

弯曲振动圆柱形夹心式压电换能器的等效电路^{*}许龙^{1)2)†} 李志强¹⁾ 龚涛²⁾ 吴德林^{3)‡}

1) (中国计量大学理学院, 杭州 310018)

2) (深圳职业技术大学智能制造技术研究院, 深圳 518055)

3) (浙江省声学智能传感与先进测量重点实验室, 国家市场监督管理总局重点实验室(声学振动应用测量技术), 杭州 310018)

(2026年1月22日收到; 2026年2月24日收到修改稿)

等效电路法因其简洁性、直观性及物理意义明确的优点, 已成为超声振动系统设计与分析中重要的理论分析方法. 为完善弯曲振动夹心式压电换能器的设计理论模型, 基于 Timoshenko 梁理论及机电类比原理, 建立了圆形截面弯曲振动夹心式压电换能器的 $M-\theta$ 分布参数等效电路模型, 并进一步得到其输入阻抗表达式、共振频率方程及有效机电耦合系数. 为验证理论模型的精确性, 基于等效电路模型计算分析、有限元仿真模拟设计了两个分别工作在一阶、二阶弯曲振动模式下的弯曲振动夹心式压电换能器, 并加工制作了2个弯曲振动换能器实验样品. 实验测试的换能器的共振频率、弯曲振动特性与等效电路法理论计算和有限元仿真模拟结果一致, 研究结果为圆形截面弯曲振动夹心式压电换能器的工程设计和结构优化提供了精确的简明设计理论模型.

关键词: 夹心式压电换能器, 弯曲振动, 等效电路, 共振频率方程**DOI:** 10.7498/aps.75.20260118**CSTR:** 32037.14.aps.75.20260118

1 引言

随着超声技术的发展, 弯曲振动超声换能器的应用越来越广泛^[1], 弯曲振动压电超声换能器具有尺寸小、能够与空气介质更好地实现声匹配、能量传播方向容易改变以及负载能力强等优点, 在超声加工^[2,3]、超声手术刀^[4,5]、超声车削^[6]、超声传感及超声马达^[7,8]中得到了越来越广泛的应用. 例如在超声传感领域, 随着微机电系统加工技术的发展, 基于微机电系统技术的压电微超声换能器^[9]的应用如水下成像^[10]、智能微型机器人、超声测距^[11]等.

在功率超声的应用中, 按照振动模式压电超声

换能器通常可归为两类: 以纵向^[12,13]、扭转^[14,15]、弯曲^[16-19]为代表的单一振动模式, 以及由纵弯^[20-22]、纵扭^[23]、纵径^[24]等两种或两种以上振动复合而成的复合振动模式. 较之于纵向、径向和扭转振动超声换能器系统而言, 弯曲振动换能器系统的振动更为复杂, 目前纵向振动、径向振动和扭转振动超声换能器已建立了完备的简明等效电路设计解析理论分析模型. 等效电路法由于其物理意义简洁明了、易于实现声学振动系统的整体设计与优化等优点, 广泛应用于超声、电声^[25]和水声^[26-28]换能器及系统的设计. 然而由于弯曲振动系统本身的复杂性, 弯曲振动夹心式压电换能器还未建立完备的简明等效电路解析理论分析模型. 王鹏飞^[29]利用矩阵方法获得换能器机械共振频率, 通过对压电陶瓷

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 12074354)、国家市场监督管理总局重点实验室开放基金(批准号: AVL202302)和浙江省市场监督管理局科研计划(批准号: ZD2024007)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: xulong@cjl.edu.cn

[‡] 通信作者. E-mail: wdl19911218@126.com

压电方程的求解, 从能量角度建立弯曲振动夹心式压电换能器的集中参数机电耦合分析模型, 最终计算得到弯曲振动夹心式压电换能器的有效机电耦合系数. 任文博等^[30]采用传递矩阵法分析弯曲振动系统, 推导了压电层合弯曲振动换能器自由振动的频率方程. Wang 等^[31,32]基于 Timoshenko 梁理论, 对换能器前后盖板、压电复合梁以及变幅杆通过求解波动方程、压电方程进行力学和电学分析, 利用矩阵形式得到前后盖板、变幅杆的机械传递矩阵及压电金属梁的机电传递矩阵. 最后通过分析各分割部分之间的传输条件得到整个弯曲振动夹心式压电换能器的分布参数机电传递矩阵模型. 该模型通过将复杂结构离散为单元, 并利用边界条件关联力学与电学量以建立系统理论. 但该模型非常复杂, 对于多数工程技术人员很难理解并应用于工程设计.

为此, 本文基于 Timoshenko 梁弯曲振动理论^[33-35], 通过力电类比建立了圆形截面弯曲振动夹心式压电换能器的分布参数机电等效电路模型. 利用有限元软件 Comsol 对换能器的振动模态及声辐射特性进行了仿真模拟. 最后, 基于理论分析和有限元仿真结果, 加工制作了相应的换能器实验样品, 对换能器的阻抗-频率特性、模态振型进行了实验测试, 实验测试结果与解析理论计算和有限元仿真结果吻合较好.

2 理论分析

2.1 等截面金属梁的等效电路模型

如图 1 所示, Z 方向为金属梁的中心轴线方向, X - Y 面为等截面金属梁的横截面, 其中力学边界变量为弯曲振动速度 V 、偏转角速度 $\dot{\theta}$ 、弯矩 M 和剪切力 F . 在压电复合梁两端自由的边界条件下沿 Y 方向振动时, 采用如下类比关系: 弯矩 M 类比为电压、截面弯曲引起的偏转角 θ 类比为电流.



图 1 弯曲振动等截面金属梁边界条件

Fig. 1. Boundary conditions of a uniform cross-section metal beam under flexural vibration.

基于 Timoshenko 梁理论, 当等截面金属梁在两端自由的边界条件下弯曲振动时, 其两端弯矩 M 同截面偏转角 θ 的关系式为

$$\begin{cases} M_1 = M|_{x=0} = Z_C \theta_1 - Z_B (\theta_2 + \theta_1), \\ M_2 = M|_{x=l} = -Z_B (\theta_2 + \theta_1) + Z_C \theta_2, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $Z_C = Z_A + Z_B$,

$$Z_A = EI \left[-\frac{i\lambda_2 n_1 \cosh(n_1 l)}{(\lambda_1 - \lambda_2) \sinh(n_1 l) \omega} + \frac{i\lambda_1 n_2 \cos(n_2 l)}{\sin(n_2 l) \omega (\lambda_1 - \lambda_2)} \right]$$

$$Z_B = EI \left[\frac{i\lambda_2 n_1}{(\lambda_1 - \lambda_2) \sinh(n_1 l) \omega} - \frac{i\lambda_1 n_2}{\sin(n_2 l) \omega (\lambda_1 - \lambda_2)} \right],$$

$$\lambda_1 = -(\omega^2 / C_1^2 + n_1^2) / (C C_2^2),$$

$$\lambda_2 = (-\omega^2 / C_1^2 + n_2^2) / (C C_2^2),$$

$$n_1 = N\omega \sqrt{-1 + H\sqrt{(1+a^2)/\omega^2}},$$

$$n_2 = N\omega \sqrt{1 + H\sqrt{(1+a^2)/\omega^2}},$$

$$N = \frac{\sqrt{1/C_2^2 + 1/C_1^2}}{\sqrt{2}}, \quad H = \frac{C_1^2 - C_2^2}{C_1^2 + C_2^2},$$

$$a = \frac{2\sqrt{C}}{1/C_2^2 - 1/C_1^2},$$

$$C_1 = \sqrt{E/\rho}, \quad C_2 = \sqrt{KG/\rho}, \quad C = A_0 \rho / (EI).$$

这里 G 为材料的剪切模量; A_0 是横截面积; K 为剪切系数, 对于圆柱型截面 $K = 0.90$; E 是材料杨氏模量; ρ 为金属梁密度; ω 为金属梁振动角速度; I 为惯性矩. 根据二端口等效网络理论, (1) 式描述了以 Z 参数为特征变量的二端口网络关系. 由此可以得出如图 2 所示的等截面金属梁 M - θ 型类比弯曲振动等效电路, 其中 Z_C 和 Z_B 分别为串联和并联机械阻抗.

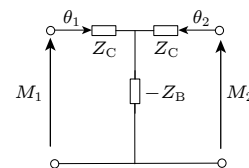


图 2 弯曲振动等截面金属梁等效电路

Fig. 2. Equivalent circuit of a uniform cross-section metal beam under flexural vibration.

2.2 等截面压电复合梁的等效电路模型

压电复合梁由上下两片半圆环型压电陶瓷及中心圆柱金属梁组成, r_p 和 r_e 为圆环型压电陶瓷的外径与内径, 压电陶瓷的线性本构方程为

$$\begin{cases} S_{3,p} = S_{33}^E T_{3,p} + d_{33} E_3, \\ D_{3,p} = d_{33} T_{3,p} + \varepsilon_{33}^T E_3, \\ S_{5,p} = S_{55}^E T_{5,p}, \end{cases} \quad (2)$$

式中 S_{33}^E 为压电陶瓷极化方向柔顺常数; S_{55}^E 为剪切方向柔顺常数; d_{33} 为压电应变常数; ε_{33}^T 为压电陶瓷介电常数; $S_{3,p}$ 和 $T_{3,p}$ 分别为纵向应变和应力; $S_{5,p}$ 和 $T_{5,p}$ 分别为沿弯曲方向的剪切应变和剪切应力; 极化方向上的电场 $E_3 = 2U/l$, 其中 U 为压电陶瓷两端之间的电压, l 为压电陶瓷的厚度.

弯曲振动压电复合梁的边界条件如图 3 所示, 根据弯矩的定义, 由压电陶瓷的本构方程, 复合梁弯矩 M 和剪力 F 可表示为

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_{A_p} T_{3,p} y dA_p + \int_{A_e} T_{3,e} y dA_e \\ &= \left[\frac{\pi (r_p^4 - r_e^4)}{4 S_{33}^E} \right] \theta' - \frac{8 d_{33}}{3 S_{33}^E l_1} (r_p^2 + r_e^2 + r_p r_e) U \\ &= (EI)_{\text{eff}} \theta' - KU, \\ F &= k^2 \int_{A_e} T_{5,e} dA_e + 2k^2 \int_{A_p} T_{5,p} dA_p \\ &= k^2 \pi \left[\frac{(r_p^2 - r_e^2)}{S_{55}^E} \right] (\eta'_z + \theta) \\ &= (AG)_{\text{eff}} (\eta'_z + \theta), \end{aligned} \quad (3)$$

式中, A_e 和 A_p 分别为圆形截面金属梁及半圆环型压电梁的面积, $T_{3,e}$ 为金属梁的纵向应力, $(EI)_{\text{eff}}$ 表示压电复合梁的有效弯曲刚度, K 为压电复合梁机电转换系数, $T_{5,e}$ 为金属梁的剪切应力, $(AG)_{\text{eff}}$ 表示压电复合梁的有效剪切刚度, η'_z 为压电复合梁沿 z 方向的振动速度, k^2 为圆柱截面的修正因子.

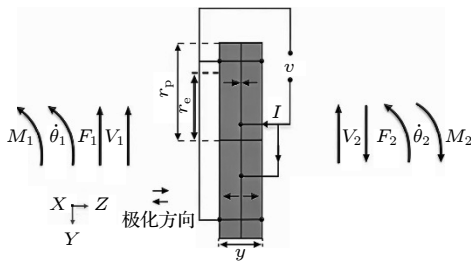


图 3 弯曲振动压电复合梁边界条件

Fig. 3. Boundary conditions of a piezoelectric composite beam.

根据 Timoshenko 梁弯曲振动理论, 考虑旋转惯性和剪切变形, 对弯曲振动压电复合梁进行线性运动学分析如图 4 所示.

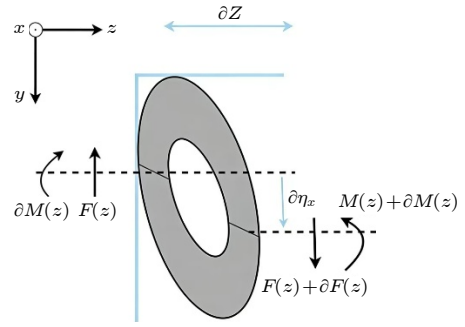


图 4 压电复合梁微元受力分析图

Fig. 4. Force analysis diagram of a micro-element in a piezoelectric composite beam.

根据压电复合梁微元受力分析, 其弯矩和剪力平衡为

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x} = F - \omega^2 \theta \left(\rho_p \pi \frac{[(r_p)^4 - (r_e)^4]}{4} \right) \\ \quad = F - \omega^2 \theta (\rho I)_{\text{eff}}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} = -\omega^2 \eta_z \rho_p \pi [(r_p)^2 - (r_e)^2] \\ \quad = -\omega^2 \eta_z m_{\text{eff}}, \end{cases} \quad (4)$$

式中, m_{eff} 为复合梁的有效质量分布, $(\rho I)_{\text{eff}}$ 为复合梁的有效惯性矩.

当施加谐波激励信号时, 压电陶瓷片纵向平行于其极化方向振动并产生电流 I , 表达式为

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial q}{\partial t} = j\omega \frac{2A_p}{l_p} \int_0^{l_p} D_{3,p} dz \\ &= j\omega \frac{2A_p}{l_p} \int_0^{l_p} (d_{33} T_{3,p} + \varepsilon_{33}^T E_3) dz \\ &= j\omega \frac{4A_p}{l_p} \frac{2A_p d_{33}}{S_{33}^E l_p} \left(\varepsilon_{33}^T - \frac{d_{33}^2}{S_{33}^E} \right) U \\ &\quad + \frac{2A_p d_{33}}{S_{33}^E l_p} [v(z)(z=l_p) - v(z)(z=0)] \\ &= j\omega C_0 U + \frac{2A_p d_{33}}{S_{33}^E l_p} \\ &\quad + \frac{2A_p d_{33}}{S_{33}^E l_p} [v(z)(z=l_p) - v(z)(z=0)], \end{aligned} \quad (5)$$

其中 C_0 为压电复合梁一维截止电容, l_p 为压电陶瓷晶堆长度.

基于 Timoshenko 梁理论, 压电复合梁的运动方程^[36]如下:

$$\eta_x'''' + \eta_x'' \omega^2 \left[\frac{(\rho I)_{\text{eff}}}{(EI)_{\text{eff}}} + \frac{m_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}}} \right] + \eta_x \frac{\omega^2 m_{\text{eff}}}{(EI)_{\text{eff}}} \left[\frac{(\rho I)_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}}} - 1 \right] = 0. \quad (6)$$

将 (3) 式与 (4) 式代入运动方程, 对运动方程进行求解, 压电复合梁各力学量满足以下状态方程:

$$\begin{cases} \eta_x = A_1 \cos(\lambda_2 z) + A_2 \sin(\lambda_2 z) + A_3 \cosh(\lambda_1 z) + A_4 \sinh(\lambda_1 z), \\ \theta = j\omega \left[\left(\frac{-\omega^2 m_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}} \lambda_1} - \lambda_1 \right) A_4 \cosh(\lambda_1 z) + \left(\frac{-\omega^2 m_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}} \lambda_1} - \lambda_1 \right) A_3 \sinh(\lambda_1 z) \right. \\ \quad \left. + \left(\frac{\omega^2 m_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}} \lambda_2} - \lambda_2 \right) A_2 \cos(\lambda_2 z) + \left(\frac{-\omega^2 m_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}} \lambda_2} + \lambda_2 \right) A_1 \sin(\lambda_2 z) \right], \\ M = (EI)_{\text{eff}} \left[\left(\frac{-\omega^2 m_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}} \lambda_1} - \lambda_1 \right) A_4 \lambda_1 \sinh(\lambda_1 z) + \left(\frac{-\omega^2 m_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}} \lambda_1} - \lambda_1 \right) A_3 \lambda_1 \cosh(\lambda_1 z) \right. \\ \quad \left. - \left(\frac{\omega^2 m_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}} \lambda_2} - \lambda_2 \right) A_2 \lambda_2 \sin(\lambda_2 z) + \left(\frac{-\omega^2 m_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}} \lambda_2} + \lambda_2 \right) A_1 \lambda_2 \cos(\lambda_2 z) \right] - KU, \\ F = -\omega^2 m_{\text{eff}} \left[\frac{A_1 \sin(\lambda_2 z) - A_2 \cos(\lambda_2 z)}{\lambda_2} + \frac{A_3 \sinh(\lambda_1 z) + A_4 \cosh(\lambda_1 z)}{\lambda_1} \right], \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{其中 } \lambda_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}n_1^2 - n_2} - \frac{n_1}{2}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}n_1^2 - n_2} + \frac{n_1}{2}}, \quad n_1 = \omega^2 \left[\frac{(\rho I)_{\text{eff}}}{(EI)_{\text{eff}}} + \frac{m_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}}} \right], \quad n_2 = \frac{\omega^2 m_{\text{eff}}}{(EI)_{\text{eff}}} \left[\frac{(\rho I)_{\text{eff}}}{AG_{\text{eff}}} - 1 \right].$$

λ_1 和 λ_2 为四阶微分方程的特征值, 当压电复合梁在两端自由的边界条件下弯曲振动时, 两端剪切力 F_1 和 F_2 均为 0, 根据边界条件解得状态方程中的四个待定系数 (A_1, A_2, A_3, A_4) 的表达式, 并将解得四个待定系数表达式代入上述状态方程中弯矩 M 表达式, 得到压电复合梁两端弯矩 M 同截面偏转角 θ 的关系式为

$$M_1 = Z_1 \theta_1 - Z_2 \theta_2 - KU, \quad M_2 = -Z_2 \theta_1 + Z_1 \theta_2 - KU, \quad (8)$$

式中, $Z_1 = E(A_5 \lambda_1 + A_6 \lambda_2)$, $Z_2 = E(A_7 \lambda_1 + A_8 \lambda_2)$, 其中

$$A_5 = \left[\frac{j m_{\text{eff}} \omega \cosh(\lambda_1 l)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh(\lambda_1 l) AG_{\text{eff}}} + \frac{j \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 l)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh(\lambda_1 l) \omega} \right], \quad A_6 = \left[-\frac{j m_{\text{eff}} \omega \cos(\lambda_2 l)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sin(\lambda_2 l) AG_{\text{eff}}} + \frac{j \lambda_1^2 \lambda_2 l \cos(\lambda_2 l)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sin(\lambda_2 l) \omega} \right],$$

$$A_7 = \left[-\frac{j m_{\text{eff}} \omega}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh(\lambda_1 l) AG_{\text{eff}}} - \frac{j \lambda_1^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sinh(\lambda_1 l) \omega} \right], \quad A_8 = \left[\frac{j m_{\text{eff}} \omega}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sin(\lambda_2 l) AG_{\text{eff}}} - \frac{j \lambda_1^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sin(\lambda_2 l) \omega} \right].$$

对压电复合梁两端弯矩同截面偏转角 θ 的关系式进一步变换, 得到如下表达式:

$$\begin{cases} M_1 = Z_a \theta_1 + Z_b (\theta_2 + \theta_1) - KU, \\ M_2 = Z_a \theta_2 + Z_b (\theta_2 + \theta_1) - KU. \end{cases} \quad (9)$$

将 (9) 式中压电复合梁两端弯矩 M 类比为电压,

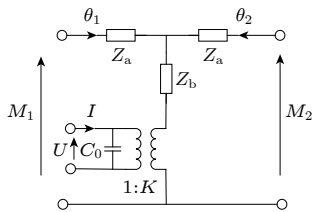


图 5 弯曲振动压电复合梁机电等效电路模型

Fig. 5. Electromechanical equivalent circuit model of the bending vibration piezoelectric composite beam.

将截面偏转角 θ 类比为电流, 机械阻抗类比为电阻抗, 由此可得如图 5 所示的压电复合梁弯曲振动的 M - θ 型机电等效电路. 图中 $Z_a = Z_1 + Z_2$ 和 $Z_b = -Z_2$ 分别为串联和并联机械阻抗, K 为机电转换系数 (由 (3) 式可得), C_0 为静态电容 (由 (5) 式可得).

2.3 弯曲振动夹心式压电换能器的等效电路模型

如图 6 所示, 换能器主要由等截面金属前盖板 (I)、压电陶瓷晶堆 (II)、等截面后盖板 (III) 组成, l_1 和 l_2 为前后金属盖板长度, r 为前后金属盖板半径, l_p 为压电陶瓷晶堆长度. 由于逆压电效应, 施加交流信号会导致压电陶瓷上下半部分产生反相振动, 从而激发换能器沿 Y 方向实现弯曲振动.

换能器在弯曲振动状态下金属前盖板和后盖板的弯曲振动类比为图 2 所示的等效电路, 压电陶瓷晶堆部分类比为图 5 所示的机电等效电路, 由于各部分之间满足机械上串联和电学上并联的边界条件, 即在相邻边界上满足弯矩 M 和截面偏转角 θ 连续性条件, 由图 2 和图 5 可得两端自由边界条件下弯曲振动夹心式压电换能器的整体机电等效电路如图 7 所示.

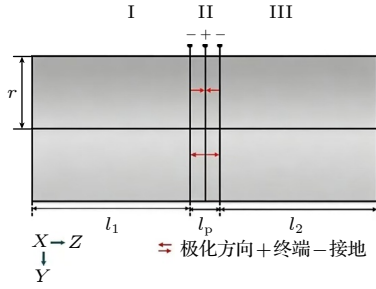


图 6 弯曲振动夹心式压电换能器 Y-Z 面结构示意图
Fig. 6. Schematic diagram of the Y-Z plane structure of a sandwich-type flexural vibration piezoelectric transducer.

由图 7 通过传输线阻抗变换, 将换能器的前盖板、后盖板以及压电陶瓷晶堆部分的机械阻抗转移到换能器的电学输入端, 由此可得弯曲振动夹心式压电换能器的输入机电阻抗表达式为

$$Z_{in} = \frac{1}{(K)^2/Z_4 + j\omega C_0}, \quad (10)$$

其中 $Z_4 = \frac{Z_F + Z_G}{Z_F Z_G} + Z_b$, $Z_F = Z_C + \frac{Z_B Z_C}{Z_B - Z_C}$, $Z_G = Z_E + \frac{Z_D Z_E}{Z_D - Z_E}$ 为中间传递阻抗参数. (10) 式不仅包含了弯曲振动夹心式压电换能器的各部分材料参数和尺寸参数, 而且与换能器的频率有关, 进一步可得换能器的输入机电阻抗-频率响应曲线. 在此基础上能够进一步计算出换能器的输入阻抗、共振频率、有效机电耦合系数、带宽等关键性能参数. 令 (10) 式的值为零, 可得换能器共振频率方程为

$$Z_{in} = \frac{1}{(K)^2/Z_4 + j\omega C_0} = 0. \quad (11)$$

由以上分析可知, 通过力-电类比可将换能器复杂的弯曲振动类比为图 7 所示的简明机电等效网络, 经过简单的电路分析推导可得换能器的输入机电阻抗表达式及共振频率方程. 显然, 基于上述等效电路模型可直接设计和分析弯曲振动夹心式压电换能器的振动特性. 与集总参数等效电路模型相比, 该模型可计算分析弯曲振动夹心式压电换能器各组成部件的结构尺寸及材料参数对整体性能参数的影响特性, 从而实现对换能器各部分结构尺寸的优化设计; 较之波动方程法, 其优势在于将复杂的微分方程的求解问题转化为简单的电路分析计算, 简化了问题的复杂性; 与传递矩阵法比较, 等效电路法具有更显明的物理意义, 计算过程更简明且能计算更多的机电性能参数; 与有限元法相比, 其计算时间显著缩短且对计算机的硬件资源要求更低.

3 振动性能研究

理论计算和仿真分析时假定弯曲振动夹心式压电换能器的两端自由, 且未考虑阻尼和损耗的影响. 换能器压电陶瓷材料为 PZT-8, 前后盖板材料为 7075 硬铝, 具体见表 1. 利用频率方程 (11) 与有限元方法计算了两个不同阶次的弯曲振动夹心式压电换能器共振频率, 计算结果如表 2 所列. 表中 l_1 和 l_2 为前后盖板长度, l_p 为压电陶瓷晶堆长度, r 和 r_e 为压电陶瓷环外径和内径, n 为共振阶次, f_e 为有限元计算值, f_c 理论计算值.

为了获得换能器频率响应特性, 利用 (10) 式和有限元法对一阶和二阶弯曲振动夹心式压电换能器的输入机电阻抗谱进行计算, 计算结果如图 8 所示, 图中红色曲线为理论计算结果, 黑色曲线为

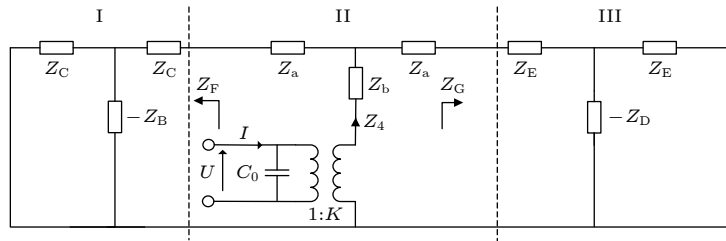


图 7 弯曲振动夹心式压电换能器机电等效电路模型
Fig. 7. Equivalent circuit model of the sandwich-type flexural vibration piezoelectric transducer.

表 1 弯曲振动夹心式压电换能器材料参数

Table 1. Material parameters of the sandwich-type flexural vibration piezoelectric transducer.

参数	取值	参数	取值	参数	取值	参数	取值
$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2810	$S_{33}^E/(10^{-11} \text{ Pa}^{-1})$	1.35	$E/10^{10} \text{ Pa}$	7.15	$S_{55}^E(10^{-11} \text{ Pa}^{-1})$	3.19
$G/(10^{10} \text{ Pa})$	2.69	$d_{33}/(10^{-10} \text{ C} \cdot \text{N}^{-1})$	2.40	$\rho_p/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	7700	$\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0$	1000

表 2 弯曲振动夹心式压电换能器共振频率计算结果

Table 2. Calculated results of the resonant frequencies for the sandwich-type flexural vibration piezoelectric transducer.

n	l_p/mm	l_1/mm	l_2/mm	r_p/mm	r_e/mm	f_e/Hz	f_c/Hz
1	10.00	50.00	50.00	25.00	10.00	12400	13158
2	10.00	30.00	100.00	25.00	10.00	17970	18199

有限元计算结果. 由图 8(a) 可知, 所设计的一阶弯曲振动换能器在其一阶弯曲共振模态附近较宽的频率范围内无其他杂波模态, 具有较好的频率隔离性; 由图 8(b) 可知, 所设计的二阶弯曲振动换能器同样具有较好的频率隔离性.

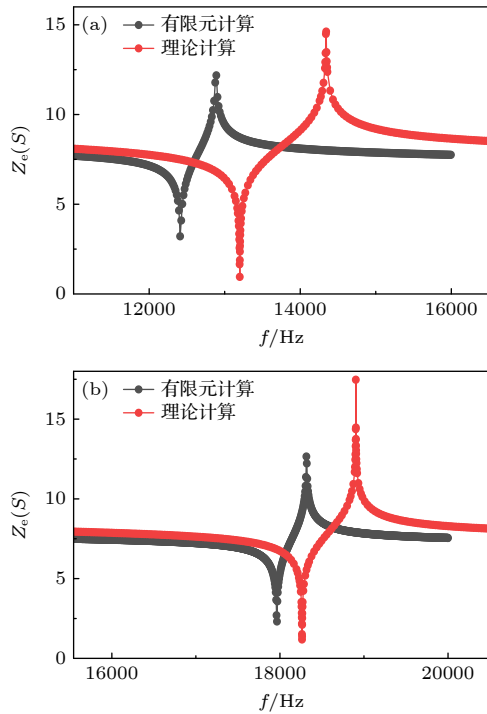


图 8 弯曲振动夹心式压电换能器阻抗-频率谱响应曲线 (a) 一阶弯曲振动; (b) 二阶弯曲振动

Fig. 8. Frequency response characteristics of the sandwich-type flexural vibration piezoelectric transducer: (a) In first-order bending vibration; (b) in second-order bending vibration.

如图 9 所示, 当两端自由一阶弯曲振动换能器工作在一阶弯曲振动模态时, 换能器存在两个弯曲振动波节点与三个波腹点. 为准确得到换能器波节点位置, 在换能器内部定义一条与母线平行的路径, 通过提取该路径的位移数据, 得到该弯曲振动

夹心式压电换能器的一阶弯曲振动位移曲线. 由图 10 所示, 一阶弯曲振动夹心式压电换能器的两端位移振幅最大、中间次之; 存在两个位移节点, 分别位于 $z = 29.55 \text{ mm}$, $z = 80.21 \text{ mm}$ 处.

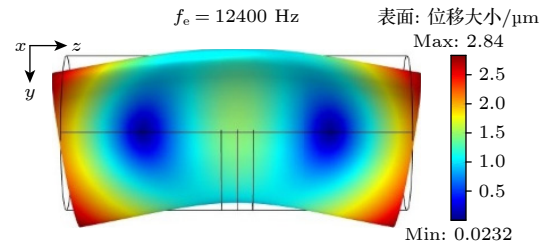


图 9 一阶弯曲振动夹心式压电换能器振动模态

Fig. 9. Vibration mode shape of the first-order sandwich-type flexural vibration piezoelectric transducer.

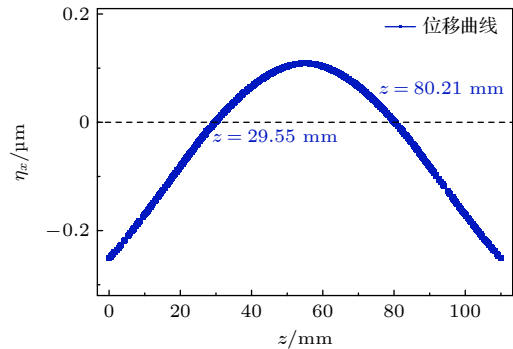


图 10 一阶弯曲振动夹心式压电换能器位移曲线

Fig. 10. Displacement curve of the first-order sandwich-type flexural vibration piezoelectric transducer.

为研究几何尺寸对一阶弯曲振动换能器共振频率的影响, 由于一阶弯曲振动换能器为对称结构, 在换能器横向尺寸不变的前提下, 仅改变换能器金属前后盖板长度在 30.00—60.00 mm 之间变化. 如图 11 所示, 一阶弯曲振动换能器的共振频率随金属前后盖板长度的增加而不断下降, 理论计算值同有限元计算值相吻合, 两种计算方法变化规律一致.

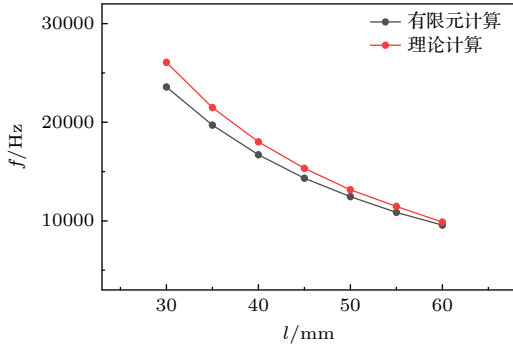


图 11 一阶弯曲振动换能器共振频率随金属前后盖板长度变化规律

Fig. 11. Resonance frequency of first-order flexural vibration transducer versus length of metal front/rear cover.

如图 12 所示, 当两端自由的二阶弯曲振动换能器工作在二阶弯曲振动模态时, 换能器存在三个弯曲振动波节点和四个波腹点. 采用与一阶弯曲振动换能器相同的方法, 得到二阶弯曲振动换能器弯位移曲线如图 13 所示, 二阶弯曲振动夹心式压电换能器的三个位移节点分别位于 $z = 17.94$ mm, $z = 63.60$ mm, $z = 121.36$ mm 处.

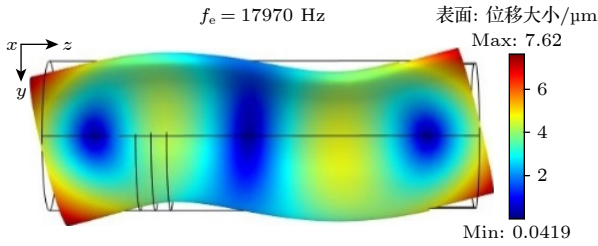


图 12 二阶弯曲振动夹心式压电换能器振动模式

Fig. 12. Second-order flexural vibration mode of sandwich piezoelectric transducer.

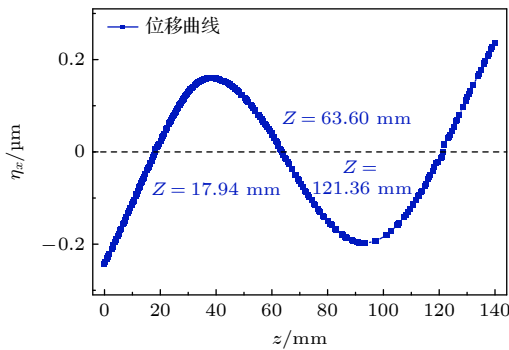


图 13 二阶弯曲振动夹心式压电换能器位移曲线

Fig. 13. Displacement curve of the second-order sandwich-type flexural vibration piezoelectric transducer.

为研究换能器几何尺寸对换能器二阶弯曲振动共振频率的影响, 由于二阶弯曲振动换能器为非

对称结构, 因此在换能器横向尺寸不变的情况下, 仅改变换能器后盖板 l_2 长度在 75.00—100.00 mm 之间变化, 且压电陶瓷仍位于换能器弯曲振动的波腹点. 由图 14 可知, 换能器二阶弯曲振动共振频率随后盖板长度的增加而不断降低, 理论计算值同有限元计算值相吻合, 两种计算方法变化规律一致.

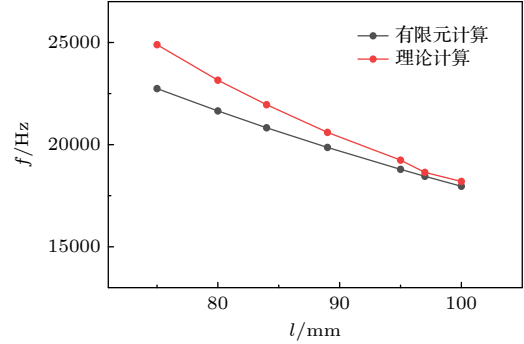


图 14 二阶弯曲振动夹心式压电换能器共振频率随后盖板长度变化规律

Fig. 14. Resonance frequency of second-order flexural sandwich piezoelectric transducer versus rear cover length.

4 实验测试

为验证弯曲振动夹心式压电换能器分布参数等效电路模型的准确性, 根据表 2 所列夹心式压电换能器的几何尺寸选用表 1 所列的材料参数加工了夹心式压电换能器如图 15 所示的实验样品, 表 3 中的实验样品采用与表 2 相同几何尺寸参数, 实验样品使用 12.9 级高强度内六角钛合金螺栓装配在一起, 在前盖板和后盖板与压电陶瓷片之间以及相邻压电陶瓷片之间有厚度为 0.3 mm 的铜电极片.

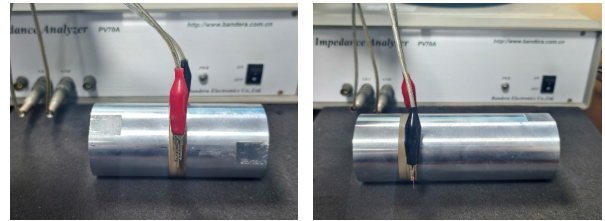


图 15 实验样品 (a) 一阶弯曲振动换能器; (b) 二阶弯曲振动换能器

Fig. 15. Experimental prototypes: (a) First-order flexural vibration transducer; (b) second-order flexural vibration transducer.

首先通过 PV70 A 阻抗分析仪测试实验样品的频率响应特性, 测试结果如图 16 所示. 由图 16

可知, 所设计的两个弯曲振动夹心式压电换能器在其共振模态附近较宽的频率范围内无其他杂波模态, 具有较好的频率隔离性, 这与理论计算结果和有限元仿真结果 (图 8) 完全一致.

表 3 实验样品结构尺寸

Table 3. Structural dimensions of the experimental prototypes.

n	l_p/mm	l_1/mm	l_2/mm	r_p/mm	r_e/mm
1	10.00	50.00	50.00	25.00	10.00
2	10.00	30.00	100.00	25.00	10.00

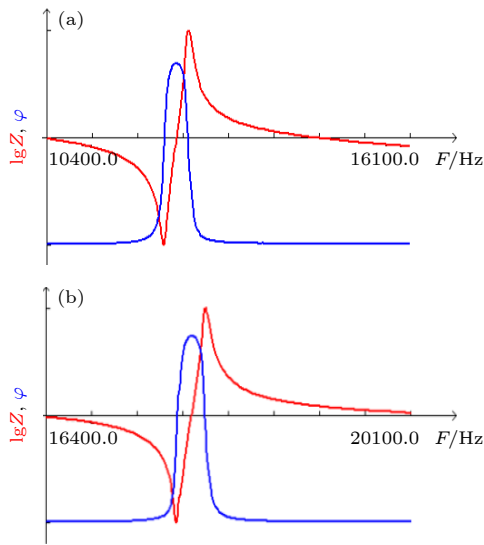


图 16 实验样品频响曲线 (a) 一阶弯曲振动换能器; (b) 二阶弯曲振动换能器

Fig. 16. Measured frequency response curves of the (a) first-order and (b) second-order flexural vibration transducers.

由图 16 所示的频响曲线可得一阶、二阶弯曲振动换能器的共振与反共振频率, 将实验测试所得的一阶、二阶弯曲振动换能器共振与反共振频率, 分别与有限元仿真值及理论计算值进行对比, 所得结果列于表 4. f_{ea} 为有限元计算的反共振频率, f_{ca} 为理论计算的反共振频率, f_t 和 f_{ta} 为实验测试的共振与反共振频率值. 有限元计算与理论计算的共振频率值的误差为 $\Delta_1 = |(f_e - f_c)|/f_e$, 误差在 1.27% 至 5.93% 之间, 理论计算值与实验测试值的误差为 $\Delta_2 = |(f_c - f_t)|/f_t$, 误差在 2.62%—6.89% 之间,

表 4 实验测试与有限元、理论计算结果的对比分析

Table 4. Comparative analysis of results from experimental, finite-element, and theoretical methods.

n	f_e/Hz	f_{ca}/Hz	f_c/Hz	f_{ta}/Hz	f_t/Hz	f_{ea}/Hz	Δ_1	Δ_2
1	12400	12885	13158	14333	12246	12626	5.93%	6.89%
2	17970	18330	18199	18876	17733	18024	1.27%	2.62%

可见本文提出的理论计算方法与实验测试基本一致.

有效机电耦合系数是评价弯曲振动夹心式压电换能器能量转换效率的重要参数, 其计算公式为 $K_{\text{eff}} = [1 - (f/f_a)^2]^{1/2}$, 式中 f 为共振频率, f_a 为反共振频率. 由表 4 可得, 一阶弯曲振动压电换能器的有限元计算、理论计算和实验测试所得到的有效机电耦合系数分别为 0.2717, 0.3965 和 0.2431, 二阶弯曲振动压电换能器的有限元计算、理论计算和实验测试所得到的有效机电耦合系数分别为 0.1972, 0.2654 和 0.2431, 无论是等效电路法还是有限元仿真计算的一阶弯曲振动夹心式压电换能器的有效机电耦合系数大于二阶弯曲振动夹心式压电换能器的有效机电耦合系数, 即换能器共振在低阶振动模式下具有更高的机电转换效率.

基于上述弯曲振动实验样品频率响应特性测试结果, 通过调节 DG822 信号发生器峰值电压为 20 V, 分别用实验测试的换能器的一阶 (12246 Hz)、二阶 (17733 Hz) 弯曲振动共振频率激发一阶和二阶弯曲振动换能器实验样品的相应弯曲振动模态. 利用 LV-S01 激光测振仪沿实验样品母线测量其弯曲振动位移振幅, 测试装置如图 17 所示. 实验测试结果如图 18 所示, 其中图 18(a) 为一阶弯曲振动换能器的位移振幅分布曲线, 图 18(b) 为二阶弯曲振动换能器的位移振幅分布曲线, 图中红色曲线为实验测试结果, 黑色曲线为有限元仿真结果. 有限元计算和实验测试所得换能器弯曲振动位移振幅分布一致, 由此可知, 本文将弯曲振动夹心式换能器的压电陶瓷晶堆设计在波腹处可以有效实现其一阶及二阶弯曲振动, 进一步验证了理论分析结果的可行性.



图 17 弯曲振动实验样品振动测试实验装置

Fig. 17. Experimental setup for the vibration testing of the bending vibration prototypes.

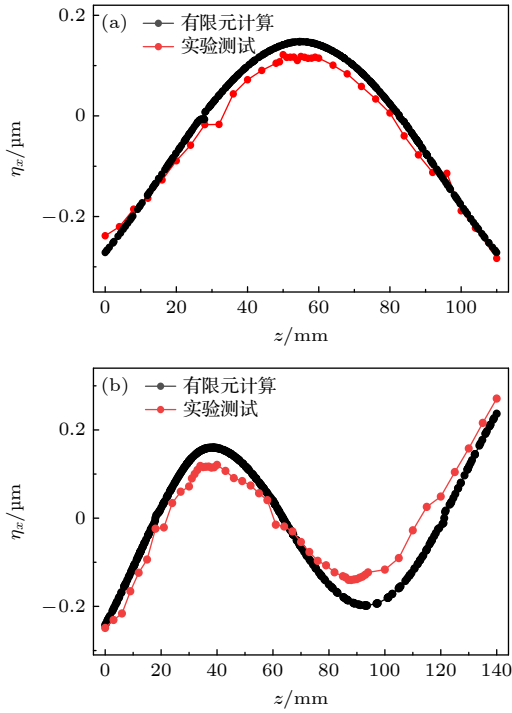


图 18 实验样品振型曲线 (a) 一阶弯曲振动换能器;
(b) 二阶弯曲振动换能器
Fig. 18. Measured mode shapes of the (a) first-order and (b) second-order flexural vibration transducers.

由上述理论计算、有限元仿真和实验测试结果可知, 三种方法所得结果基本一致, 但也存在一定范围的合理偏差, 误差来源主要是: 1) 实际换能器的材料参数与理论计算及有限元仿真中采用的理想材料参数之间存在一定的偏差, 在加工制作换能器各组成元件的过程中不可避免存在加工和测量精度, 使各元件的实际尺寸和理论设计的尺寸存在一定偏差; 2) 实验样品在实际工作时存在介电损耗与机械损耗, 同时装配过程中对压电陶瓷施加的预紧力会影响其有效刚度, 且理论模型中忽略了损耗和预紧力对换能器共振频率产生的影响, 这些实际情况必然带来实际模型与理想的理论模型存在一定的误差; 3) 换能器的实验样品中存在三个 0.3 mm 厚的铜电极片以及 12.9 级高强度内六角钛合金螺栓, 而理论计算时均进行了模型简化近似处理. 由于以上材料参数、元件尺寸偏差以及计算过程中的模型简化、忽略损耗等近似处理, 从而带来了理论计算和实验样品测试结果之间存在一定的误差, 但三种方法所得结果的趋势及偏差均在合理区间, 理论计算模型能够对弯曲振动夹心式压电换能器的工程设计提供较为精确的理论指导.

5 结 论

本文基于 Timoshenko 梁理论的动力学方程与机电类比原理, 建立了压电陶瓷工作在 d_{33} 模式下且压电陶瓷位于波腹处的圆形截面弯曲振动夹心式压电换能器的分布参数等效电路模型, 并进一步得到阻抗表达式及共振频率方程. 为验证理论模型的精确性, 基于等效电路法、有限元仿真设计了两个分别工作在一阶、二阶弯曲振动模态下的弯曲振动夹心式压电换能器, 加工制作了相应的换能器实验样品. 实验测试所得的换能器的共振频率、弯曲振动特性与等效电路法计算和有限元仿真模拟结果一致, 研究结果为圆形截面弯曲振动夹心式换能器的工程设计和结构优化提供了简明设计理论和实验数据.

参考文献

- [1] Lin S Y 2004 *Principle and Design of Ultrasonic Transducers* (Beijing: Science Press) p213 (in Chinese) [林书玉 2004 超声换能器的原理及设计 (北京: 科学出版社) 第 213 页]
- [2] Jiao Y, Liu W J, Pei Z J, Xin X J, Treadwell C 2005 *J. Manuf. Sci. Eng.* **127** 752
- [3] Wang Z Y, Rajurkar K P 1996 *J. Manuf. Sci. Eng.* **118** 376
- [4] Chen C, Liu Y, Guo J Z, Lin S Y 2024 *Sci. Sin. -Phys. Mech. Astron.* **54** 124311 (in Chinese) [陈诚, 刘洋, 郭建中, 林书玉 2024 中国科学: 物理学 力学 天文学 **54** 124311]
- [5] Hu F J, Wei X Y, Wang H B, Zhou J J, Feng G C 2024 *J. Appl. Acoust.* **43** 1053 (in Chinese) [胡俊毅, 魏翔宇, 王海波, 周佳骏, 冯耿超 2024 应用声学 **43** 1053]
- [6] Nakayama K, Tamura K 1968 *J. Eng. Ind.* **90** 119
- [7] Zhou Y X, Lin J F, Wang Z Y, Wang H R, Li S Y, Li W, Pan Q S 2026 *Ultrasonics* **161** 107930
- [8] Sun J H, Deng J, Zhang S J, Guan J H, Li J, Liu Y X 2025 *Ultrasonics* **158** 107822
- [9] Ye X Y, Wang X F, Xu B C, Qiu A Z 2026 *Micronanoelectron. Technol.* **63** 010103 (in Chinese) [叶鲜艳, 王雪菲, 许博成, 邱爱中 2026 微纳电子技术 **63** 010103]
- [10] Dai Z W, Zhang C S, Meng F S, Zhang G J, Wang R X, He C D, Jia L C 2026 *Measurement* **264** 120305
- [11] Ba Y, Li Y, Wang Y 2026 *Ultrasonics* **163** 107978
- [12] Pan R, Chai Y, Mo X P, Liu W Z, Zhang X Z 2024 *J. Appl. Acoust.* **43** 719 (in Chinese) [潘瑞, 柴勇, 莫喜平, 刘文钊, 张秀侦 2024 应用声学 **43** 719]
- [13] Lin J Y, Lin S Y, Xu J, Wang S, Zhong X H 2023 *Sci. Sin. -Phys. Mech. Astron.* **53** 254311 (in Chinese) [林基艳, 林书玉, 徐洁, 王升, 钟兴华 2023 中国科学: 物理学 力学 天文学 **53** 254311]
- [14] Ye F G, Cao H, Lin S Y 2010 *Piezoelectr. Acoustoopt.* **32** 410 (in Chinese) [叶发根, 曹辉, 林书玉 2010 压电与声光 **32** 410]
- [15] Li J G, Gao Z J, Chen X, Guan X W, Chen S J, Wang X, Lu W J, Fu X 2025 *J. Vibr. Shock* **44** 226 (in Chinese) [李建刚, 高仲杰, 陈璇, 关晓伟, 陈善靖, 王鑫, 卢万杰, 付雄 2025 振动与冲击 **44** 226]
- [16] Ye W X, Jiang H, Wang Y, Lin S Y 2025 *Acta Phys. Sin.* **74**

- 184302 (in Chinese) [叶文旭, 江昊, 王怡, 林书玉 2025 物理学报 **74** 184302]
- [17] Pan R, Mo X P, Chai Y, Zhang X Z, Tian Z F 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 194301 (in Chinese) [潘瑞, 莫喜平, 柴勇, 张秀侦, 田芝凤 2024 物理学报 **73** 194301]
- [18] Zhang X L, Liang B 2018 *Appl. Acoust.* **129** 284
- [19] Li F M, Liu S Q, Xu L, Chen Z J 2023 *J. Zhejiang Norm. Univ. (Nat. Sci.)* **46** 395 (in Chinese) [李凤鸣, 刘世清, 许龙, 陈赵江 2023 浙江师范大学学报 (自然科学版) **46** 395]
- [20] Zhang N N, Wu S J, Ling X N 2015 *Piezoelectr. Acoustoopt.* **37** 620 (in Chinese) [张宁宁, 吴胜举, 凌小娜 2015 压电与声光 **37** 620]
- [21] Li F M, Liu S Q, Xu L, Zhang H D, Zeng X M, Chen Z J 2023 *Sci. Sin. -Phys. Mech. Astron.* **53** 114311 (in Chinese) [李凤鸣, 刘世清, 许龙, 张海岛, 曾小梅, 陈赵江 2023 中国科学: 物理学 力学 天文学 **53** 114311]
- [22] Xu L, Li X S, Yao L, Gong T, Liang Z F 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 134301 (in Chinese) [许龙, 李雪松, 姚磊, 龚涛, 梁召峰 2025 物理学报 **74** 134301]
- [23] Chen Y H, Lin S Y 2025 *J. Appl. Acoust.* **44** 63 (in Chinese) [陈奕豪, 林书玉 2025 应用声学 **44** 63]
- [24] Xu L, Zhang D, Chen Y B 2023 *Acta Acust.* **48** 882 (in Chinese) [许龙, 张丹, 陈一博 2023 声学学报 **48** 882]
- [25] Xu X X, Gao B, Wu Z W, He Z X, Zhao N T 2025 *Trans. China Electrotech. Soc.* **40** 7449 (in Chinese) [徐修贤, 高兵, 吴泽伟, 何志兴, 赵能桐 2025 电工技术学报 **40** 7449]
- [26] Zhu H, Li J B, Ge X H, Li D P 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 194301 (in Chinese) [朱浩, 李俊宝, 葛晓辉, 李德鹏 2025 物理学报 **74** 194301]
- [27] Jiang D Y, Lou W L, Li Q 2025 *Noise Vibr. Control* **45** 46 (in Chinese) [姜鼎一, 娄威龙, 李清 2025 噪声与振动控制 **45** 46]
- [28] Martin G E 1964 *J. Acoust. Soc. Am.* **36** 1496
- [29] Wang P F 2013 *M. S. Thesis* (Haerbin: Harbin Institute of Technology) (in Chinese) [王鹏飞 2013 硕士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工业大学)]
- [30] Ren W B, Liu Y, Lin S Y 2025 *J. Appl. Acoust* **44** 1102 (in Chinese) [任文博, 刘洋, 林书玉 2025 应用声学 **44** 1102]
- [31] Wang L, Hofmann V, Bai F, Jin J M, Liu Y, Twiefel J 2018 *Int. J. Mech. Sci.* **138-139** 229
- [32] Wang L, Hofmann V, Bai F, Jin J M, Twiefel J 2018 *Mech. Syst. Sig. Process.* **108** 216
- [33] Zhou G P, Li M X 2000 *J. Acoust. Soc. Am.* **107** 1358
- [34] Zhou G P 2000 *Ultrasonics* **38** 979
- [35] Zhou G P, Zhang Y H, Zhang B F 2002 *Ultrasonics* **40** 907
- [36] Wang L, Wang J A, Jin J M, Yang L, Wu S W, Zhou C C 2022 *Mech. Syst. Sig. Process.* **168** 108644

Equivalent circuit of a cylindrical sandwich piezoelectric transducer in flexural vibration*

XU Long^{1)2)†} LI Zhiqiang¹⁾ GONG Tao²⁾ WU Delin^{3)‡}

1) (College of Science, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

2) (Institute of Intelligent Manufacturing Technology, Shenzhen Polytechnic University, Shenzhen 518055, China)

3) (Zhejiang Key Laboratory of Acoustic Intelligent Sensing and Advanced Measurement, Key Laboratory of Acoustics and Vibration Applied Measuring Technology, State Administration for Market Regulation, Hangzhou 310018, China)

(Received 22 January 2026; revised manuscript received 24 February 2026)

Abstract

Due to the inherent complexity of flexural vibration systems, a comprehensive yet concise equivalent circuit analytical model for sandwich-type piezoelectric flexural vibration transducers has not been fully established. The equivalent circuit method, valued for its simplicity, intuitiveness, and clear physical significance, has become a crucial theoretical tool for the design and analysis of ultrasonic vibration systems. To refine the theoretical design model for sandwich-type piezoelectric flexural vibration transducers, an $M-\theta$ distributed parameter equivalent circuit model for transducers with a circular cross-section is developed based on Timoshenko beam theory and the electromechanical analogy principle. From the equivalent circuit model of the sandwich-type flexural vibration piezoelectric transducer, the input impedance expression, resonance frequency equations, and the effective electromechanical coupling coefficient are derived. To validate the accuracy of the

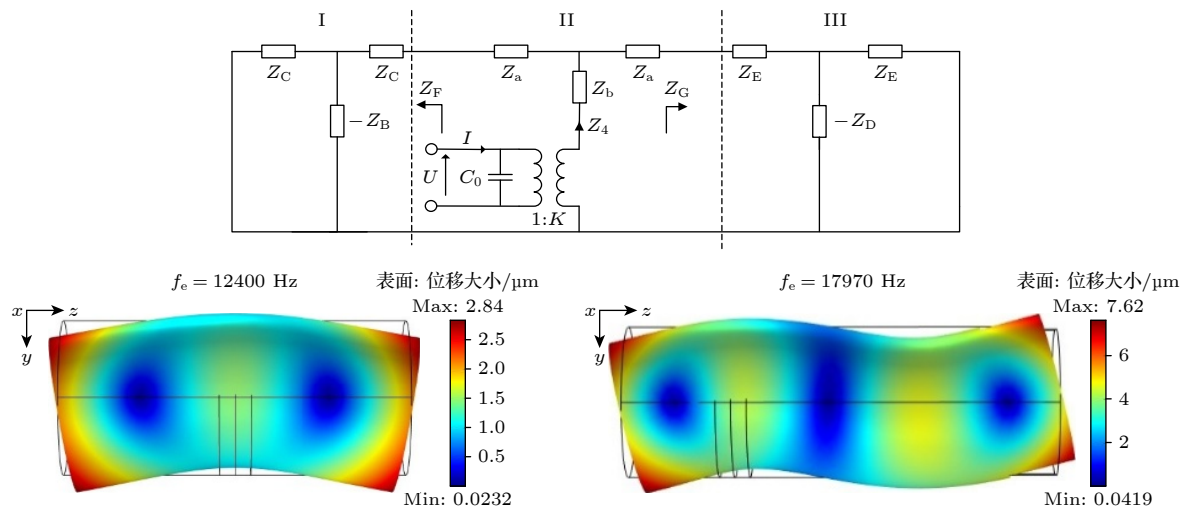
* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12074354), the Open Fund of Key Laboratory of State Administration for Market Regulation, China (Grant No. AVL202302), and the Scientific Research Program of Zhejiang Provincial Administration for Market Regulation, China (Grant No. ZD2024007).

† Corresponding author. E-mail: xulong@cjlu.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: wdl19911218@126.com

theoretical model, two sandwich-type piezoelectric flexural vibration transducers operating in the first-order and second-order flexural vibration modes, respectively, are designed based on calculations from the equivalent circuit model and finite element simulation results. Two corresponding experimental prototypes are fabricated. The measured resonance frequencies and flexural vibration characteristics of the transducers are consistent with the results from both the equivalent circuit theory and finite element simulations. This study provides a precise, concise design theory and experimental data to support the engineering design and structural optimization of circular cross-section sandwich-type flexural vibration transducers.

Keywords: sandwich-type piezoelectric transducer, flexural vibration, equivalent circuit, resonance frequency equation



DOI: [10.7498/aps.75.20260118](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260118)

CSTR: [32037.14.aps.75.20260118](https://cstr.net.cn/32037.14.aps.75.20260118)

弯曲振动圆柱形夹心式压电换能器的等效电路

许龙 李志强 龚涛 吴德林

Equivalent circuit of a cylindrical sandwich piezoelectric transducer in flexural vibration

XU Long LI Zhiqiang GONG Tao WU Delin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 121001 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20260118

CSTR: 32037.14.aps.75.20260118

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20260118>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于声黑洞结构的夹心式弯曲振动超声换能器

Sandwich-type flexural vibration ultrasonic transducer based on the structure of acoustic black hole

物理学报. 2025, 74(18): 184302 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250767>

基于传输矩阵法的任意变厚度环型压电超声换能器

Arbitrary variable thickness annular piezoelectric ultrasonic transducer based on transfer matrix method

物理学报. 2023, 72(5): 054304 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222110>

基于声黑洞设计理论的径向夹心式径-弯复合换能器

Radial sandwich radial-bending composite transducer designed based on acoustic black hole theory

物理学报. 2024, 73(8): 084302 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231983>

纵弯正交耦合压电超声振动系统的设计及振动性能

Design and vibration performance study of longitudinal-bending orthogonal coupled piezoelectric ultrasonic vibration system

物理学报. 2025, 74(13): 134301 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250294>

压电圆环径向弯曲振动与激励研究

Study of radial bending vibration and excitation of piezoelectric rings

物理学报. 2024, 73(19): 194301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240887>

非线性磁电换能器模型的谐振磁电效应分析及其输出功率优化

Resonance magnetoelectric effect analysis and output power optimization of nonlinear magnetoelectric transducer model

物理学报. 2023, 72(11): 117501 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222277>