi_1(\tau)$  和  $\psi_2(\tau)$  分别表示  $\psi(\tau)$  在对应基矢上的概率幅; 在加速度等效场中的自由演化时间  $T$  内, 它们之间因为初始动量不同而在空间中被分离, 紧接着  $\pi$  脉冲的激光几乎同时的作用于两束物质波而使其内外态同时发生翻转; 再经过  $T$  时间的自由演化后施加  $\pi/2$  脉冲使两束物质波发生干涉. 利用费曼路径积分和拉比震荡可得两束物质波的相位差为

$$\Phi = -\mathbf{k}_{\text{eff}} \mathbf{a} T^2 - \phi_1 + 2\phi_2 - \phi_3 \quad (1)$$

其中  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  分别是三次激光脉冲的初始相位, 得益于激光锁相技术, 这些初始相位能够被精准调控. 由此可知, 加速度  $\mathbf{a}$  的测量问题被转换为两束物质波的相位差的探测. 实验上需要通过测量原子处于激发态的概率来获得物质波相位信息

$$\begin{aligned} P_e &= |\psi_2^A(2T+4\tau) + \psi_2^B(2T+4\tau)|^2 \\ &= \frac{N_1}{N_1 + N_2} = P_0 - \frac{1}{2} C \cos \Phi \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $N_1, N_2$  是内态占据在  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  的原子数,  $P_0$  与  $C$  分别是原子干涉条纹的幅值偏移和对比度. 理想情况下  $P_0 = 1/2$ ,  $C = 1$ , 而实际上原子的制备和测量效率, 背景磁场梯度等都会造成系统误差, 而导致  $P_0$  偏移理想情况, 另外对比度则会受到原子团的速度、速度分布, 激光强度和频率噪声以及振动噪声等多种因素影响. 相比于绝对重力测量, 原子干涉仪监测复杂环境下的加速度变化则面临许多挑战, 比如说干涉条纹紊乱.

计算机模拟原子干涉仪的核心是实现含噪声的两条路径的物质波演化以及它们与拉曼光的相互作用. 忽略原子之间的相互作用, 拉曼光与原子

团的相互作用由经典拉比模型描述, 相互作用绘景下, 旋转波近似后系统的有效哈密顿量为

$$H_I = \frac{1}{2} \hbar \Omega_{\text{eff}} \begin{bmatrix} 0 & e^{i(\delta t + \mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{r} + \phi)} \\ e^{-i(\delta t + \mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{r} + \phi)} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中  $\Omega_{\text{eff}}$  是有效拉比频率, 总失谐  $\delta = \delta - \omega_R - \omega_D - \omega_{\text{AC}}$ ,  $\delta = (\omega_e - \omega_g) - \omega_{\text{eff}}$  是静态条件下原子与光的失谐,  $\omega_R = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\text{eff}}^2}{2m}$  代表的是光子反冲频移,  $\omega_D = \frac{\hbar \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_{\text{eff}}}{m}$  则是多普勒效应导致的能级移动, 而  $\omega_{\text{AC}}$  是交流斯塔克效应导致的频率移动. 铷原子干涉仪中  $\tau = 3 \times 10^{-6} \text{s}$ , 所以此过程可以忽略原子外态和空间位置  $\mathbf{r}$  在加速度场中的变化, 可得系统的演化方程为

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = H_I \psi(t), & 0 \leq t < \tau \\ i\hbar \frac{d}{dt} \psi^A(t) = H_I \psi^A(t), & (T + \tau) \leq t < (T + 3\tau) \\ \text{or } (2T + 3\tau) \leq t < (2T + 4\tau) \\ i\hbar \frac{d}{dt} \psi^B(t) = H_I \psi^B(t), & (T + \tau) \leq t < (T + 3\tau) \\ \text{or } (2T + 3\tau) \leq t < (2T + 4\tau) \end{cases} \quad (4)$$

其中, 第一次拉曼光作用于原子团后波函数  $\psi(\tau)$  被分束为  $\psi^A(\tau)$  和  $\psi^B(\tau)$ , 此后, 在加速度有效场中的自由演化会出现空间分离. 两次  $T$  时间内, 其外态和空间位置演化均满足经典牛顿力学方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = m \mathbf{a}, & \tau \leq t < (T + \tau) \\ \text{or } (T + 3\tau) \leq t < (2T + 3\tau) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{p}(t)/m, & \tau \leq t < (T + \tau) \\ \text{or } (T + 3\tau) \leq t < (2T + 3\tau) \end{cases} \quad (5)$$

式中  $m$  是单个原子质量.

计算机仿真中首先需要根据系统温度和态制备过程按照高斯分布抽样出原子团的速度和位置. 在测量加速度过程中, 我们利用龙格-库塔法在不同阶段内按照微分方程组式 (4) 或式 (5) 演化物质波函数. 为了还原真实的环境振动噪声, 不同应用场景的时域噪声信号  $\mathbf{a}_{\text{vib}}(t)$  通过其功率谱密度被还原出来, 再加入到模拟中, 即原子干涉仪感受到的加速度信号  $\mathbf{a}_{\text{tol}}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{a}_{\text{vib}}(t)$ . 另外, 还考虑了高斯型的激光相位噪声, 即初始相位分别变为  $\{\phi_1, \phi_2,$

$\phi_3\} \rightarrow \{\phi_1 + \sigma_1, \phi_2 + \sigma_2, \phi_3 + \sigma_3\}$  且  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  服从相同的分布. 而激光的频率和啁啾噪声一定程度上可由相位噪声替代, 因为混合加速度计避免了常规的扫谱. 其它次要噪声, 如背景磁场等没有纳入模拟中.

## 2.2 石英挠性加速度计漂移模型

高精度的 QFA 在许多科学工程领域中扮演至关重要的角色, 尤其是惯性导航系统中. 但是, 它测量的相对加速度受到自身零偏与标度因素的影响. 对于不同的工作或存储环境, 即使是相同工艺、材料生产的同一型号的石英挠性加速度计, 相关参数也会随时间而出现不同形式的复杂漂移, 因此, 实际值偏离出厂标定值会严重影响测量精度. 无论是数字电路, 还是模拟电路, 石英挠性加速度计输出的电压 (电流) 信号  $A$  与加速度的关系为<sup>[27]</sup>

$$A = S(t)\mathbf{a}_{\text{tol}}(t) + B(t), \quad (6)$$

其中  $S(t)$  为标度因子, 它的时间稳定性主要受各结构部件在不同温度下发生机理退化影响<sup>[27]</sup>, 基于高精度的 Titan 加速度计 (强震计) 建模如下

$$S(t) = S(0) \cdot (1 + bt^a) \quad (7)$$

式中  $t$  是退化时间,  $a$  是修正常数, 变化率  $b$  是环境温度的函数, 根据 Arrhenius 加速度模型可得

$$b = \exp(-c_1 - c_2/T_e) \quad (8)$$

式中  $c_1, c_2$  是两个待定常数,  $T_e$  是开尔文温度. 标度因子受外磁场的影响较小, 因此忽略不计. 另外, 式 (6) 中的  $B(t)$  是与机械部件老化、形变等相关的零偏, 统计结果表明, 在小时间尺度内其呈单向线性增长

$$B(t) = B(0) + c_3t \quad (9)$$

$c_3$  是线性漂移的系数. 实际应用中, 零偏值很容易被测量, 所以其建模精确程度要求不高. 需要强调的是, 标度因数和零偏都受到白噪声的影响. 激励与反馈电路噪声和标定过程中的误差虽然不造成作为“比例系数”的标度因数的“漂移”, 而是导致其短期不稳定性和标定不确定性. 零偏的白噪声来源主要是检测电路噪声、机械热噪声和电磁干扰等, 并且直接决定了加速度计的速度随机游走系数, 是惯性导航系统中短期速度误差的关键因素. 根据上述模型, 我们将按照 Titan 加速度计性能提取相关参数进行数值模拟.

## 3 混合加速度计

不管是原子干涉仪还是石英挠性加速度计作为传感器, 它们都具有独特的优势, 也有明显的缺陷. 利用数据融合算法将两种数据进行综合处理, 则能生成更可靠、更准确、更稳定的状态估计值, 理论上消除石英挠性加速度计的标度因数不稳定性和零偏漂移, 扩展原子干涉仪测量带宽, 避免复杂动态环境下的测量失效. 本节将介绍基于卡尔曼滤波的数据融合算法, 并讨论其算法实现和传感器噪声的蒙特卡洛抽样.

### 3.1 扩展卡尔曼滤波算法

卡尔曼滤波由 Rudolf E. Kálmán 于 1960 年提出, 并非传统意义上的“滤波器”, 而是一种最优递归数据处理算法. 在线性系统且过程噪声均为高斯白噪声假设下, 它提供了状态变量的最小方差无偏估计, 同时也是在最大似然和贝叶斯后验概率意义下的最优估计. 作为一个递归的贝叶斯滤波器, 其状态空间表示及其对应的过程矩阵具有极强的通用性, 可快速处理多变量的复杂系统. 状态向量  $\mathbf{x}$  随离散化时间的线性演化过程可写为

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_i\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{w}_i \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}). \quad (10)$$

其中下标表示递归更新的步数, 这表明第  $i$  步的状态向量由对应的转移矩阵  $\mathbf{F}_i$ , 上一时刻状态向量  $\mathbf{x}_i$  以及过程噪声  $\mathbf{w}_i$  决定. 通常, 传感器获取的观测量  $z_i$  不是状态向量本身, 而是存在某种函数关系, 离散时间下可表示为:

$$z_i = \mathbf{H}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_i \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}). \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{H}_i$  是观测矩阵,  $\mathbf{v}_i$  是测量噪声,  $\mathbf{Q}$  与  $\mathbf{R}$  分别为过程噪声和测量噪声的协方差矩阵. 给定初始状态向量  $\mathbf{x}_0$  及误差协方差矩阵  $\mathbf{P}_0$ , 卡尔曼滤波的完整迭代流程如表 1 所示.

表 1 卡尔曼滤波的主要方程  
Table 1. The key equations of the Kalman Filter.

步骤	方程
状态预测	$\hat{\mathbf{x}}_i^- = \mathbf{F}_i\hat{\mathbf{x}}_{i-1}^+$
协方差预测	$\mathbf{P}_i^- = \mathbf{F}_i\mathbf{P}_{i-1}^+\mathbf{F}_i^T + \mathbf{Q}$
卡尔曼增益矩阵	$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i^-\mathbf{H}_i^T(\mathbf{H}_i\mathbf{P}_i^-\mathbf{H}_i^T + \mathbf{R})^{-1}$
状态估计	$\hat{\mathbf{x}}_i^+ = \hat{\mathbf{x}}_i^- + \mathbf{K}_i(z_i - \mathbf{H}_i\hat{\mathbf{x}}_i^-)$
协方差更新	$\mathbf{P}_i^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i\mathbf{H}_i)\mathbf{P}_i^-$

对于非线性系统, 则可以通过局域线性化将其近似为线性系统, 具体做法是把观测量  $z_i(x)$  在  $x_i$  附近做泰勒展开后保留到一阶, 对应的雅可比矩阵为  $H_i = \nabla_x z(x)|_{x_i}$ , 这就是扩展卡尔曼滤波. 需要注意的是如果系统高度非线性, 或初始估计误差很大, 线性化近似会非常差, 导致估计误差协方差矩阵  $P$  失去正定性, 滤波器完全失效.

### 3.2 加速度计的数据融合

原子干涉仪测量绝对重力时性能优异, 但是需要通过几次甚至数十次测量来拟合谱线, 对于动态环境下加速度的测量这是致命缺陷. 石英挠性加速度计响应带宽高, 但是长时间复杂工况下稳定性退化严重, 测量精度下降明显. 基于扩展卡尔曼滤波的数据融合算法能够消除加速度剧烈变化时原子干涉仪的错误输出, 实时追踪并修正石英挠性角速度计的标度因数和零偏不稳定导致的测量误差.

接下来将详细介绍相关的硬件和算法实现. 在实际运行过程中, 石英挠性加速度计在原子干涉仪的一个工作周期内 (除去态制备时间) 测量到的离散加速度序列为  $\{a_q(t_i), t_i \in [t_0, t_0 + 2T + 4\tau]\}$ ,  $t_0$  是原子干涉仪开始打第一束  $\pi/2$  脉冲的时刻, 此结果包含了真实加速度值、环境振动噪声以及本底噪声. 许多实验表明基于灵敏度函数的方案能把振动噪声对原子干涉仪的大部分影响补偿了. 实际上振动噪声对原子干涉仪的影响主要是三次激光脉冲光程的误差, 并由此计算补偿相位的大小, 与文献 [28] 类似, 精确调控最后一次  $\pi/2$  拉曼光脉冲的初始相位为

$$\phi_3 = -k_{\text{eff}} \left( 2 \int_0^T \int_0^{t_1} a_q(t_2) dt_2 dt_1 - \int_0^{2T} \int_0^{t_1} a_q(t_2) dt_2 dt_1 \right) - \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

如此石英挠性加速度计的测量结果被编码进了物质波, 真实加速度值和振动噪声贡献的相位差几乎被补偿, 原子激发率就只与石英挠性加速度计本底噪声相关. 在秒级时间范围内石英挠性加速度计参数变化是小量, 其本底噪声对原子干涉仪相位差的贡献远小于激光光程差. 如果  $\phi_1, \phi_2$  都设置为 0, 由式 (1) 可知人为调制的形如式 (12) 的  $\phi_3$  使得每次  $P_e$  的测量结果都在 0.5 附近, 对应于余弦函数线性度最好的位置, 因此实现了石英挠性加速度

计本底噪声的最佳响应.

作为一种参数追踪算法, 扩展卡尔曼滤波算法通过原子干涉仪中激发率  $P_e$  的测量就能实时追踪式 (2) 的所有参数. 本文选取以下参数作为卡尔曼滤波器的状态向量:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中  $\Phi'$  是  $\Phi$  的一阶导数. 根据石英挠性加速度计的漂移模型, 可得卡尔曼滤波器的过程矩阵  $F$  及预测误差协方差矩阵  $Q$  (因各预测变量独立, 协方差矩阵仅含对角元):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_\Phi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\Phi'}^2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

$Q$  的对角元分别表示状态向量中两个参数的方差. 原子干涉仪激发率  $P_e$  对应于状态向量的雅可比矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} C & 0 \\ \frac{1}{2} \sin \Phi & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

各种版本的卡尔曼滤波算法被用于稳定原子干涉仪或被用于融合经典-量子加速度计输出, 且针对不同场景做了定向优化 [10, 23-25]. 针对 Titan 加速度计标度因数随信号大小而波动的特性, 本文利用当前最优估计值小范围动态调节扩展卡尔曼滤波超参数  $R$ , 这使得大过载下 Titan 加速度计测量误差追踪更准确. 实时快速的编码石英挠性加速度计的输出和对激光初始相位的精确控制是实现两种加速度计融合的重要技术. 另外, 扩展卡尔曼滤波算法的执行也需要计算性能优越、能长时间稳定工作的计算资源. 该方案能够实现动态场景下加速度的高精度测量, 一定程度上修正石英挠性加速度计的标度和零偏不稳定性, 同时也能缓解原子干涉仪的条纹紊乱问题. 大过载情况下, 卡尔曼滤波算法能避免原子干涉仪测量失效而对系统产生的影响. 接下来我们将根据真实环境进行数值模拟, 并分析对比混合加速度计的性能.

## 4 仿真结果与讨论

### 4.1 仪器参数与噪声

Titan 是基于力平衡反馈原理的成熟商用三轴

加速度计的一种, 具备优异的宽频带与高动态范围性能, 自身噪声水平与宽频带地震仪相当. 该传感器支持电子可调全量程, 具备电子调零功能, 零点偏移低于  $\pm 0.005g$ , 其中  $g$  是重力加速度国际标准值. 温度稳定性方面, 水平轴偏移温度系数为  $60 \mu\text{g}/\text{K}$ , 垂直轴为  $320 \mu\text{g}/\text{K}$ , 全温区非线性误差小于  $0.015\%$ . 我们关于石英挠性加速度计的仿真参数和性能设定基于此型号, 且量程选定为  $\pm 4g$ , 采样率为  $f_q = 1000\%$ , 实验室环境下的噪声功率谱密度如图 1(a) 所示, 温度波动导致  $10^{-4} \mu\text{g}/\text{K}$  附近的噪声相对较大.

另外, 原子加速度仪基于冷原子干涉原理, 采用铷-87 原子物质波干涉, 拉曼光脉冲间隔  $T = 40 \text{ ms}$ , 单次态制备和测量时间总共为  $0.1 \text{ s}$ , 拉曼光有效波矢  $k_{\text{eff}} \approx 1.67 \times 10^7 \text{ rad/m}$ . 它的极限性能受到多种噪声源制约, 主要包括: 地面振动导致参考镜位移; 驱动干涉的两束激光相对相位、频率起伏; 磁场涨落导致的塞曼频移、磁场梯度导致退相干; 有限温下的原子速度分布、位置抖动; 原子荧光探测噪声等等. 模拟中我们主要考虑了参考镜的振动以及拉曼光的相位波动, 其次系统评估了其它噪声对灵敏度的影响.

以海洋航行为背景, 高精度、高稳定性的加速度计是船舶在长达数月的无线电静默时导航设备的重要组件. 考虑混合加速度计与甲板位置刚性连接, Titan 加速度计置于原子干涉仪拉曼反射镜底部. 甲板振动源主要包括: 螺旋桨在非均匀伴流场中工作产生的脉动压力 (尤其是空泡激励), 以及

主机、辅机等旋转机械的不平衡力与力矩导致持续性的低频振动; 船舶在波浪中航行时遭遇的冲击、砰击与持续波频载荷, 引发的船体梁的总体振动 (如两节点垂向振动) 并传导至甲板结构; 船体周围湍流边界层引发的脉动压力, 以及附体产生的涡脱落, 则构成高频振动的激励成分. 甲板振动是多种激励源通过复杂结构路径耦合作用的结果. 其中, 文献 [10] 指出海浪贡献的  $0.23 \text{ Hz}$  附近的低频振动占主导, 甲板整体瞬时振动噪声最大可达  $0.158 \text{ m/s}^2$ . 本文提取其振动特征频率作为仿真的振动噪声, 如图 1(b) 所示, 且假定几乎全部传导到了拉曼反射镜.

## 4.2 模拟结果

前面 4.1 节详细呈现了两种加速度计的主要自噪声和工作环境的振动噪声. 机械加速度计厂商通过数学建模和内置计算系统来补偿温度等造成的标度因数变化和零偏值, 另一方面, 使用者通过制造封闭环境和控温、控湿设备来减小环境温度、湿度波动. 在不考虑这些软硬件调控的情况下, 我们以实验室为背景进行了数值模拟. 为了获取两种加速度计复合后的最佳性能, 设置输入信号为恒定值且设备连续运行五个小时, 期间第 3 节介绍的扩展卡尔曼滤波算法做实时数据融合. 图 2(a) 红色星形点是石英挠性加速度计的真实测量误差, 黑色点是卡尔曼滤波器追踪到的结果, 这表明误差从数十毫伽抑减小到了数毫伽范围内. 定量来说, 图 2(b) 中红色虚线和黑色实线分别是石英挠性加速度计

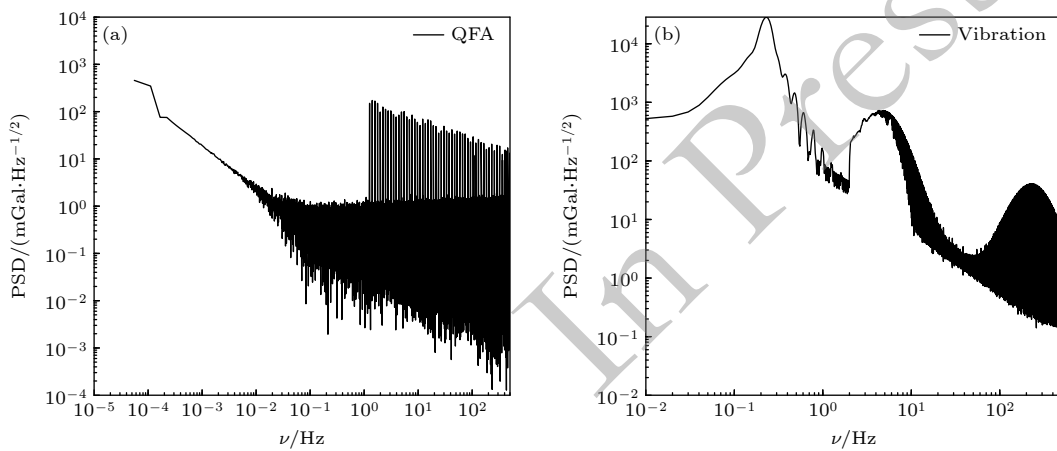


图 1 传感器和环境噪声功率谱密度 (a) 实验室环境的振动; (b) 海面航行船舶甲板的振动<sup>[11]</sup>

Fig. 1. The noise power spectral density (PSD) of sensor and environments (a) vibration in the laboratory environment; (b) ship deck vibration during ocean navigation<sup>[11]</sup>.

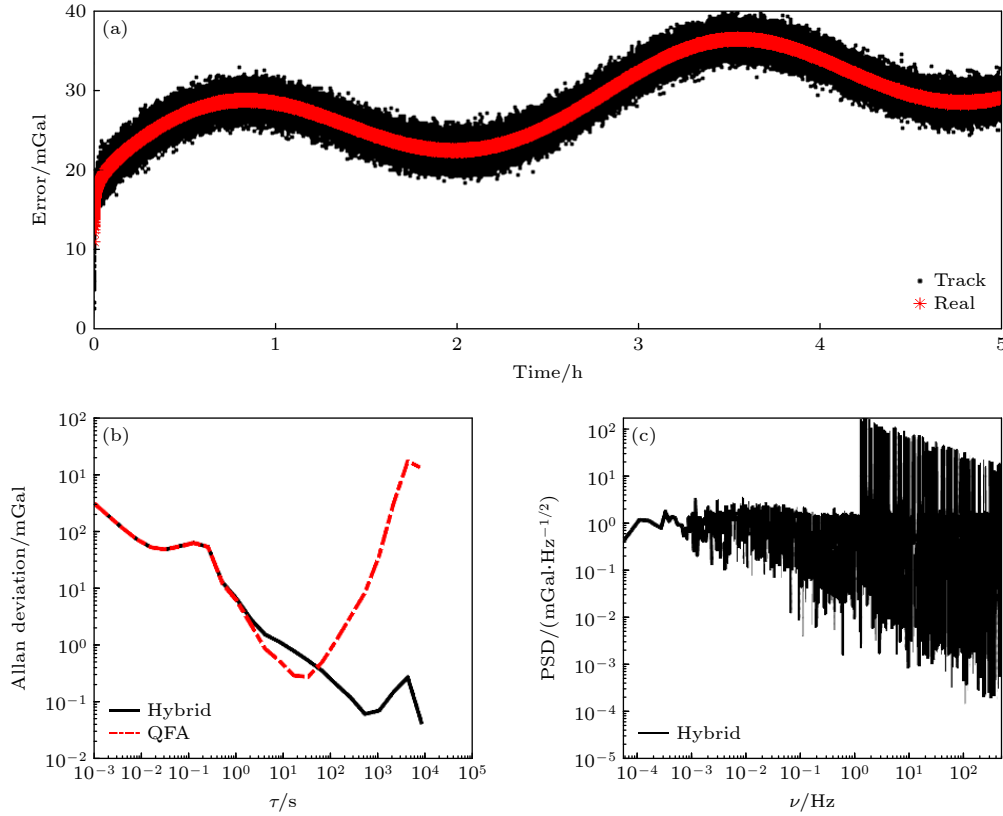


图 2 实验室环境下 (a) Titan 加速度计真实误差 (红色星形) 与卡尔曼滤波器追踪到的误差 (黑色点); (b) Allan 偏差对比; (c) 混合加速度计噪声功率谱密度

Fig. 2. Laboratory measurements of (a) the true error of the Titan accelerometer (red stars) versus the error tracked by the Kalman filter (black dots); (b) comparison of the Allan deviation; (c) noise power spectral density of the hybrid accelerometer.

和混合加速度计的 Allan 偏差, 零偏不稳定性由  $0.091 \text{ mGal}/\sqrt{\text{Hz}}$  提高到了  $0.034 \text{ mGal}/\sqrt{\text{Hz}}$ , 图中也可看出系统的长期漂移得到了很好的抑制. 图 2(c) 的噪声功率谱密度也确认了这一点, 另外, 除了自身漂移和电路白噪声, 高频环境振动噪声也降低了加速度计的性能. 该研究为混合量子惯性传感器在动态环境下的性能评估与优化提供了可行的实验验证框架. 值得注意的是卡尔曼滤波算法支撑下原子干涉仪避免了长时间多次数的扫谱拟合过程, 但是需要实时检测其输出并评估有效性.

实际工况下, 强度远高于实验室环境的振动和加速度信号的巨大波动对于混合加速度计的平稳、有效运行极具挑战性. 考虑甲板振动噪声 (图 1(b) 所示), 我们模拟了船舶航行十小时混合加速度计的运行. 高强度的振动噪声与缓变加速度影响下, 如图 3(a) 展示模拟最后 0.35 s 内混合加速度计的输入信号 (包含船舶振动), 石英挠性加速度计长期测量误差发生改变 (图 3(b) 所示), 由原来的温度变化转换为振动噪声与测量信号波动主导, 这也就

是常规数学算法难以追踪和矫正其误差的困难所在. 而卡尔曼滤波算法使得误差几乎完全可以被追踪到, 如图 3(c) 的红色圆点, 另外黑色实线则是  $a_{\text{Track}} - a_{\text{Real}}$ , 其中 91.62% 误差可以被追踪且消除, 具体计算表达式为  $\langle 1 - \frac{a_{\text{Track}} - a_{\text{Real}}}{a_{\text{Real}}} \rangle$ , 其中  $\langle \rangle$  表示求平均. 因此, 船舶正常航行状态下混合加速度计作为惯性导航器件可以提供更加稳定的信号测量.

面向惯性导航的混合量子加速度计融合了冷原子干涉仪的长期稳定性与经典加速度计的高带宽特性, 但其在加速度巨变的恶劣环境下的性能验证至关重要. 比如船舶与海上小型漂浮物, 或者大型冰川、礁石、其它巨轮相撞产生的瞬时加速度由正常航行的  $0.1 \text{ m/s}^2$  左右增大到几十到几百  $g$ . 冲击能量会激发船体结构从局部到整体的多种振动模式, 这些模式叠加在一起, 形成了复杂的冲击环境. 碰撞的另一个特征是持续时间短, 通常在 1 s 内结束. 根据传感器以及船舶发生碰撞的特征 [29,30], 我们模拟了船舶瞬时加速度最大  $39.2 \text{ m/s}^2$  的小型碰

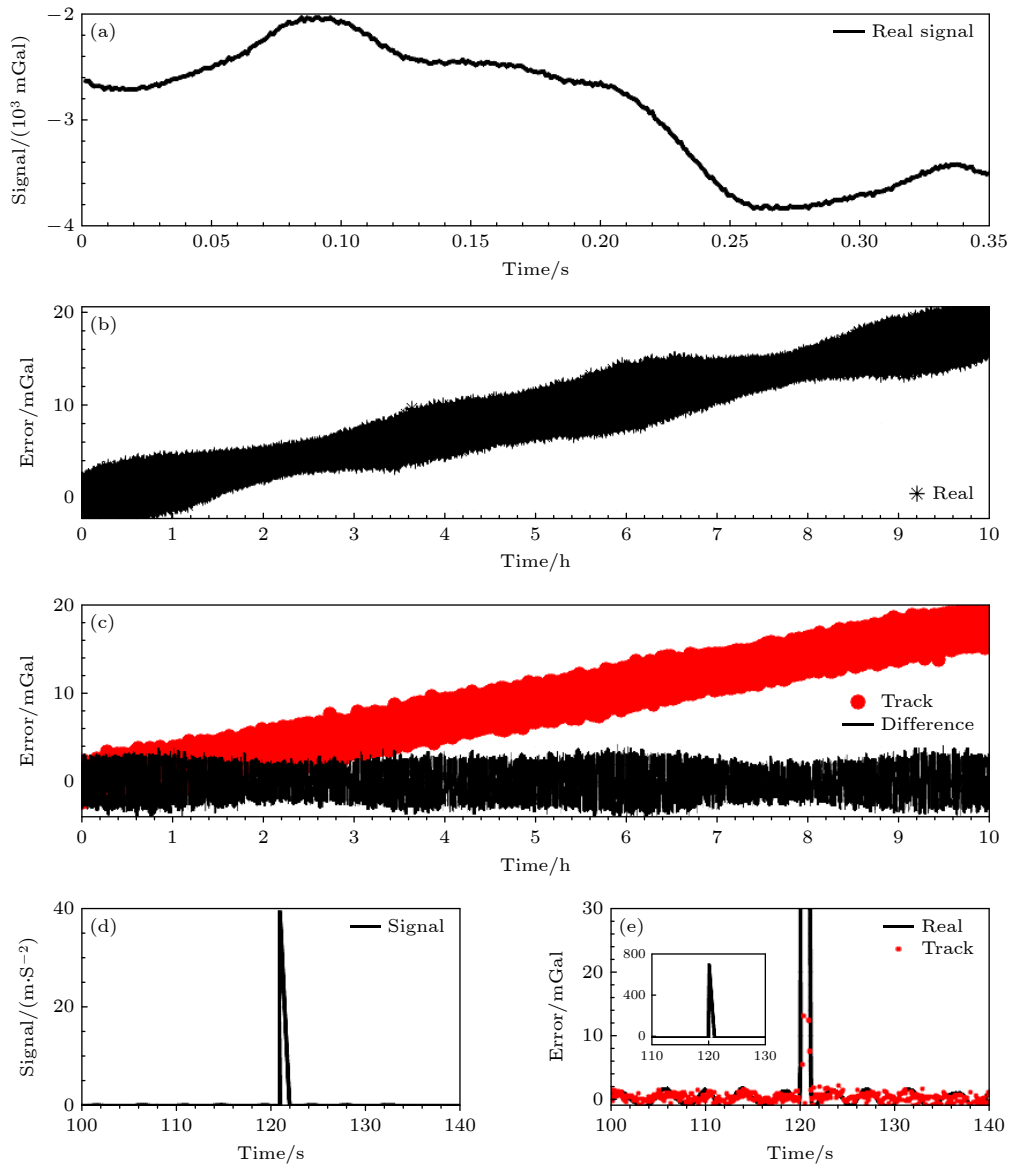


图 3 航行船舶甲板上 (a) 最后 0.35 s 的 Titan 加速度计输出; (b) Titan 加速度计真实误差; (c) Kalman 滤波器追踪到的误差 (红色圆点) 和它与真实误差的差值 (黑色实线); (d) 船舶发生碰撞加速度信号以及 (e) 真实误差 (黑色实线, 插图显示完整变化过程且坐标与大图一致) 和被追踪到的误差 (红色点)

Fig. 3. (a) Output of the Titan accelerometer during the final 0.35 s on a sailing ship deck; (b) true error of the Titan accelerometer; (c) the error tracked by the Kalman filter (red dots) and the difference between true and tracked error (black solid line); (d) acceleration signal during a ship collision event and (e) true error (black solid line, inset shows the complete change process and the coordinates are consistent with the main figure) and the tracked error (red dots).

撞, 对应的输入信号如图 3(d) 所示. 碰撞时间内石英挠性加速度计测量误差最大为 690 mGal, 图 3(e) 及其插图中的黑色实线展示了误差变化趋势, 红色点则是卡尔曼滤波追踪的结果, 表明极端环境下混合加速度计的准确度有待提升. 考虑到 Titan 加速度计的量程以及原子干涉仪性能, 瞬时加速度大于  $4g$  的碰撞会致使传感器发生永久性损坏或长期测量偏差. 瞬时加速度不大于  $4g$  时, 随着加速度的增加, 机械加速度计的标度因数越不稳定且卡尔曼滤

波越难追踪. 总而言之, 量子-经典的混合传感在常规工况下性能优异, 而极端工况下性能提升有限.

我们的模拟考虑了包括振动、机械加速度计标度因数和零偏的不稳定性等主要噪声源, 实际工况下混合加速度计的性能受许多复杂因素影响. 经典与量子传感器间的数据融合依赖于精确的时间同步与运动学模型匹配. 在强振动、高频角运动或非平稳机动条件下, 两者测量参考系的瞬时偏差可能引入融合误差, 降低混合输出的可靠性. 当载体存

在角运动时,原子干涉仪对拉曼光束的波前方向极为敏感.旋转可能导致干涉区域的光束失准或原子波包空间分离,造成对比度下降甚至干涉条纹消失,需依赖额外陀螺仪或主动光束指向控制进行补偿.尽管混合架构提升了抗振能力,但原子干涉部分对磁场梯度、温度波动及机械冲击仍较为敏感.在车载、机载等复杂动力学环境中,这些干扰可能加剧系统误差,甚至影响原子冷却与探测效率.实现动态混合测量需集成多轴激光调控、实时相位补偿、高速数据融合等子系统,导致实际应用仍然面临集成挑战.

## 5 结 论

冷原子干涉仪与石英挠性加速度计的量子-经典混合加速度计,通过扩展卡尔曼滤波算法实现数据融合.本文依据两种传感器的精确数学模型,采用马尔可夫链蒙特卡洛方法进行数值仿真,重点模拟了船载环境下振动噪声与传感器自噪声的影响.提出的新振动补偿方案通过精确调控拉曼光相位,有效抑制了振动对原子干涉仪的影响.仿真结果表明,在实验室环境下,混合加速度计能实现高稳定、高精度的加速度测量,而在船舶正常航行条件下,追踪并修正石英挠性加速度计 91.62% 的测量误差.系统在碰撞等极端加速度变化场景下仍具一定鲁棒性,验证了混合架构在惯性导航中的潜力.本研究凸显了混合加速度计不仅为极端环境下高精度加速度测量提供新途径,亦可作为惯性导航系统的校准基准.未来工作可聚焦于所提出融合算法的实验验证、复合传感器硬件的小型化,以及面向航空航天或自动驾驶等高度动态环境的实时优化.

感谢华中科技大学国家精密重力测量科学中心陈乐乐助理研究员和浙江工业大学物理学院李德钊副教授的讨论.

## 参考文献

- [1] Peters A, Chung K Y, Chu S 2001 *Metrologia* **38** 25
- [2] Gillot P, Francis O, Landragin A, Pereira Dos Santos F, Merlet S 2014 *Metrologia* **51** L15
- [3] Hardman K S, Everitt P J, McDonald G D, Manju P, Wigley P B, Sooriyabandara M A, Kuhn C C N, Debs J E, Close J D, Robins N P 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 138501
- [4] Luo Q, Li L, Zhou H, Chen L L, Duan X C, Hu Z K, Zhou M K 2025 *Metrologia* **62** 055006

- [5] Barrett B, Bertoldi A, Bouyer P 2016 *Phys. Scr.* **91** 053006
- [6] Barrett B, Antoni-Micollier L, Chichet L, Battelier B, Lèveque T, Landragin A, Bouyer P 2016 *Nat. Commun.* **7** 13786
- [7] Williams J R, Sackett C A, Ahlers H, Aveline D C, Boegel P, Botsi S, Charron E, Elliott E R, Gaaloul N, Giese E, Herr W, Kellogg J R, Kohel J M, Lay N E, Meister M, Müller G, Müller H, Oudrhiri K, Phillips L, Pichery A, Rasel E M, Roura A, Sbroscia M, Schleich W P, Schneider C, Schubert C, Sen B, Thompson R J, Bigelow N P 2024 *Nat. Commun.* **15** 6414
- [8] Zhang J Y, Chen L L, Cheng Y, Luo Q, Shu Y B, Duan X C, Zhou M K, Hu Z K 2020 *Chin. Phys. B* **29** 093702
- [9] Saywell J C, Kuprov I, Goodwin D, Carey M, Freegarde T 2018 *Phys. Rev. A* **98** 023625
- [10] Zhu D, Xu H, Zhou Y, Wu B, Cheng B, Wang K N, Chen P J, Gao S T, Weng K X, Wang H L, Peng S P, Qiao Z K, Wang X L, Lin Q 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 133702 (in Chinese) [朱栋, 徐晗, 周寅, 吴彬, 程冰, 王凯楠, 陈佩军, 高世腾, 翁堪兴, 王河林, 彭树萍, 乔中坤, 王肖隆, 林强 2022 *物理学报* **71** 133702]
- [11] Qiao Z K, Shen Z H, Hu R, Li L L, Yuan P, Wu G C, Yuan Y, Zhou Y, Wu B, Lin Q 2025 *Sci. Rep.* **15** 8864
- [12] Migliaccio F, Reguzzoni M, Batsukh K, Tino G M, Rosi G, Sorrentino F, Braitenberg C, Pivetta T, Barbolla D F, Zoffoli S 2019 *Surv. Geophys.* **40** 1029
- [13] Arani A H, Schilling M, Beaufile Q, Knabe A, Tennstedt B, Kupriyanov A, Schön S, Pereira dos Santos F, Müller J 2024 *Adv. Space Res.* **74** 3186
- [14] Bidel Y, Zahzam N, Blanchard C, Bonnin A, Cadoret M, Bresson A, Rouxel D, Lequentrec-Lalancette M F 2018 *Nat. Commun.* **9** 627
- [15] Qing H P, Yu L P 2020 In *China Academic Journal Electronic Publishing House* (Beijing Aerospace Control Instrument Institute), pp 187–201. (in Chinese) [秦和平, 于兰萍 2020 中国航天电子技术研究院科学技术委员会 2020 年学术年会论文集 187—201]
- [16] Wang Y, Huang T T, Ye L Y, Zhu Z J, Song K C 2024 *IEEE Sens. J.* **24** 22486
- [17] Zhang Y H, Li C, Xue H, Zhao Y L 2025 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **74** 9539517
- [18] Zhang C X, Wang X, Song L L, Ran L J 2021 *Sensors* **21** 294
- [19] Han C, Li C, Zhao Y L, Li B 2021 *J. Microelectromech. Syst.* **30** 184
- [20] Wang Y H, Wang Y C, Li S D, Li Q Q, Xu D L, Lai X Q 2025 *IEEE Sens. J.* **25** 43565
- [21] Cui F, Su Y F, Zhang W P, Wu X S, Chen W Y, Zhao X L 2005 *J. Chin. Inert. Technol.* **27** 61 (in Chinese) [崔峰, 苏宇锋, 张卫平, 吴校生, 陈文元, 赵小林 2005 中国惯性技术学报 **27** 61]
- [22] Liu Y F, Ding H G, Dong J X 2007 *J. Tsinghua Univ. (Sci. Technol.)* **47** 181 (in Chinese) [刘云峰, 丁衡高, 董景新 2007 清华大学学报(自然科学版) **47** 181]
- [23] Zhou W D, Hou J X, Liu L, Sun T, Liu J 2017 *Open Phys.* **15** 182
- [24] Davari N, Gholami A 2017 *IEEE Sens. J.* **17** 1061
- [25] Cheiney P, Fouché L, Templier S, Napolitano F, Battelier B, Bouyer P, Barrett B 2018 *Phys. Rev. Appl.* **10** 034030
- [26] Zhao Y P, Zhang C, Bao S N, Li D R, Niu J Y, Tong W J, Cheng B, Wang X L, Weng K X, Li H, Mao H C, Wu B, Lin C 2025 *Opt. Express* **33** 6373
- [27] Fu H P 2020 *Parameter Stability Analysis and Modeling Prediction of Quartz Flexible Accelerometer*. Master's thesis,

- Beijing: The First Academy of China Aerospace Science and Technology Corporation. (in Chinese) [付红坡 2020 硕士论文 (北京: 中国运载火箭技术研究院)]
- [28] Lautier J, Volodimer L, Hardin T, Merlet S, Lours M, Pereira Dos Santos F, Landragin A 2014 *Appl. Phys. Lett.* **105** 144102
- [29] Zhou H J, Li C, Ding Q W, Hao W X 2017 *J. Water Resour. Water Eng.* **28** 173 (in Chinese) [周红杰, 李春, 丁勤卫, 郝文星 2017 水资源与水工程学报 **28** 173]
- [30] Chou C C 2021 *Proc. Inst. Mech. Eng. Part M J. Eng. Marit. Environ.* **235** 737

SPECIAL TOPIC—Ultracold atomic and molecular physics

## Numerical simulation of shipborne quantum-classical hybrid accelerometer<sup>\*</sup>

LI Ke<sup>1)</sup> DONG Baoyun<sup>1)†</sup> SHENG Jia<sup>1)</sup> ZHANG Jiongyang<sup>3)</sup>  
XIAO Yuhua<sup>3)</sup> WANG Tao<sup>1)2)‡</sup> ZHANG Xuefeng<sup>1)††</sup>

1) (*Department of Physics, and Chongqing Key Laboratory for Strongly Coupled Physics, Chongqing University, Chongqing, 401331, China*)

2) (*Center of Modern Physics, Institute for Smart City of Chongqing University in Liyang, Liyang, 213300, China*)

3) (*Science and Technology on Vacuum Technology and Physics Laboratory, Lanzhou Institute of Physics, Lanzhou 730000, China*)

( Received 21 January 2026; revised manuscript received 8 March 2026 )

### Abstract

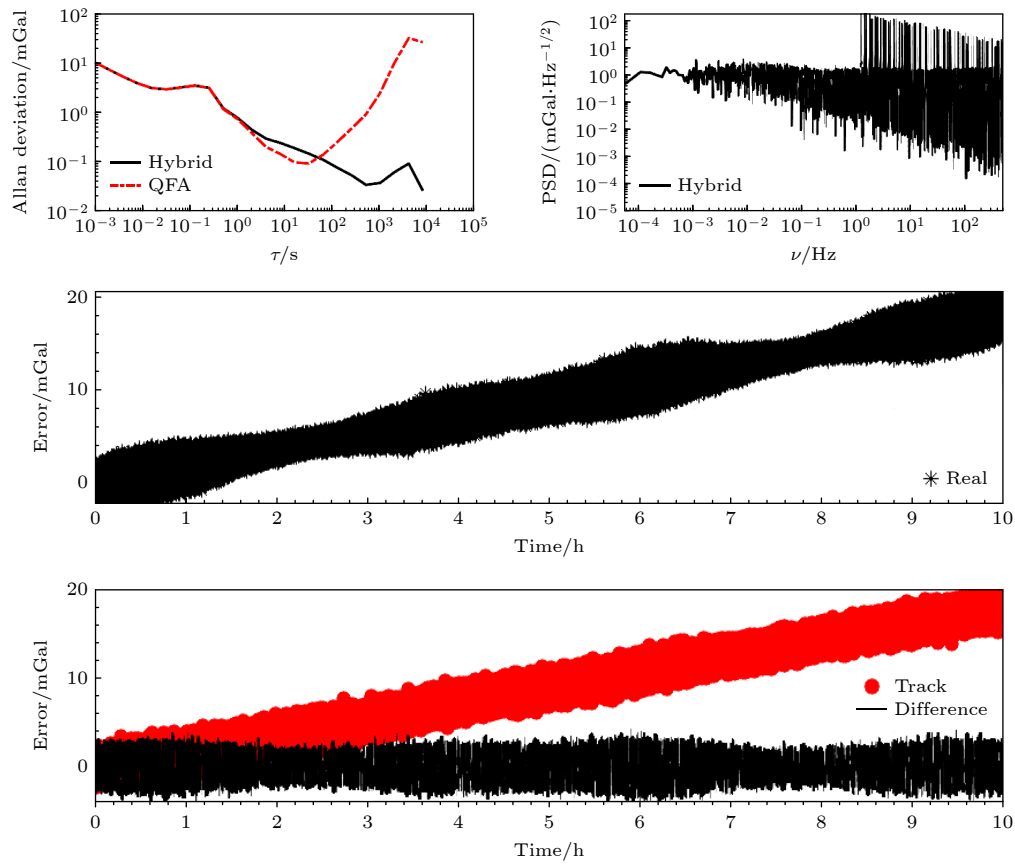
The precision, stability, and bandwidth of accelerometers are vital for inertial navigation and motion control. This study proposes a quantum-classical hybrid accelerometer that integrates a cold atom interferometer (CAI) with a quartz flexible accelerometer (QFA) using an optimized extended Kalman filter algorithm. High-fidelity numerical simulations based on Markov Chain Monte Carlo methods are conducted to model the sensors' intrinsic noise and environmental vibration under shipborne conditions. A novel vibration-compensation scheme is introduced to stabilize the CAI output through precise control of the Raman laser phase. Simulation results demonstrate that the hybrid system achieves high-precision, high-bandwidth acceleration measurements in dynamic scenarios, effectively eliminating the long-term drift inherent in classical sensors. Performance analysis via Allan deviation and noise power spectral density confirms that long-term instability is suppressed. As for normal sailing, the Kalman filter successfully tracks and corrects up to 91.62% of the QFA measurement errors, while low-pass filtering further mitigates errors induced by vibration noise. Furthermore, the system exhibits excellent robustness during extreme acceleration events, such as ship collisions. This work provides a comprehensive simulation framework for hybrid quantum-classical accelerometers and highlights their potential for high-dynamic inertial navigation applications.

<sup>\*</sup> Project supported by National Science Foundation of China (Grant No. 12274045, 12347101), the Program of State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices (Grant No. KF202211), and the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2011AA06Z000), the Joint Funds of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. U2341247), Gansu Province Major Science and Technology Special Plan (Grant No. 24ZDGA004), the Qian Xuesen Youth Innovation Fund of China Aerospace Science and Technology Corporation.

† Corresponding author. E-mail: [20222701004@stu.cqu.edu.cn](mailto:20222701004@stu.cqu.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [tauwaang@cqu.edu.cn](mailto:tauwaang@cqu.edu.cn)

†† Corresponding author. E-mail: [zhangxf@cqu.edu.cn](mailto:zhangxf@cqu.edu.cn)



**Keywords:** hybrid accelerometer, cold atom interferometry, Kalman filter, inertial navigation

**DOI:** [10.7498/aps.75.20260109](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260109)

**CSTR:** [32037.14.aps.75.20260109](https://cstr.net/urn:nid:CN=32037.14.aps.75.20260109)

In Press