

具有准周期势的三维高次非线性薛定谔方程的局域相干结构*

王洋¹⁾ 刘官厅^{1)†} 李美玉¹⁾²⁾

1) (内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)

2) (呼伦贝尔学院数学科学学院, 海拉尔 021008)

(2026年2月1日收到; 2026年3月26日收到修改稿)

通过构造高维准晶系中的谱重整化方法, 研究了具有准周期势的三维立方-五次非线性薛定谔系统的局域相干结构, 得到了该系统的孤子结构. 对不同对称性的二维准晶结构, 均获得了稳态孤子解, 并给出了其存在域、形态及功率特性. 数值结果表明, 孤子峰值随孤子特征值增大而增大, 宽度随孤子特征值增大而减小, 且准晶对称性越高势场束缚越强. 基于 Vakhitov-Kolokolov 判据, 证明了五重旋转对称性在传播常数范围内的稳定性, 但在大于五重旋转对称性的势场中功率-传播常数曲线出现极值点, 表明非线性与准周期耦合可能诱发新的失稳机制, 直接对极值部分进行数值模拟验证了孤子的动力学稳定性, 证实了立方-五次非线性与准周期势可协同支持稳定的二维空间孤子, 为准晶光子体系中的光局域态调控提供了理论基础. 该方法不受势场对称性的限制, 适用于多种对称性的非周期系统, 具有较好的普适性.

关键词: 三维立方-五次非线性薛定谔方程, 谱重整化方法, 准周期势, 孤子

DOI: 10.7498/aps.75.20260181

CSTR: 32037.14.aps.75.20260181

1 引言

孤子作为非线性系统中色散(或衍射)与非线性自聚焦相平衡而产生的局域化波包, 其研究已从传统周期性晶格拓展至准晶结构, 在凝聚态物理、非线性光学及玻色-爱因斯坦凝聚等领域, 对孤子行为的理解具有基础意义^[1-6]. 周期性势场中的孤子理论得益于平移对称性, 可借助 Bloch 波与能带结构进行系统性分析^[7-10]. 然而, 准晶结构虽具备长程有序性, 却缺乏平移对称性, 导致其能谱呈现临界局域、分形等独特性质, 并为非线性局域化激发了新的物理图景^[11-15]. 近年来, 国内学者对非线性

薛定谔方程及其推广模型的局域波结构、精确解构造以及数值求解方法开展了广泛研究, 例如高阶怪波、周期团块波、多极矢量孤子等局域结构的构造, 以及基于相似变换和物理信息神经网络的方法求解非线性薛定谔方程^[16-20]. 基于 PINN 的深度学习在非线性的偏微分方程的求解与参数识别方面取得了显著的进展, 例如在非线性的薛定谔方程流氓波、可变系数模型以及 Manakov 系统向量局域波的研究中均获得了有效应用^[21-23].

求解非线性演化方程的局域解(即孤子解)需借助多种数值方法, 例如传统的射击法、松弛技术和自治法等, 这些方法在处理多维问题或复杂势场时, 其效率和适用性常受到限制^[24]. 以准晶势为例,

* 国家自然科学基金(批准号: 12162027)、内蒙古自然科学基金重点项目(批准号: 2024ZD21, 2025ZD024)、内蒙古自治区一流学科科研专项项目(批准号: YLXKZX-NSD-001)、内蒙古师范大学基本科研业务费(批准号: 023JBZD005)和内蒙古自治区研究生科研创新项目(批准号: KC2025016S).

† 通信作者. E-mail: guantingliu@imnu.edu.cn

由于平移对称性的缺失, 基于 Bloch 定理的线性本征方法不再适用, 孤子的存在性与稳定性主要取决于势场的对称性、调制深度及空间维度. 数值研究表明, 即便在一维五重或八重对称准晶中, 非线性效应仍能支持稳定的基态孤子及涡旋孤子^[25-27]. Petviashvili^[28] 提出的一种将控制方程转换至傅里叶空间、并依据非线性项齐次度确定收敛因子的方法, 在求解二维 *KdV* 类方程 (如 *KP* 方程) 中显示出良好效果, 但该方法成功运用严格依赖于方程中非线性项具有固定的齐次度. 然而在非线性光学等领域, 许多模型包含不同齐次度的非线性项 (如三次-五次组合) 甚至非齐次的非线性形式 (如可饱和非线性), 此时 Petviashvili 方法不再直接适用. 因此, 针对具有非周期势、多维结构或混合非线性形式的系统, 发展高效且稳健的数值方法, 对于精确获取孤子解具有重要意义.

Ablowitz 和 Musslimani^[29] 提出了一种用于计算非线性波导中孤子的广义数值方案, 称为谱重整化方法 (spectral renormalization method). 该方法的核心思想是将控制方程转换到傅里叶空间, 并寻找与代数方程耦合的非线性非局部积分方程. 这种耦合机制能够有效地防止数值方案发散. 随后通过快速收敛的迭代方案获得光学模式. 该方法可高效应用于包括具有不同齐次性的高阶非线性项在内的广泛问题. 近年来, 谱重整化方法已被成功应用于光晶格、无序介质及高维系统中的孤子研究, 展现出良好的稳定性和普适性^[30-33]. 然而, 将该方法系统地应用于不同对称性准晶势下的孤子求解, 尤其是系统探究准晶序参量 (如调制阶数 N) 对孤子形态与稳定性的影响规律, 目前研究仍不充分.

本文采用谱重整化方法, 求得了二维准晶势作用下非线性薛定谔方程的基态孤子解, 系统地分析了准晶结构复杂程度对孤子振幅、空间局域特性及其功率依赖行为的影响. 全文结构安排如下: 首先阐述谱重整化方法的基本原理与实施步骤, 并针对立方-五次非线性模型, 验证在准晶格中心附近存在局域化孤子解. 继而通过对该模型下非线性薛定谔方程的直接数值求解, 分析孤子非线性区域与线性扰动下的稳定性特征.

2 理论模型与问题表述

光束沿 z 轴在具有横向折射率调制的介质中

传播的动力学行为可通过立方-五次三维非线性薛定谔方程来描述^[34]:

$$iq_z + \Delta q + \alpha|q|^2q + \beta|q|^4q + V(x, y)q = 0, \quad (1)$$

其中复数 $q(x, y, z)$ 表示沿纵向坐标 z 传播的光场在横向平面 (x, y) 上的复振幅包络; Δq 是对 q 的拉普拉斯算子, 参数 α 和 β 分别代表三次和五次非线性项系数, $V(x, y)$ 是外部势函数.

在三维非线性薛定谔方程中, 由于采用了慢变包络近似, 光束沿传播方向 z 变化缓慢, 因此拉普拉斯算子 Δ 只包含对横向坐标 x 和 y 的二阶偏导, 而不包含对 z 的偏导, 即 $\Delta q = q_{xx} + q_{yy}$, 对应衍射效应; 参数 α 和 β 通常为复数以包含增益或损耗机制, 在本研究中不考虑耗散效应, 故将其取为实数.

外部势函数 $V(x, y)$ 可表示为多个相位调制平面波的强度总和, 具体表达式如下^[35]:

$$V_N(x, y) = \frac{V_0}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(k_x x + k_y y)} \right|^2, \quad (2)$$

其中, V_0 表示势能的峰值深度,

$$V_0 = \max_{x, y} [V(x, y)].$$

波矢量 \mathbf{k}_n 由公式定义:

$$(k_x, k_y) = (K \cos(2\pi n/N), K \sin(2\pi n/N)).$$

这种二维势在光学中可通过平面波和相位函数的干涉物理实现^[35]. 例如, 这些相位函数可由不同的涡旋构型组成^[36], 而涡旋构型又可使用计算机生成全息图构建^[35]. 当参数 $N = 1, 2, 3, 4$ 或 6 时, 对应的势能会形成与标准二维晶体结构相对应的周期性晶格; 而当 $N = 5$ 或 $N > 6$ 时, 则会形成准晶结构. 这类结构在原点附近具有局部对称性且存在长程有序性, 但与周期性晶体不同, 它们不具备平移不变性, 对应准晶结构如图 1 所示. 2006 年, Freedman 等^[33] 通过光学诱导法在 Penrose 及其他准晶结构中成功观测到了孤子现象.

3 准晶中的谱重整化方法

将方程 (1) 转化成如下形式的广义非线性薛定谔方程 (GNSE):

$$iq_z = -\Delta q - (\alpha|q|^2 + \beta|q|^4 + V(x, y))q. \quad (3)$$

为寻求该方程的稳态孤子解, 采用标准的稳态假设:

$$q(x, y, z) = u(x, y)e^{i\mu z}, \quad (4)$$

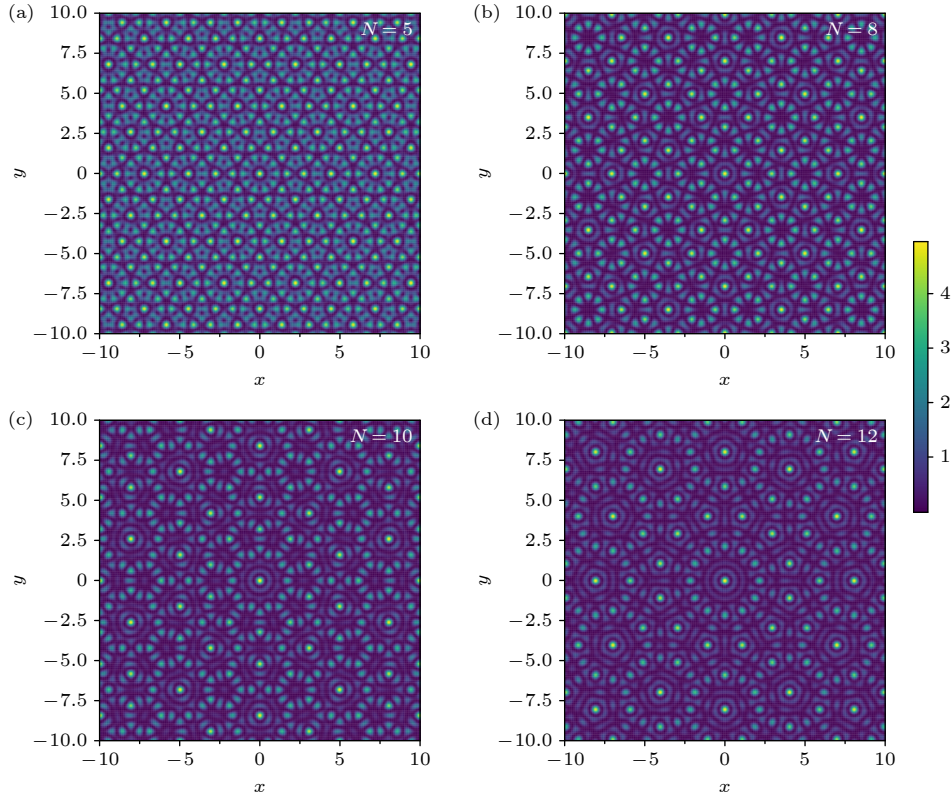

 图 1 不同 N 值下的二维准晶势结构

 Fig. 1. Two-dimensional quasiperiodic potential structures under different N values.

其中 $u(x, y)$ 为实值局域化函数, 满足边界条件:

$$u \rightarrow 0 (|x|, |y| \rightarrow \infty). \quad (5)$$

将 (4) 式代入 (3) 式, 消去相位因子后, 得到对应的非线性本征值问题 (NEVP):

$$\mu u = \Delta u + (V(x, y) + \alpha|u|^2 + \beta|u|^4)u. \quad (6)$$

对方程 (6) 做如下变换:

$$\hat{L}(i\partial_\xi) = \Delta u, F[|u|^2, \xi] = V(\xi) + \alpha|u|^2 + \beta|u|^4. \quad (7)$$

得到

$$\mu u = \hat{L}(i\partial_\xi)u + F[|u|^2, \xi]u, \quad (8)$$

其中, ξ 为横向空间变量 (对应于 x, y); ∂_ξ 表示对横向坐标的偏导, 且该系统在传播方向 z 上具有平移对称性.

由于方程 (8) 同时耦合未知函数 u 与特征值 μ , 且非线性项的存在破坏了系统的可积性, 该非线性本征值问题通常无法通过解析方法求解, 需借助数值技术进行处理. 为此, 采用谱重整化方法进行求解. 将 $\hat{L}(i\partial_\xi)$ 转化为 $\hat{L}(k)$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, 对方程 (8) 两边进行傅里叶变换, 得

$$\mu \hat{u}(\mathbf{k}) = -|\mathbf{k}|^2 \hat{u}(\mathbf{k}) + \mathcal{F}[F[|u|^2, x, y]u](\mathbf{k}). \quad (9)$$

将方程 (9) 整理并取傅里叶逆变换, 得到关于 u 的不动点方程:

$$u = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\mu + |\mathbf{k}|^2} \mathcal{F}(F[|u|^2, x, y]u) \right]. \quad (10)$$

由此可建立如下迭代格式:

$$\hat{u}^{(n+1)}(\vec{k}) = \frac{\mathcal{F}[(V(x, y) + \alpha|u^{(n)}|^2 + \beta|u^{(n)}|^4)u^{(n)}](\mathbf{k})}{\mu + |\mathbf{k}|^2},$$

$$u^{(n+1)} = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}^{(n+1)}], \quad (11)$$

其中, 孤子特征值 μ 作为已知参数输入.

初始猜测通常取高斯型函数:

$$u^{(0)}(x, y) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\omega^2}}. \quad (12)$$

迭代持续进行, 直至满足收敛判据:

$$\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\| < \varepsilon. \quad (13)$$

直到 ε 达到 10^{-10} .

4 立方-五次非线性模型下准晶势中形成的格点孤子

本节系统地研究了立方-五次非线性薛定谔方程在不同对称性的准晶势场中的局域孤子解. 所采

用的外部势由 N 个相同振幅的平面波叠加而成, 分别对应 $N = 5, 8, 10, 12$ 的准晶格结构. 研究表明, 在自聚焦立方非线性介质中, 光学晶格 (包括周期与准周期结构) 并非孤子稳定的必要条件^[37]; 立方与五次非线性的竞争可有效维持二维孤子的稳定性. 特别地, 当非线性项均为自聚焦型 (如取系数 $\alpha = 1, \beta = 0.2$) 时, 孤子易发生坍塌, 此时必须依靠光学晶格才能实现稳定. 该稳定机制源于五次非线性项随光强增长更快, 其提供的饱和效应能够抑制立方非线性导致的聚焦失稳, 从而支持二维系统中局域孤子态的形成.

数值结果表明, 随着准晶势对称阶数 N 的变化, 晶格孤子的存在区间在孤子特征值轴上发生系统性的迁移与分化. 在本文所考虑的参数范围内, 孤子解并非集中分布于单一带隙, 而是形成了四个彼此区分的存在区域. 具体而言, 这些区域分别位于 $\mu \in [1.02, 1.19], \mu \in [0.65, 0.75], \mu \in [0.52, 0.60], \mu \in [0.43, 0.50]$, 其对应关系由准晶势的对称阶数 $N = 5, 8, 10, 12$ 所决定.

为考察不同孤子特征值存在区域内稳态孤子解在空间结构上的具体表现, 本文在各特征区间中选取代表性参数点, 计算并展示相应的晶格孤子解. 相关结果被统一汇总于同一组子图中, 从而在相同坐标与尺度下对比不同准晶对称阶数对孤子空间局域特性的影响, 如图 2 所示.

图 3 展示了不同准晶阶数 N 下沿对角线方向的孤子剖面, 覆盖了所考虑的 μ 范围内的全部稳态孤子解, 直观地呈现了孤子在准晶势场中的空间结构. 随着 μ 增大, 孤子峰值显著增强, 而剖面宽度同步收缩, 表现出从弱局域态向强局域态的连续过渡. 这一现象反映了非线性效应随孤子特征值增强而加剧, 使能量更紧密地束缚于势阱中心. 所有剖面均保持良好的对称性, 进一步验证了所选参数区间内孤子结构的稳定性. 上述结果表明, 尽管不同准晶对称阶数下孤子解的存在区间位于不同的孤子特征值范围, 其空间结构却遵循一致的演化趋势: 准晶阶数的提高持续增强对孤子的横向束缚, 使其由相对宽展的局域态逐步过渡为高度紧致的

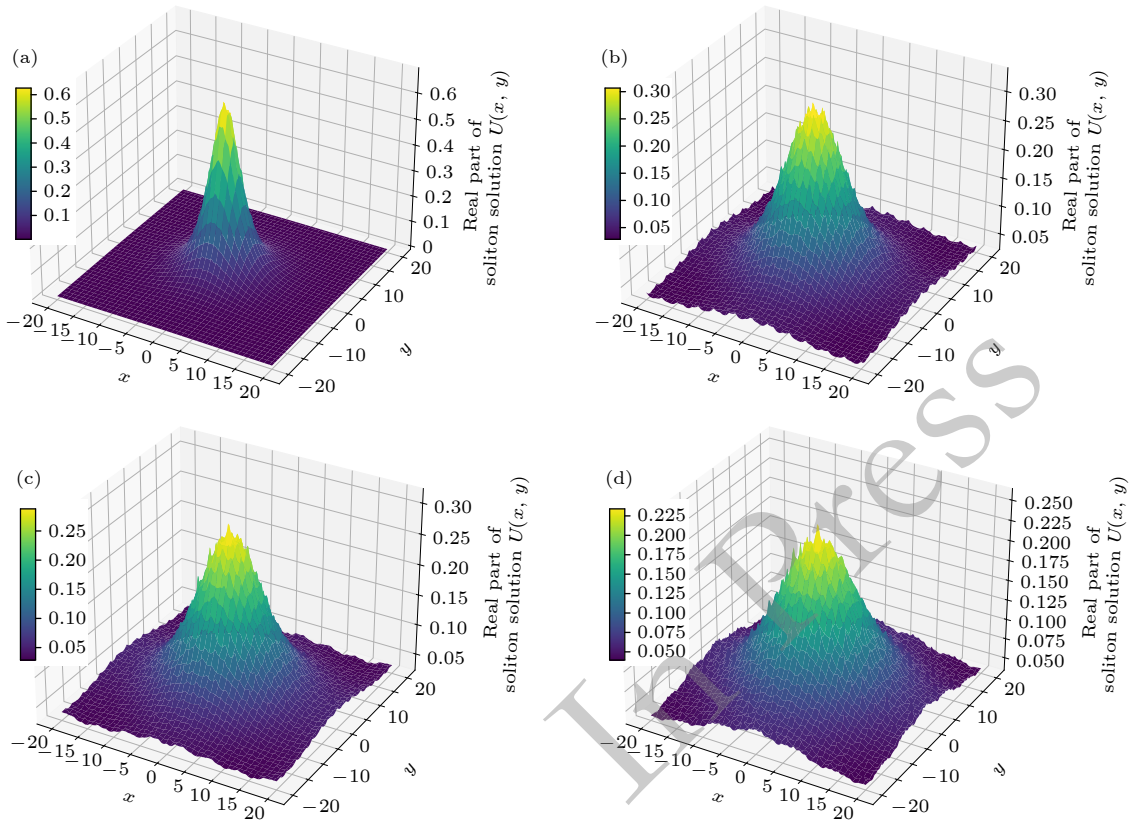


图 2 (a) $N = 5, V_0 = 5, \mu = 1.10$ 的晶格孤子的模; (b) $N = 8, V_0 = 5, \mu = 0.66$ 的晶格孤子的模; (c) $N = 10, V_0 = 5, \mu = 0.53$ 的晶格孤子的模; (d) $N = 12, V_0 = 5, \mu = 0.44$ 的晶格孤子的模

Fig. 2. (a) $N = 5, V_0 = 5, \mu = 1.10$ lattice soliton mode; (b) $N = 8, V_0 = 5, \mu = 0.66$ lattice soliton mode; (c) $N = 10, V_0 = 5, \mu = 0.53$ lattice soliton mode; (d) $N = 12, V_0 = 5, \mu = 0.44$ lattice soliton mode.

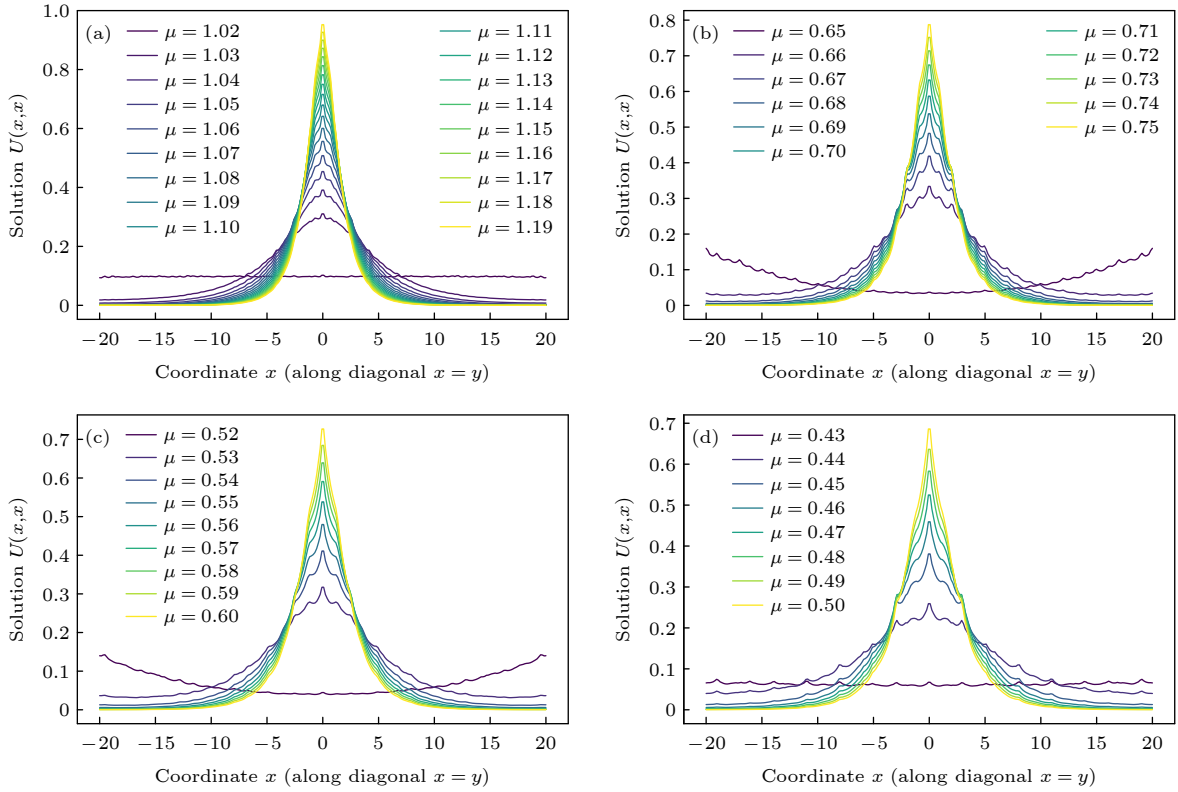


图 3 准晶阶数 N 不同时, 沿对角线方向孤子剖面随 μ 的演化 (a) $N = 5$; (b) $N = 8$; (c) $N = 10$; (d) $N = 12$

Fig. 3. Evolution of the soliton cross-section along the diagonal direction with μ for different N : (a) $N = 5$; (b) $N = 8$; (c) $N = 10$; (d) $N = 12$.

模式, 进一步说明准晶势的几何复杂性主要通过调控空间束缚强度影响孤子形态, 而未改变其基态解的基本性质.

从物理角度来看, 在非线性薛定谔方程中孤子特征值 μ 与局域模的能量集中程度密切相关. 随着 μ 的增大, 系统中的有效非线性自聚焦作用增强, 使得光场能量更加集中于势阱中心, 从而导致孤子峰值增加而空间宽度减小. 这表明非线性聚焦效应与准晶势场的空间束缚共同作用, 促使能量在局域区域内进一步压缩. 这种现象可从准晶势的空间结构理解, 随着对称阶数 N 的增加, 势场由更多方向的干涉平面波叠加形成, 其空间调制结构更加复杂, 局域势阱的分布更加密集, 从而增强了对光场能量的横向束缚能力, 使孤子更容易被限制在局域区域内.

非 Kerr 非线性对孤子动力学具有新效应, 并为光晶格应用提供了新可能性. 立方-五次非线性使孤子族呈现双稳态和多稳态特性. 通过计算其功率分布, 能够有效地揭示系统的多稳特性. 孤子总功率的定义为 [38]

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)|^2 dx dy. \quad (14)$$

在自聚焦非线性背景下, 功率-孤子特征值 ($P-\mu$) 曲线的变化趋势能够反映系统内部非线性平衡机制的改变. 因此, 对不同准晶对称阶数下功率-孤子特征值关系进行系统的比较, 是理解准晶势调控孤子动力学行为的重要途径, 如图 4 所示.

图 4 展示了不同准晶对称阶数下稳态孤子解的功率-孤子特征值关系. 在立方-五次自聚焦非线性模型中, 孤子功率 P 随孤子特征值 μ 的增加总体呈递减趋势, 符合 VK 判据所要求的稳定性必要条件. 随着准晶阶数 N 增大, 曲线在局部出现轻微非单调性及拐点, 这是高阶准晶势与立方-五次非线性共同作用的直接结果. 根据 VK 判据, 功率曲线的下降段 ($dP/d\mu < 0$) 对应的孤子解满足稳定性必要条件 [23], 而拐点附近或上升段 ($dP/d\mu > 0$) 的解在 VK 意义下属于潜在不稳定区间.

功率-特征值曲线中的局部极值点反映了系统中不同物理机制之间的竞争关系. 在本模型中, 立方非线性提供自聚焦效应, 而五次非线性在高光强区域产生类似饱和的调制作用, 两者之间的竞争会改变孤子族的分支结构. 当准晶势的空间调制进一步引入非均匀束缚时, 系统的有效势能结构被重新

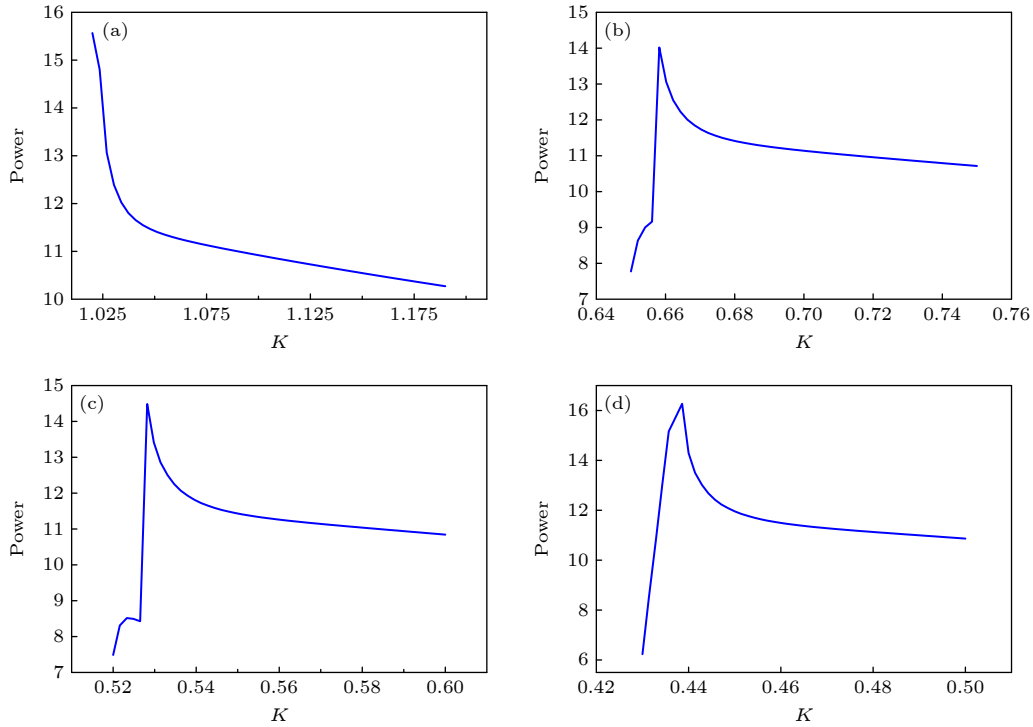


图 4 孤子功率 P 与不同 N 时的自聚焦立方和自聚焦五次方模型 $V_0 = 5.0$ 的关系 (a) $N = 5$; (b) $N = 8$; (c) $N = 10$; (d) $N = 12$
 Fig. 4. Soliton power P for the self-focusing cubic and quintic models for different N ($V_0 = 5.0$): (a) $N = 5$; (b) $N = 8$; (c) $N = 10$; (d) $N = 12$.

塑造, 从而导致功率曲线出现局部非单调行为.

5 线性稳定性预测的动力学验证

现针对这些孤子的线性稳定性这一关键问题展开研究. 为此, 本文对方程 (1) 在孤子附近进行了线性化处理. 对稳态孤子添加随机扰动作为初始条件:

$$u = \exp(i\mu z)[u_0(x, y) + \varepsilon\tilde{u}(x, y, z)], \quad (15)$$

其中 $u_0(x, y)$ 是计算出的晶格孤子, εu 是微扰项.

当 $\varepsilon \ll 1$ 时, u 的线性化方程为

$$i\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y^2} + (-\mu + V(x, y) + 2\alpha|u_0|^2 + 3\beta u_0^2 u_0^{*2})\tilde{u} + (\alpha u_0^2 + 2\beta u_0^3 u_0^*)\tilde{u}^* = 0. \quad (16)$$

利用分步傅里叶法在 z 方向演化原方程, 并记录峰值幅度:

$$A(z) = \max_{x,y}|q(x, y, z)|.$$

为了检验上述临界稳定性结论对晶格对称性的鲁棒性, 图 5—图 7 给出了在晶格序数 $N = 8$,

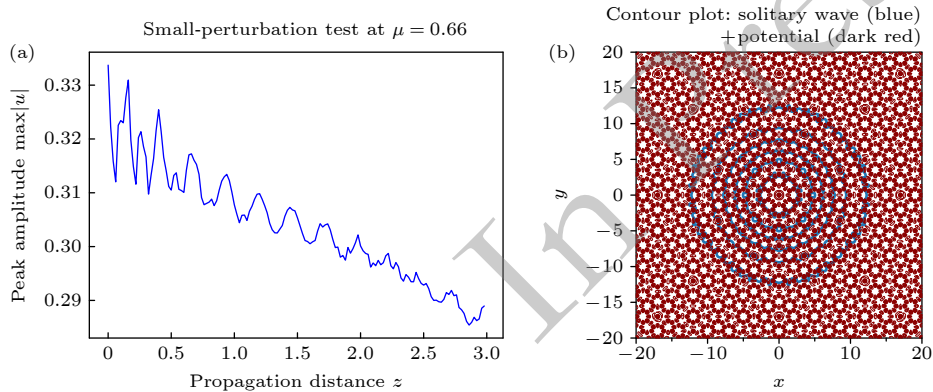


图 5 (a) 有 $V_0 = 5$, $N = 8$, $\mu = 0.66$ 时晶格孤子线性演化; (b) 传播后叠加在 $N = 8$ 势函数上的基本孤子沿对角轴的横截面
 Fig. 5. (a) Linear evolution of the lattice soliton for $V_0 = 5$, $N = 8$, $\mu = 0.66$; (b) cross-section of the fundamental soliton along the diagonal axis after propagation, superimposed on the potential for $N = 8$.

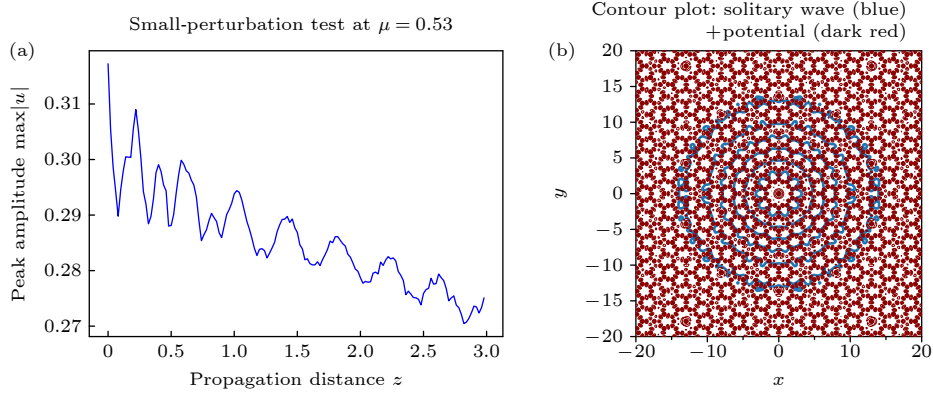


图 6 (a) 有 $V_0 = 5$, $N = 10$, $\mu = 0.53$ 时晶格孤子线性演化; (b) 传播后叠加在 $N = 10$ 势函数上的基本孤子沿对角轴的横截面
Fig. 6. (a) Linear evolution of the lattice soliton for $V_0 = 5$, $N = 10$, $\mu = 0.53$; (b) cross-section of the fundamental soliton along the diagonal axis after propagation, superimposed on the potential for $N = 10$.

10, 12 情形下, 选取各自功率-孤子特征值曲线拐点附近的基本晶格孤子在弱随机扰动作用下的动力学演化结果. 在所有情形中, 孤子的峰值幅度

$\max |U|$ 均随传播距离保持有界振荡, 未出现指数型增长行为, 表明即便在 VK 判据对应的临界参数区域内, 孤子仍未触发动力学失稳.

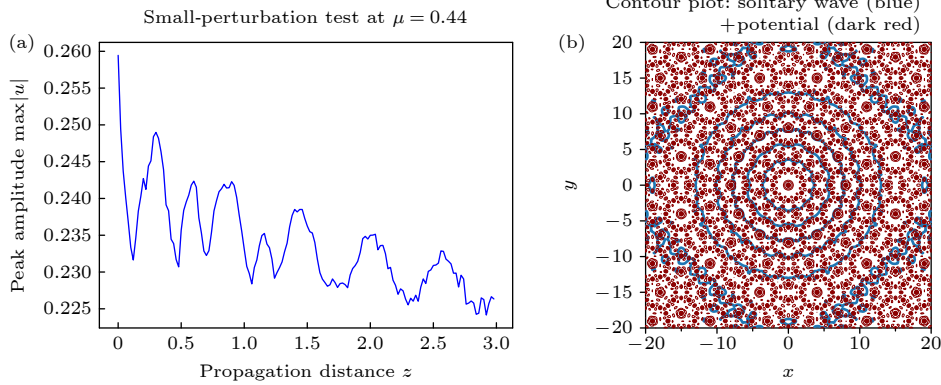


图 7 (a) 有 $V_0 = 5$, $N = 12$, $\mu = 0.44$ 时晶格孤子线性演化; (b) 传播后叠加在 $N = 12$ 势函数上的基本孤子沿对角轴的横截面
Fig. 7. (a) Linear evolution of the lattice soliton for $V_0 = 5$, $N = 12$, $\mu = 0.44$; (b) cross-section of the fundamental soliton along the diagonal axis after propagation, superimposed on the potential for $N = 12$.

这一结果表明, 在准晶势背景下孤子的稳定性不仅由传统的 VK 判据决定, 还受到准周期势场空间束缚效应的调制. 准晶势形成的局域势阱能够有效地限制能量向外扩散, 从而在一定程度上增强孤子的动力学稳定性.

尽管不同准晶序数下幅度振荡的具体特征存在一定差异, 这种差异主要体现在振荡幅度与衰减速率等定量细节上, 并未改变其定性动力学行为. 进一步的空间分布分析显示, 传播末端孤子在不同 N 情形下均保持良好的局域性, 其主峰位置与整体对称性未发生破缺. 上述结果表明, 准晶序数的变化并不会破坏拐点附近基本晶格孤子的临界稳定性, 而主要调制其动力学响应的细节特征.

$N = 5$ 时, 由图 4(a) 可知, 孤子功率 P 随孤子特征值 μ 的增加总体呈递减趋势, 符合 VK 判据所要求的稳定性必要条件. 因此 $N = 5$ 并不用于进一步的动力学判据分析, 只画出了传播后叠加在势函数上的基本孤子沿对角轴的横截面.

图 8 展示了在 $N = 5$ 准晶势下, 基本晶格孤子与对应势场的叠加空间分布. 孤子整体轮廓与准晶势的局域结构之间呈现出良好的空间匹配关系, 其主能量分布区域主要受限于势场的局域势阱附近.

本节围绕功率-孤子特征值关系所给出的稳定性预测, 对不同准晶对称性下的基本晶格孤子进行了小扰动动力学验证. 通过在功率-孤子特征值曲线递增与递减分支交汇处选取代表性参数点, 系统

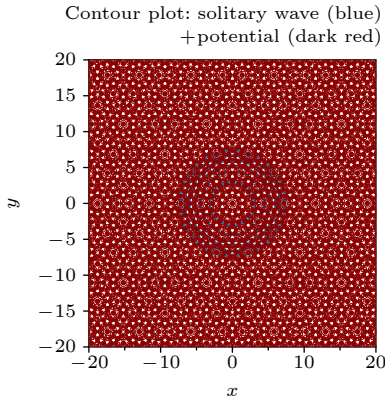


图 8 传播后叠加在 $N = 5$ 势函数上的基本孤子沿对角轴的横截面

Fig. 8. Cross-section of the fundamental soliton along the diagonal axis after propagation, superimposed on the potential for $N = 5$.

考察了孤子在微小初始扰动作用下的演化行为. 数值结果表明, 对于 $N = 8, 10, 12$ 等高阶准晶势情形, 孤子的动力学响应对参数位置表现出明显敏感性, 其演化特征与 VK 判据所预示的稳定性趋势保持一致, 从而验证了该判据在准晶背景下的适用性.

作为对比与补充, 进一步给出了五重准晶势 $N = 5$ 情形中孤子与势场的空间叠加分布, 用以直观地展示孤子所处的准晶势环境及其几何结构特征. 该结果为理解不同准晶对称性下孤子动力学行为的差异提供了有益的空间视角. 总体而言, 本节结果从动力学演化层面支持了前述稳定性分析, 并表明准晶对称性在调控晶格孤子演化特性方面起着重要作用.

6 结 论

本文研究了带有竞争型立方-五次非线性并叠加准周期晶格势的二维非线性薛定谔方程, 重点揭示了该体系中局域稳态解的分支结构及其稳定性规律. 基于谱重整化方法所得解族显示, 准晶势不仅改变局域能量分布与孤子形态, 而且其对称阶结构直接影响局域模的光谱位置与分支延拓方式, 从而在高维系统中产生不同于周期晶格与均匀介质的孤子锁定机制. 进一步的扰动传播与空间剖面分析表明, 该体系的稳定性不再由传统 VK 判据单独决定, 其充分性受制于高阶非线性与准晶势对线性化谱的共同调制. 对于 $dP/d\mu < 0$ 且远离功率极值的分支, 扰动仅激发受限的内部模并被势场束缚为有界振荡, 表现为真正的线性稳定态; 而在接近极

值或具有更高准晶对称性时, 内部模与背景连续谱之间的耦合显著增强, 产生准稳定甚至弱不稳定的动力学响应, 稳定性转化体现为谱结构的临界变化, 而非纯粹的能量特征.

上述结果表明, 准晶势在高维局域模式形成中的作用具有固有双重性: 它既能提供强有力的空间束缚, 又可能通过增强模-模耦合触发弱不稳定谱, 使得稳定性取决于线性谱与非线性分支的相互位置. 该机制具有普适性, 可推广至其他非均匀高维非线性介质, 为基于准晶结构的可调局域模式、稳定光传输以及非均匀材料中的谱控制提供了新的理论基础.

本文所研究的立方-五次非线性薛定谔模型不仅适用于准晶光学晶格体系, 在其他非线性波动系统中同样具有重要物理背景. 例如, 在玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC)^[39] 和超冷原子气体体系中, 类似的非线性薛定谔型方程常用于描述原子波包在光学晶格中的动力学行为. 特别是在考虑有效多体相互作用或量子涨落修正时, 立方-五次非线性模型可用于刻画量子液滴 (quantum droplets)^[40] 等新型局域态. 因此, 本文所发展的谱重整化数值方法及稳定性分析框架, 有望推广至超冷原子体系及其他具有复杂非周期势调制的非线性系统, 为研究多种物理平台中的局域化波动结构提供新的理论工具.

参考文献

- [1] Khater M M A, Alfalqi S H, Vokhmintsev A 2025 *Sci. Rep.* **15** 4101
- [2] Iqbal M A, Gepreel K A, Akbar M A, Osman M S 2025 *Mod. Phys. Lett. B* **39** 2550086
- [3] Rizvi S T, Hashem A F, Ul Hassan A, Shabbir S, Al-Moisheer A S, Seadawy A R 2025 *Fract. Fract.* **9** 497
- [4] Christodoulides D N, Lederer F, Silberberg Y 2003 *Nature* **424** 817
- [5] Sukhorukov A A, Kivshar Y S, Eisenberg H S, Silberberg Y 2003 *IEEE J. Quantum Electron.* **39** 31
- [6] Neshev D, Kivshar Y S, Martin H, Chen Z 2004 *Opt. Lett.* **29** 486
- [7] Shechtman D, Blech I, Gratias D, Cahn J W 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1951
- [8] Zhang Y, Wu B 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 093905
- [9] Marder M P 2010 *Condensed Matter Physics* (New York: John Wiley & Sons)
- [10] Senechal M 1995 *Quasicrystals and Geometry* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [11] Aubry S, André G 1980 *Ann. Israel Phys. Soc.* **3** 18
- [12] Lahini Y, Pugatch R, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Davidson N, Silberberg Y 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 013901
- [13] Zhang L M, Dong C 2000 *Materials Rep.* **14** 22 (in Chinese) [张立民, 董成 2000 材料学报 **14** 22]

- [14] Ding L F, Su G C 2007 *Modern Cast Iron* **2** 65 (in Chinese) [丁立峰, 苏国春 2007 现代铸铁 **2** 65]
- [15] Zhou Z H, Yang Z T, Xu W, Yu X, Xu C H, Xu X S 2019 *Theor. Appl. Fract. Mech.* **100** 139
- [16] Rao J G, Chen S A, Wu Z J, He J S 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 104204 (in Chinese) [饶继光, 陈生安, 吴昭君, 贺劲松 2023 物理学报 **72** 104204]
- [17] Wang X M, Ji L, Hu X X 2025 *Chin. Phys. B* **34** 110502
- [18] Wen J M, Bo W B, Wen X K, Dai C Q 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100502 (in Chinese) [温嘉美, 薄文博, 戴朝卿 2023 物理学报 **72** 100502]
- [19] Wang G W, Tan Z X 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 110201 (in Chinese) [王岗伟, 谭子轩 2025 物理学报 **74** 110201]
- [20] Wang Y D, Chen J X, Li B 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 160201 (in Chinese) [王宇铎, 陈嘉鑫, 李彪 2025 物理学报 **74** 160201]
- [21] Wang L, Yan Z Y 2021 *Phys. Lett. A* **404** 127408
- [22] Pu J C, Chen Y 2022 *Chaos, Solitons Fractals* **160** 112182
- [23] Zhou H J, Chen Y 2025 *Physica D* **481** 134764
- [24] Yang J K 2010 *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems* (Philadelphia: SIAM)
- [25] Della Villa A, Enoch S, Tayeb G, Capolino F, Pierro V, Galdi V 2006 *Opt. Express* **14** 10021
- [26] Vakhitov N G, Kolokolov A A 1975 *Radiophys. Quantum Electron.* **16** 783
- [27] Ablowitz M J, Antar N, Bakirtas I, Ilan B 2012 *Phys. Rev. A* **86** 033804
- [28] Petviashvili V I 1976 *Sov. J. Plasma Phys.* **2** 257
- [29] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2005 *Opt. Lett.* **30** 2140
- [30] Melchert O, Demircan A 2024 *Phys. Rev. A* **110** 043518
- [31] Pavlyshynets E, Salasnich L, Malomed B A, Yakimenko A 2025 *Phys. Rev. E* **111** 044206
- [32] Koercher N, Rose H, Bharadwaj S S, Schumacher J, Schumacher S 2025 *Sci. Rep.* **15** 23478
- [33] Freedman B, Bartal G, Segev M, Lifshitz R, Christodoulides D N, Fleischer J W 2006 *Nature* **440** 1166
- [34] Antar N 2014 *J. Appl. Math.* **2014** 848153
- [35] Ablowitz M J, Ilan B, Schonbrun E, Piestun R 2006 *Phys. Rev. E* **74** 035601
- [36] Nye J F, Berry M V 1974 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **336** 165
- [37] Ablowitz M J, Antar N, Bakirtas I, Ilan B 2010 *Phys. Rev. A* **81** 033834
- [38] Abdullaev F, Darmanyan S, Khabibullaev P, Engelbrecht J 2014 *Optical Solitons* (New York: Springer)
- [39] Pethick C J, Smith H 2008 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [40] Petrov D S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 155302

Localized coherent structures in the three-dimensional high-order nonlinear Schrödinger equation with quasi-periodic potentials*

WANG Yang¹⁾ LIU Guanting^{1)†} LI Meiyu¹⁾²⁾

1) (*College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China*)

2) (*College of Mathematics and Physics, Hulunbuir University, Hulunbuir 021008, China*)

(Received 1 February 2026; revised manuscript received 26 March 2026)

Abstract

Localized coherent structures in high-dimensional quasicrystalline systems are investigated using the spectral renormalization method. In particular, a three-dimensional cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with a quasi-periodic potential is considered, and stationary soliton solutions of the system are obtained numerically. For two-dimensional quasicrystalline lattices with different rotational symmetries, the steady-state lattice solitons are systematically calculated, and their existence regions, spatial profiles, and power characteristics are thoroughly analyzed. Numerical results show that the peak amplitude of the soliton increases monotonically with the propagation constant, while the spatial width decreases accordingly, which indicates stronger localization of the wave field. In addition, the confinement effect of the quasi-periodic potential becomes increasingly pronounced as the rotational symmetry of the quasicrystal increases. The stability of the obtained solitons is further analyzed using the Vakhitov-Kolokolov stability criterion. For quasicrystalline lattices with fivefold rotational symmetry, the power-propagation constant curve remains monotonic within the considered parameter range, indicating that the corresponding soliton family satisfies the stability condition. However, when the symmetry order exceeds fivefold, the power-propagation constant curves exhibit turning points, implying that the interplay between nonlinearity and quasi-periodic lattice structures may introduce new instability mechanisms. To further verify the stability properties, direct numerical simulations are performed near these critical regions. The results confirm that the solitons remain dynamically stable during propagation, despite the presence of extreme points in the power curves. This demonstrates that the cubic-quintic nonlinearity, together with the quasi-periodic potential, can effectively support stable two-dimensional spatial solitons. The present study provides a theoretical basis for the manipulation and control of localized optical states in quasicrystalline photonic systems. Moreover, the proposed numerical approach does not rely on specific lattice symmetry and can be extended to aperiodic systems with various rotational symmetries, demonstrating good generality and applicability.

Keywords: three-dimensional cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation, spectral renormalization method, quasi-periodic potential, soliton

DOI: [10.7498/aps.75.20260181](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260181)

CSTR: [32037.14.aps.75.20260181](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20260181)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12162027), the Key Project of the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant Nos. 2024ZD21, 2025ZD024), the Research Special Project for First-Class Disciplines in Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. YLXKZX-NSD-001), the Fundamental Research Funds for Inner Mongolia Normal University, China (Grant No. 023JBZD005), the Inner Mongolia Autonomous Region Graduate Research Innovation Project, China (Grant No. KC2025016S).

† Corresponding author. E-mail: guantingliu@imnu.edu.cn