

专题: 超冷原子分子物理

一维吸引相互作用单自旋翻转费米气体的 淬火动力学及量子颤振性质*

尹相国^{1)2)3)†} 赵书龙¹⁾²⁾

1) (山西大学, 理论物理研究所, 太原 030006)

2) (山西大学, 光量子技术与器件国家重点实验室, 太原 030006)

3) (山西大学, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

(2026年2月2日收到; 2026年2月15日收到修改稿)

在量子多体系统中, 杂质可引发丰富的非平衡动力学行为. 基于一维吸引相互作用费米气体的严格可解模型, 系统研究了该体系中杂质诱导的淬火动力学. 通过建立高效计算多体关联函数的解析方法, 重点考察了杂质与背景粒子间的关联行为以及杂质动量的时间演化. 结果表明: 弱吸引相互作用下, 杂质初始动量低于或高于费米动量时, 系统分别呈现出束缚态或气态主导的特征; 强吸引相互作用下, 无论杂质初始动量是否大于费米动量, 系统在局域关联处都呈现束缚态主导的特征; 杂质动量的演化表现出量子颤振行为, 其周期对应的能量与自旋向下粒子的化学势相吻合, 并已通过热力学与离散 Bethe ansatz 方程等多种方法予以验证. 本工作为深入理解吸引相互作用下量子多体系统的非平衡动力学提供了理论依据.

关键词: 一维费米气体, 关联函数, 淬火动力学, 量子颤振**DOI:** 10.7498/aps.75.20260182**CSTR:** 32037.14.aps.75.20250182

1 引言

近年来冷原子与量子模拟实验的快速发展, 为研究多体系统的非平衡动力学提供了新的可控平台^[1-3]. 这类实验平台具备相互作用强度与色散关系的高度可调节性, 为非平衡动力学的精确研究提供了理想条件^[4,5]. 处于特定状态的一维背景粒子气体与杂质粒子相互作用模型是近年的研究热点^[6-9]. 对移动杂质的研究有助于理解这些含杂质的量子多体系统中展现出的丰富的集体和干涉现象, 包括极化子^[2,10,11]、Bogoliubov-Cherenkov 辐射^[12]、激波^[13,14]、耗散量子杂质动力学^[15]、激发谱和有效质量^[16-18]、正交性灾难^[19,20]、格林函数的对数扩散^[21]、谱函数中阈值奇点的持续性^[22-24]、布洛赫振荡^[25,26]、

量子颤振^[7,27]、一维玻色子的任意子化^[28]等.

作为一维量子可积系统的典型代表, 接触相互作用的一维玻色气体 (Lieb-Liniger 模型)^[7,29] 存在一种量子颤振的现象. 该现象的出现条件为, 向玻色气体中注入杂质的速度大于本征声速. 研究表明, 杂质仅会将部分动量传递给背景气体, 然后形成一种动量长时间振荡且不衰减的关联态. 量子颤振是通过研究极化子的完整量子力学演化发现的, 而该演化可由精确的 Bethe ansatz (BA) 解描述. BA 方法不仅可以精确求解 Lieb-Liniger 模型, 在其它量子可积系统中也有着广泛的应用^[30,31].

与上述 Lieb-Liniger 模型类似, 另一类量子可积系统经典模型--接触相互作用一维费米气体 (Yang-Gaudin 模型), 是本文关注的研究热点. 有关费米极化子平衡态性质和动力学性质的研究包

* 国家自然科学基金 (批准号: 12461160324) 和山西省基础研究计划 (批准号: 202103021224033) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yinxianguo@sxu.edu.cn

括自旋-电荷分离^[1], 吸引相互作用下的极化子到分子态的转变^[32], 费米子极化子到分子态的跃迁与共存^[33,34], 尖锐量子集体模式涌现^[35], 杂质的奇异动量分布^[36,37], 系统受到冲击后的动力学性质^[38], 超声速杂质引发的量子颤振现象^[27], 量子淬火动力学^[39]等. 目前, 量子颤振的研究主要集中于排斥相互作用体系, 而对吸引相互作用下的淬火动力学及相关量子颤振现象仍缺乏系统性探索. 这一空白主要源于两方面挑战: 在物理机制上, 吸引作用可能导致杂质与背景粒子形成束缚对, 从而使非平衡动力学受到束缚态、气态乃至非常规态的共同影响, 其行为机制可能与排斥体系存在一定的差异; 在计算层面, 多类本征态(束缚态、气态、非常规态)的共存, 使得不同本征态间的关联函数及初态交叠积分的解析推导与数值计算复杂度大幅增加.

为克服上述困难, 本研究基于 Yang-Gaudin 模型的严格解, 提出了一种高效计算方法, 将关联函数矩阵元与初态交叠积分化为有限求和形式, 显著降低了计算负担. 借此, 对吸引相互作用下的多体淬火动力学开展了系统定量研究, 发现吸引相互作用体系中存在量子颤振行为, 探究其物理机制, 从而为理解相互作用强度在量子非平衡演化中的作用提供了新的理论视角. 本文的主要内容如下: 在第 2 节介绍单自旋翻转费米气体中束缚态与气态的 BA 严格解及其对应波函数, 并进一步给出非常规本征态的波函数; 第 3 节给出含时演化波函数和关联函数的表达式, 并将不同本征态关联函数, 初态交叠积分化简成有限求和形式; 第 4 节通过数值计算得到了不同自旋间的两体关联函数在不同的动量和相互作用强度下的淬火动力学性质, 结合系统大量本征态的占据概率, 分析淬火后关联函数演化的周期和高占据概率态的能量差的关系; 第 5 节由动量随时间的演化出发, 讨论不同相互作用下的量子颤振和量子复苏现象, 以及量子颤振周期对应的能量差与自旋向下粒子的化学势的对应关系; 最终, 总结本研究成果.

2 单自旋翻转费米气体模型严格解

单自旋翻转的费米气体系统的哈密顿量可以写成下面的形式

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + g \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j), \quad (1)$$

该系统是由 $N - 1$ 个自旋向上的费米子和 1 个自旋向下的杂质费米子组成的. x_i 代表第 i 个费米子的坐标位置, \hbar 代表约化普朗克常量, m 是单个费米子的质量. g 代表不同自旋费米子之间的相互作用强度, 当 g 大于 0 时代表排斥相互作用, 当 g 小于 0 时代表吸引相互作用, 本文重点研究系统处于吸引相互作用下的性质. 为了方便书写, 令 $\hbar = 2m = 1$, 则系统的哈密顿量变为

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2c \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j), \quad (2)$$

其中 $c = g/2$.

该模型的本征方程可由坐标 BA 方法求解. 在周期性边界条件下, 设自旋向下粒子的坐标为 x_i , 系统常规本征态的波函数可以写为

$$\begin{aligned} \psi_{\downarrow i}(x_1, x_2, \dots, x_N; v_r) &= \frac{1}{\sqrt{G_{v_r}}} \sum_P (-1)^P [1 - \exp(ik_P L)] \\ &\times \exp(ik_{P_i} x_i) \prod_{j=1(j \neq i)}^N \exp[ik_{P_j} (L\theta(x_i - x_j) + x_j)], \end{aligned} \quad (3)$$

其中 v_r 是常规本征态指标, L 是系统的长度, $\theta(x)$ 是阶跃函数, 其定义为: 当 $x < 0$ 时, $\theta(x) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $\theta(x) = 1$. P 代表一种标准排序, $(-1)^P$ 为由费米子交换反对称性引入的排列符号. 当 $P = \{1, 2, \dots, N\}$ 时, $(-1)^P = 1$, 当任意两个位置交换一次, $(-1)^P$ 就是原来的相反数. 常规本征态波函数的归一化系数为

$$G_{v_r} = \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_N |\psi_{\downarrow i}(x_1, x_2, \dots, x_N; v_r)|^2, \quad (4)$$

其解析化简形式已在文献中给出^[39].

常规本征态包含气态和束缚态, 它们的波矢 k_j 和快度 λ 都满足下面形式的 BA 方程

$$\frac{k_j - \lambda + ic'}{k_j - \lambda - ic'} = \exp(ik_j L), \quad (5)$$

$$\prod_{j=1}^N \frac{k_j - \lambda + ic'}{k_j - \lambda - ic'} = 1, \quad (6)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, N$ 和 $c' = c/2$. 系统的总动量和能量本征值分别是 $Q = \sum_{j=1}^N k_j = 2\pi n_Q/L$, $E = \sum_{j=1}^N k_j^2$, 其中 n_Q 是总动量量子数.

气态的波矢 k_j 全部为实数, 对 (5) 式和 (6) 式

取对数并化简,可以得到一组气态 BA 方程

$$k_j L - 2\pi n_j + 2 \arctan \frac{k_j - \lambda}{c'} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^N \arctan \frac{k_j - \lambda}{c'} + \pi n_\lambda = 0. \quad (8)$$

其中 n_j 和 n_λ 是描述气态的量子数.

束缚态存在一对弦解 k_j , 它们的实部相等, 虚部互为相反数, 用 p 表示弦解的实部, 用 β 表示弦解的虚部, 其它的 k_j 仍然为实数. 将弦解代入到 (5) 式和 (6) 式, 取对数并化简, 可以得到一组束缚态 BA 方程

$$k_{j'} L + 2 \arctan \frac{k_{j'} - \lambda}{c'} - 2\pi n_{j'} = 0, \quad j' = 1, 2, \dots, N-2, \quad (9)$$

$$(p - \lambda)^2 + c'^2 + \beta^2 + \frac{2\beta c'}{\tanh(\beta L)} = 0, \quad (10)$$

$$\tan(pL) \cdot (\beta^2 - c'^2 + (p - \lambda)^2) - (p - \lambda)2c' = 0, \quad (11)$$

$$2p + \sum_{j'=1}^{N-2} k_{j'} - \frac{2\pi n_{\lambda'}}{L} = 0, \quad (12)$$

其中 $n_{j'}$ 和 $n_{\lambda'}$ 是描述束缚态的量子数. 分别求解这两组方程即可得到系统所有常规本征态的波矢和快度.

当系统的总动量大于费米动量时, 系统会出现非常规本征态. 该态的波矢不随相互作用强度变化, 当量子数 n_λ 取 $N/2$ 时, 通过 BA 方程 (7) 式和 (8) 式求解得到波矢. 当 $j = 1, \dots, N-1$ 时, $k_j = 2\pi n_j/L$, 其中 $n_j = -N/2 + 1, \dots, N/2 - 1$. 当 $j = N$ 时, $k_N = Q$. 该态的波函数与自由费米子的波函数形式相似, 具体如下

$$\begin{aligned} & \psi_{\downarrow i}(x_1, x_2, \dots, x_N; v_{\text{ir}}) \\ &= \frac{i}{N! \sqrt{N! L^N}} \sum_P (-1)^P \exp \left(i \sum_{j=1}^N k_{P_j} x_j \right). \end{aligned} \quad (13)$$

其中 v_{ir} 为非常规本征态指标.

3 淬火动力学和不同本征态关联函数的解析计算

系统的初态波函数由 $N-1$ 个自旋向上费米子系统的斯莱特行列式和单个自旋向下粒子的波

函数相乘得到

$$\begin{aligned} \psi_{\text{tot}}(0) &= \psi_{\downarrow 1}^0(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ &= \frac{1}{N! L^{\frac{N}{2}}} \sum_P (-1)^P \exp \left(i \sum_{j=1}^{N-1} q_{P_j} x_{j+1} \right) \exp(iQx_{\downarrow 1}). \end{aligned} \quad (14)$$

其中自旋向下粒子的波矢为 Q , 对应的波函数为 $\exp(iQx_{\downarrow 1})$. 自旋向上粒子的波矢为 $q_j = (j - N/2) \times 2\pi/L$, $j = 1, 2, \dots, N-1$, 从而构成基态费米海的分布.

在 $t = 0$ 时刻, 将不同自旋粒子之间的相互作用强度由 0 淬火至有限值 c . 此后系统的时间演化行为主要由相互作用强度 c 和杂质粒子初始时刻的动量 Q 决定. 为研究系统的动力学性质, 需要将含时演化算符作用于初态波函数, 从而得到含时波函数

$$\psi_{\text{tot}}(t) = \exp(-i\hat{H}t) \psi_{\text{tot}}(0), \quad (15)$$

将系统的完备基插入到含时演化算符之后可得,

$$\psi_{\text{tot}}(t) = \sum_v C_v \exp(-iE_v t) \psi_v. \quad (16)$$

其中 v 代表系统的所有本征态指标, E_v 是对应的能量本征值. 交叠积分的定义为

$$\begin{aligned} C_v &= \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_N \psi_{\downarrow 1}^* (x_1, x_2, \dots, x_N; v) \\ &\quad \times \psi_{\downarrow 1}^0(x_1, x_2, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (17)$$

其模的平方表示占据概率. 在数值计算中, 忽略占据概率较小的本征态, 且满足 $\sum_v |C_v|^2 > 0.95$.

将任意常规本征态的波函数代入到 (17) 式中, 利用动量守恒和 BA 方程进行化简, 可以将交叠积分简化为简单函数的连乘的形式

$$\begin{aligned} C_{v_r} &= (-1)^\xi \frac{-iN! (-2)^N}{\sqrt{L^{N-2} N! N G_{v_r}}} \prod_{j=1}^N \sin(k_j L/2) \\ &\quad \times \exp(-iQL/2) \det(\mathbf{M}^C). \end{aligned} \quad (18)$$

当 (18) 式中 v_r 属于束缚态 (气态) 时, $(-1)^\xi = -1(1)$. $\{k_j\}$ 代表一个本征态下不同粒子的波矢, \mathbf{M}^C 是一个 $N \times N$ 的矩阵, 当 $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, \dots, N-1$ 时, 矩阵元为 $M_{ij}^C = 1/(q_j - k_i)$, 第 N 列的所有矩阵元为 1, $\det()$ 代表对应矩阵的行列式形式.

将非常规本征态波函数 (13) 式代入 (17) 式计算该态与初态的交叠积分, 可得该态占据概率恒为

$1/N$. 非常规本征态的占据概率不会随相互作用强度改变. 该态不仅在 Yang-Gaudin 模型中会出现, 在 Lieb-Wu 模型中也存在类似的本征态^[23].

借助含时波函数, 可将自旋向上粒子单体关联函数和不同自旋粒子两体关联函数的期望值分别表示为

$$g_{\uparrow}^{(1)}(x, x'; v, v'; t) = \sum_{vv'} C_v^* C_{v'} \exp[i(E_v - E_{v'})t] \times g_{\uparrow}^{(1)}(x, x'; v, v'), \quad (19)$$

$$g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, x'; v, v'; t) = \sum_{vv'} C_v^* C_{v'} \exp[i(E_v - E_{v'})t] \times g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, x'; v, v'), \quad (20)$$

其中不含时的单体和两体关联函数可用波函数分别表示为

$$g_{\uparrow}^{(1)}(x, x'; v, v') = (N-1) \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_{N-1} \times \psi_{\downarrow 1}^*(x_1, \cdots, x_{N-1}, x; v) \times \psi_{\downarrow 1}(x_1, \cdots, x_{N-1}, x'; v'), \quad (21)$$

$$g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, x'; v, v') = (N-1) \int_0^L dx_3 \cdots \int_0^L dx_N \times \psi_{\downarrow 1}^*(x, x', x_3, \cdots, x_N; v) \times \psi_{\downarrow 1}(x, x', x_3, \cdots, x_N; v'). \quad (22)$$

因此, 可以通过计算 (21) 式和 (22) 式, 分别得到自旋向上粒子的单体关联函数和不同自旋粒子之间两体关联函数的解析表达式.

任意两个常规本征态间的自旋向上粒子的单体关联函数的解析结果可以简化为

$$g_{\uparrow}^{(1)}(x, x'; v_r, v_r') = (-1)^\xi \frac{4(N-1)!}{\sqrt{G_{v_r} G_{v_r'}}} \sum_{m', s=1}^N A_{m'}^s \times F_a(k_{m'}, k'_s, z), \quad (23)$$

其中

$$A_{m'}^s = (-1)^{m'+s} \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq m')}}^N (-1)^{N+l} \text{sgn}(l - m') \times \sin\left(\frac{k_l L}{2}\right) \det(\mathbf{B}_{m'l}^s). \quad (24)$$

当 (23) 式中 v_r 属于束缚态 (气态) 时, $(-1)^\xi = -1(1)$. 令 $z = x - x'$, $x' = 0$, (23) 式中 k 和 k' 分别是任意两个常规本征态的波矢. 在数值计算的过程中, k 和 k' 必须分别满足一组常规本征态波矢的固定排

序, 例如将所有实数解从小到大排列, 两个弦解放在实数解后面, 并按虚部从小到大排列. $F_a(k_{m'}, k'_s, z)$ 具体可以写为

$$F_a(k, k', z) = \frac{2}{k - k'} \{ \exp[ik'(z - L/2)] \sin(kL/2) - \exp[ik(z - L/2)] \sin(k'L/2) \}. \quad (25)$$

定义 $(N+1) \times N$ 的 \mathbf{M} 矩阵, 其前 N 行矩阵元为 $M_{ij} = \sin[(k'_j - k_i)L/2] / [(k'_j - k_i)/2]$, 最后一行的矩阵元为 $M_{N+1,j} = \sin(k'_j L/2)$, $\mathbf{B}_{m'l}^s$ 是一个 $(N-1) \times (N-1)$ 的方矩阵, 是 \mathbf{M} 矩阵去掉第 m' 和 l 行以及第 s 列后剩余的矩阵元按照原来的位置组成的矩阵.

常规本征态和非常规本征态间的自旋向上粒子的单体关联函数可以简化为

$$g_{\uparrow}^{(1)}(x, x'; v_r, v_r') = i(-1)^\xi \frac{(N-1)!}{\sqrt{G_{v_r} N! L^N}} \times \sum_{m', s=1}^N \exp(ik'_s z) F_b(k'_s, k_{m'}, L) D_{m'}^s, \quad (26)$$

其中

$$D_{m'}^s = (-1)^{m'+s} \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq m')}}^N (-1)^{l+N} \text{sgn}(l - m') \times [1 - \exp(-ik_l L)] \det(\mathbf{R}_{m'l}^s). \quad (27)$$

定义一个 $(N+1) \times N$ 的 \mathbf{S} 矩阵, 其前 N 行矩阵元为

$$S_{ij} = \sin[(k'_j - k_i)L/2] \exp[i(k'_j - k_i)L/2] / [(k'_j - k_i)/2], \quad (28)$$

最后一行的矩阵元为 $S_{N+1,j} = 1$. $\mathbf{R}_{m'l}^s$ 是一个 $(N-1) \times (N-1)$ 的方矩阵, 是 \mathbf{S} 矩阵去掉第 m' 和 l 行以及第 s 列后剩余的矩阵元按照原来的位置组成的矩阵. k 和 k' 必须分别满足一组常规本征态的波矢和一组非常规本征态的波矢固定的排序. $F_b(k', k, L)$ 具体形式与 (28) 式一样.

非常规本征态之间的自旋向上粒子的单体关联函数可以简化为

$$g_{\uparrow}^{(1)}(x, x'; v_{ir}, v_{ir}') = \frac{N-1}{NL} \sum_l^N \exp(-ik_l z). \quad (29)$$

结合 (23), (26), (29) 式, 即可计算任意本征态下的自旋向上粒子的单体关联函数.

任意两个常规本征态之间不同自旋粒子的两

体关联函数的解析结果可以简化为

$$g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, x'; v_r, v_r) = (-1)^\xi \frac{4(N-1)!}{\sqrt{G_{v_r} G_{v_r}}} \sum_{m', s=1}^N A_{m'}^s \times \exp \left[i(k'_s - k_{m'}) \left(L\theta(z) - z - \frac{L}{2} \right) \right]. \quad (30)$$

常规本征态和非常规本征态间的不同自旋粒子的两体关联函数可以简化为

$$g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, x'; v_r, v_{ir}) = i(-1)^\xi \frac{4(N-1)!}{\sqrt{G_{v_r} N! L^N}} \times \sum_{m', s=1}^N \exp [i(k'_s - k_{m'}) z] V_{m', s}^s, \quad (31)$$

$$V_{m'}^s = 2i(-1)^{m'+s} \sum_{l(l \neq m')} (-1)^l \text{sgn}(l - m') \times \sin \left(\frac{k_l L}{2} \right) \exp \left(\frac{-ik_l L}{2} \right) \det(\mathbf{W}_{m'l}^s). \quad (32)$$

定义一个 $(N+1) \times N$ 的 \mathbf{U} 矩阵, 第一行的矩阵元为 $U_{1,j} = 1$, 其第二行到第 N 行矩阵元 U_{ij} 与 (28) 式形式一样. $\mathbf{W}_{m'l}^s$ 是一个 $(N-1) \times (N-1)$ 的方阵, 是 \mathbf{U} 矩阵去掉第 m' 和 l 行以及第 s 列后剩余的矩阵元按照原来的位置组成的矩阵.

非常规本征态之间的不同自旋粒子的两体关联函数可以简化为

$$g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, x'; v_{ir}, v_{ir}) = \frac{1}{L^2} \left[(N-1) - N \sum_{l_1=1}^N \exp(-ik_{l_1} z) \times \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq l_1}}^N \exp(ik_{l_2} z) \right]. \quad (33)$$

结合 (30), (31), (33) 式, 即可计算任意本征态下的不同自旋粒子的两体关联函数.

4 关联函数的淬火动力学性质

借助上一节推导出的占据概率以及关联函数的解析表达式, 本节探究了淬火后的系统动力学性质. 图 1(a) 给出了弱相互作用下, 杂质动量等于费米动量时, 不同自旋间两体关联函数随时间的演化. 尽管自旋向下的粒子处于运动状态, 但可将坐标系固定在该粒子上, 即令其坐标为 $x' = 0$, 以此研究与其相关联的自旋向上粒子相对于该坐标零点的运动变化规律. 当不同自旋间粒子的相互作用强度较弱时 ($c = -1$), 由于吸引相互作用下束缚

态的影响, 两体关联函数在 $x = 0$ 以及 $x = L$ 处会出现较大的概率密度峰, 其随时间演化始终大于 1, 表明束缚对的形成. 与此同时, 由于粒子数守恒, 如图 1(b) 所示, 在峰的右侧出现了一个关联孔洞. 该孔洞随时间演化逐渐向右移动并远离初始位置, 其运动特征在一定程度上反映了自旋向下粒子在自旋向上粒子间的相对运动规律. 具体地说, 在 $t = t_F$, 孔洞出现在 $x/L = 0.05$ 附近, 并随着时间演化向右移动, 当 $t = 30t_F$ 时, 孔洞运动到约 $x/L = 0.6$ 处. 由于系统采用周期性边界条件, 孔洞在 $t = 50t_F$ 时运动回 $x/L = 0.05$ 附近, 这种运动形成了图 1(a) 所示的深蓝色周期性条纹.

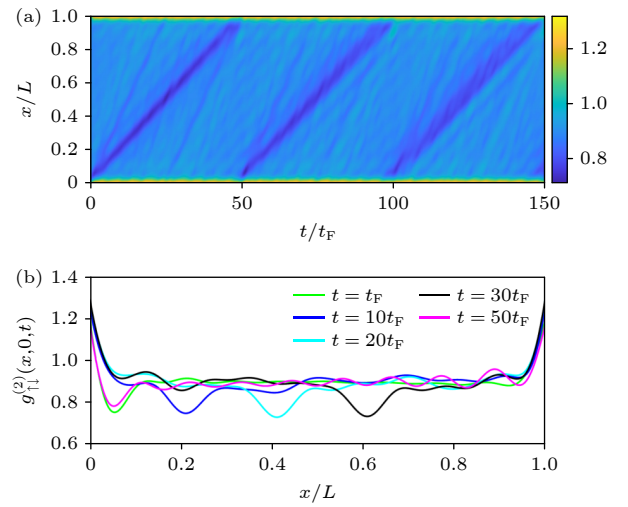


图 1 在总动量 $Q = k_F$ 条件下, 不同自旋间的两体关联函数 $g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, 0, t)$ 随时间的演化. 粒子数 $N = 10$, 系统长度 $L = 10$, 相互作用强度 $c = -1$. 费米动量的定义为 $k_F = (N/2 - 1)2\pi/L$, 费米能量的定义为 $E_F = k_F^2$, t_F 定义为 $1/E_F$. Fig. 1. At total momentum $Q = k_F$, we show the time evolution of the opposite-spin two-body correlation function $g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, 0, t)$. The particle number is $N = 10$, the system length is $L = 10$, and the interaction strength is $c = -1$. The Fermi momentum is defined as $k_F = (N/2 - 1)2\pi/L$, the Fermi energy as $E_F = k_F^2$, and the Fermi time as $1/E_F$.

图 2 展示了初始时刻自旋向下粒子的动量大于费米动量的情况. 与图 1 相比, 尽管两者的参数仅在总动量上有所不同, 但其展现出的性质截然不同. 在图 1 中, 初始时刻关联函数在关联位置 $x = 0$ 处的值始终保持大于 1, 而图 2 中, 初始时刻关联位置 $x = 0$ 附近的关联函数的值则发生剧烈变化. 随着时间的演化, 在 $x = 0$ 处交替出现波峰和波谷, 波峰值大于 1, 表现为束缚态性质; 波谷值小于 1, 表现为气态性质. 该现象所反映的物理过程

可理解为, 关联函数在关联位置形成波峰, 相当于杂质粒子捕获某一背景粒子并共同运动. 然而, 由于杂质粒子初始时刻具有较大动能, 束缚对可能在之后的运动中解离, 导致波峰转变为波谷, 杂质粒子暂时脱离背景粒子的束缚. 图 2(b) 中, 在 $x = 0$ 的右侧形成了明显的关联孔洞, 该孔洞不会向外传播; 在 $x = L$ 的左侧也形成了关联孔洞, 但其形成速度较慢, 这与低于费米动量的情况完全不同. 在关联孔洞的正方向形成了波峰, 如图 2(a) 中周期为 $25t_F$ 的不规则黄色条纹, 向右传播, 和图 1(b) 中孔洞运动方向相同. 具体地说, 在 $t = t_F$ 时, 图 2(b)

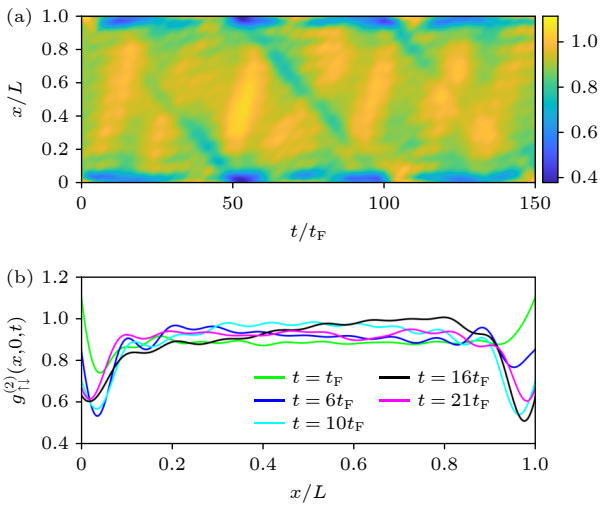


图 2 在总动量 $Q = 1.5k_F$ 条件下, 不同自旋间的两体关联函数 $g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x,0,t)$ 随时间的演化. 粒子数 $N = 10$, 系统长度 $L = 10$, 相互作用强度 $c = -1$

Fig. 2. At total momentum $Q = k_F$, we show the time evolution of the opposite-spin two-body correlation function $g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x,0,t)$. The particle number is $N = 10$, the system length is $L = 10$, and the interaction strength is $c = -1$.

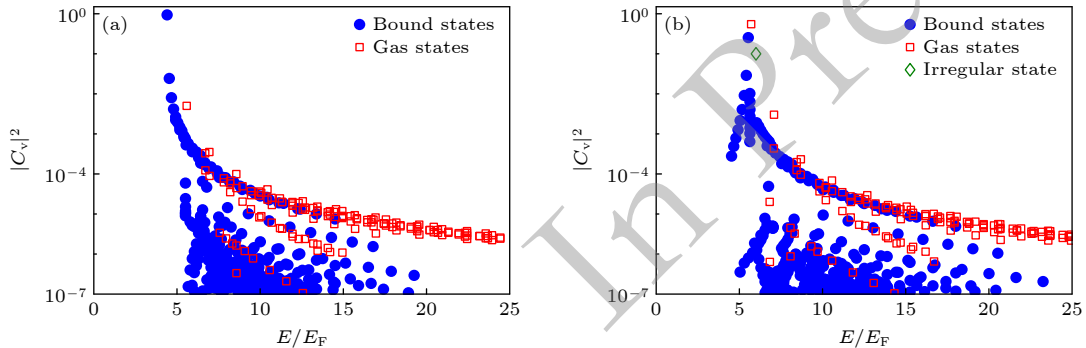


图 3 在总动量分别为 $Q = k_F$ (a) 和 $1.5k_F$ (b) 的条件下, 不同本征态的占据概率随能量的分布. 粒子数 $N = 10$, 系统长度 $L = 10$, 相互作用强度 $c = -1$

Fig. 3. For total momentum $Q = k_F$ (a) and $Q = 1.5k_F$ (b), we show the energy distribution of the occupation probabilities of different eigenstates. The particle number is $N = 10$, the system length is $L = 10$, and the interaction strength is $c = -1$.

在 $x/L = 0.18$ 附近出现较小的波峰, 随后波峰向右侧移动. 当 $t = 16t_F$ 时, 波峰运动到约 $x/L = 0.8$ 处. 由于周期性边界条件的限制, 在 $t = 21t_F$ 时波峰运动回 $x/L = 0.2$ 附近. 该现象与排斥情况类似, 与高动量下气态占据概率的显著提升有关. 值得一提的是, 位于 $x = L$ 左侧的关联孔洞存在向左传播的现象, 如图 2(a) 中周期约为 $50t_F$ 的蓝色条纹所示.

为解释上述关联函数的演化特征, 图 3 给出了 $c = -1$ 时占据概率随能量的分布图. 对于给定的总动量 Q , 占据概率最大的两个本征态所对应的能量分别记为 $E_{\text{large}1}$ 和 $E_{\text{large}2}$. 这两个本征能量之差的绝对值记为 $|\delta E_{\text{large}}|$, 对应的特征时间 $t_{\text{large}} = 2\pi/|\delta E_{\text{large}}|$, 反映不同自旋两体关联函数的演化周期. 当 $Q \leq k_F$ 时, 如图 3(a), 占据概率最大的两个本征态为束缚态, 因此图 1(b) 中不同自旋两体关联函数在 $x = 0$ 的值始终大于 1, 主要表现束缚态的性质. 特征时间 $t_{\text{large}} = 47.81t_F$, 与图 1 中关联孔洞时空演化的周期基本一致. 当 $Q > k_F$ 时, 如图 3(b), 占据概率最大的两个本征态分别对应气态与束缚态, 且存在占据概率较大的非常规本征态. 因此图 2(b) 在 $x = 0$ 处的不同自旋两体关联函数的值从大于 1 演化到小于 1, 表明系统的动力学从以束缚态贡献为主逐渐演化为以气态贡献为主. 特征时间 $t_{\text{large}} = 36.45t_F$, 不再与图 2 中波峰演化的周期保持一致. 这一现象的成因在于, 当动量高于费米动量时, 高占据概率束缚态的权重显著降低, 束缚态的总占据概率小于气态的总占据概率, 同时非常规本征态开始出现, 进而呈现出束缚态、气态与非常规本征态复杂耦合的特征.

相互作用强度较强时 ($c = -10$) 时, 如图 4 所

示, 无论系统总动量是小于等于费米动量还是高于费米动量, 不同自旋两体关联函数在关联处 $x = 0$ 始终呈现显著峰值, 呈现束缚态的局域性质. 其物理原因在于, 当相互作用强度比较大时, 束缚态的局域关联函数与相互作用强度的绝对值呈正相关, 从而使束缚态在整个时间演化中占据更主导的贡献. 如图 4(a) 所示, 在 $x = 0$ 处峰的两侧留下关联孔洞, 该孔洞同样不向外传播. 在 $t = t_F$, $x/L = 0.2$ 时, 图 4(a) 的波峰幅值小于图 4(b) 的对应波峰, 说明动量的增加使系统气态的特征更加明显. 图 4(a) 在 $x/L = 0.2$ 处的波峰向右传播, 几乎不衰减. 图 4(b) 在同样位置处的波峰向右传播, 同时在 $x = L$ 左侧存在较小的波谷向左传播, 两波在约 $4t_F$ 相遇后形成振荡. 这种振荡类似背景粒子的两体关联, 与文献 [27] 中排斥费米气体出现的现象一致, 被称作类 Friedel 振荡.

5 自旋向下粒子的动量演化及量子颤振

自旋向上粒子的动量分布可以通过对自旋向上粒子的单体关联函数做傅里叶变换得到

$$n_{\uparrow}(k_{m'}) = \frac{L}{2\pi} \int_0^L dz g_{\uparrow}^{(1)}(0, z) \exp(ik_{m'}z), \quad (34)$$

其中 $k_{m'} = 2\pi m'/L$, m' 为整数. 通过动量守恒

$$Q_{\downarrow} = Q - \sum_{k_{m'}} k_{m'} n_{\uparrow}(k_{m'}), \quad (35)$$

可以得出自旋向下粒子的动量随时间的演化. 接下

来我们将系统分析自旋向下粒子的动量演化行为并建立量子颤振的周期与自旋向下粒子化学势之间的关系.

5.1 自旋向下粒子动量的演化行为

为了便于对比排斥与吸引两种相互作用下的动量演化差异, 图 5 中给出了排斥和吸引情况下的自旋向下粒子的动量随时间的演化情况. 在排斥相互作用的 Yang-Gaudin 模型中, 它的演化呈现出与 Lieb Liniger 模型 [7,29] 类似的现象. 图 5(b) 可以看出在排斥相互作用下, 当初始总动量小于费米动量时, 系统的动量会随时间衰退直到一个稳定的数值 (在 $30t_F$ 之前的蓝色实线). 当总动量大于费米动量时, 出现周期约为 $9.7t_F$ 的量子颤振现象. 相比之下, 图 5(a) 吸引情况下由于束缚态弦解的参与, 会使得动量演化的结果与排斥情况不同. 无论初始的总动量是否大于费米动量, 动量随时间的演化都会出现类量子颤振现象. 特别是当初始时刻杂质粒子的动量高于费米动量时, 无论初始动量为多少, 当自旋向下粒子的动量演化到约 $t = 3t_F$ 都会出现第一个次峰 (图 5(a) 中虚线 c 的位置), 在约 $t = 6t_F$ 都会出现第二个次峰 (图 5(a) 中虚线 e 的位置), 这两个次峰之间的间隔对应量子颤振的周期, 周期近似为 $3t_F$. 量子颤振的周期不依赖于系统初始动量的大小.

为了进一步的理解自旋向下粒子的动量在更长时间尺度上的演化行为, 接下来研究不同相互作用情形下的量子复苏. 图 5(b) 可以看出在排斥相

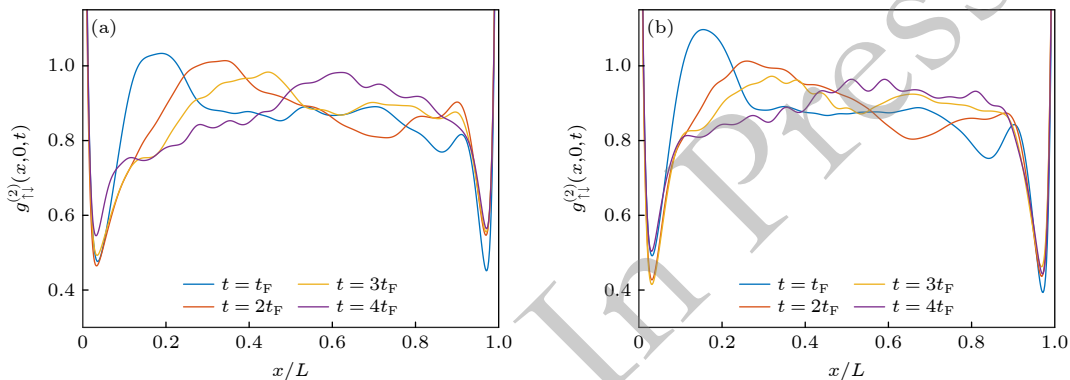


图 4 在总动量分别为 $Q = k_F$ (a) 和 $1.5k_F$ (b) 的条件下, 不同自旋间的两体关联函数 $g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, 0, t)$ 随时间的演化. 粒子数 $N = 10$, 系统长度 $L = 10$, 相互作用强度 $c = -10$. $x = 0$ 处关联函数的最大值截取到 1.15

Fig. 4. For total momentum $Q = k_F$ (a) and $Q = 1.5k_F$ (b), we show the time evolution of the opposite-spin two-body correlation function $g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, 0, t)$. The particle number is $N = 10$, system length is $L = 10$, and interaction strength is $c = -10$. The maximum value of the correlation function at $x = 0$ is clipped to 1.15.

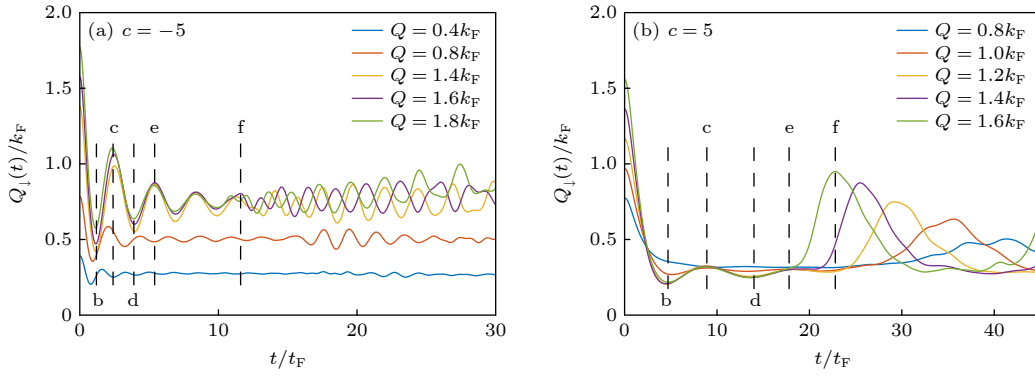


图 5 吸引 (a) 和排斥 (b) 情况下, 自旋向下粒子的动量随时间的演化. 粒子数 $N = 22$, 系统长度 $L = 22$. (a) 相互作用强度 $c = -5$, 总动量分别为 $Q = 0.4k_F$, $Q = 0.8k_F$, $Q = 1.4k_F$, $Q = 1.6k_F$, $Q = 1.8k_F$. (b) 相互作用强度 $c = 5$, 总动量分别为 $Q = 0.8k_F$, $Q = k_F$, $Q = 1.2k_F$, $Q = 1.4k_F$, $Q = 1.6k_F$. 黑色虚线标注在 $Q = 1.6k_F$ 的情况下, 若干特殊时刻的位置: 杂质粒子动量首次达到极小值 (虚线 b)、首次出现次峰 (虚线 c)、第二次达到极小值 (虚线 d)、第二次出现次峰 (虚线 e), 以及发生量子复苏的时刻 (虚线 f)

Fig. 5. Time evolution of the momentum of the spin-down particle for (a) attractive and (b) repulsive interactions. The particle number is $N = 22$ and the system length is $L = 22$. (a) For interaction strength $c = -5$, the total momentum is $Q = 0.4k_F$, $0.8k_F$, $1.4k_F$, $1.6k_F$, and $1.8k_F$. (b) For interaction strength $c = 5$, the total momentum is $Q = 0.8k_F$, k_F , $1.2k_F$, $1.4k_F$, and $1.6k_F$. The black dashed lines mark several characteristic times for $Q = 1.6k_F$: the first time when the impurity momentum reaches a minimum (dashed line b), the first appearance of a secondary peak (dashed line c), the second time when it reaches a minimum (dashed line d), the second appearance of a secondary peak (dashed line e), and the time at which quantum revival occurs (dashed line f).

相互作用下, 当 $Q = 1.6k_F$ 时, 对应的 $22.81t_F$ 会出现一个主峰, 这反映了该系统发生了量子复苏现象. 出现量子复苏的原因是系统采用周期性边界条件, 粒子以约为初始动量大小的速度运动一个系统长度回到初始位置. 它出现的时间可以近似为

$$t_{\text{revival}} \approx \frac{Lm}{\hbar Q} = \frac{\pi(N/2 - 1)^2}{n_Q} t_F. \quad (36)$$

通过 (36) 式计算 $Q = 1.6k_F$ 时量子复苏的时间为 $19.63t_F$, 与图 5(b) 中将要出现主峰的位置对应. 总动量越大, 系统中的粒子绕一周回到初始位置的时间越短. 这与只有当总动量大于费米动量时系统才会出现量子颤振不同, 无论初始总动量是否大于费米动量, 系统都会出现量子复苏现象. 图 5(a) 吸引情况下粒子的动量演化在 $12t_F$ 之后开始出现周期振荡, 振幅先增后减, 但是最大振幅小于前面量子颤振的最大振幅, 也小于排斥情况下量子复苏时动量的最大增量. 说明在此时, 系统受到周期性边界条件的影响, 出现类似量子复苏的现象, 但是由于束缚对的影响, 导致复苏的效果远弱于相同相互作用强度的排斥情况.

排斥或者吸引相互作用的动量随时间演化的不同不仅体现在自旋向下粒子的动量随时间演化上, 还体现在自旋向上粒子的动量分布上. 图 6 给出了图 5 中六个特殊时刻对应的自旋向上粒子的

动量分布. 所选时刻依次为: 初始时刻, 杂质粒子动量首次达到极小值的时刻、首次出现次峰的时刻、第二次达到极小值的时刻、第二次出现次峰的时刻, 以及发生量子复苏的时刻, 分别对应图 5 中的初始位置以及虚线 b 至虚线 f 所标注的位置. 当系统为排斥相互作用时, 图 6 红色圆圈符号可以看出, 在初始时刻, 系统自旋向上粒子的动量仅在费米海内有分布. 当时间 $t = 4.7t_F$ 时, 自旋向下粒子的动量随时间的演化第一次出现最小值, 由于排斥相互作用, 自旋向上粒子的动量分布与系统初始时刻出现明显的不同. 在 $k_m = 1.8k_F$ 的位置出现了较高的峰值, 说明自旋向下的粒子通过与自旋向上粒子间的排斥作用, 将部分自旋向上的粒子激发到高能态, 且峰值出现的位置略高于初始时刻注入的自旋向下粒子的动量 $Q = 1.6k_F$. 当时间 $t = 8.9t_F$ 时, 自旋向下粒子的动量达到第一个次峰, 靠近初始动量方向的费米海内自旋向上粒子的动量分布出现明显的减小. 当时间 $t = 14.0t_F$ 时, 自旋向下粒子的动量达到第二个最小值, 自旋向上粒子的动量分布在靠近初始动量方向的费米海附近出现了更明显的减少. 当时间 $t = 22.8t_F$ 时, 自旋向下粒子的动量出现较高的峰值, 系统在此时发生量子复苏, 系统接近初始状态. 自旋向上粒子的动量分布与初始时刻相似, 在 $k_{m'} = 1.6k_F$ 附近出现的峰值基本

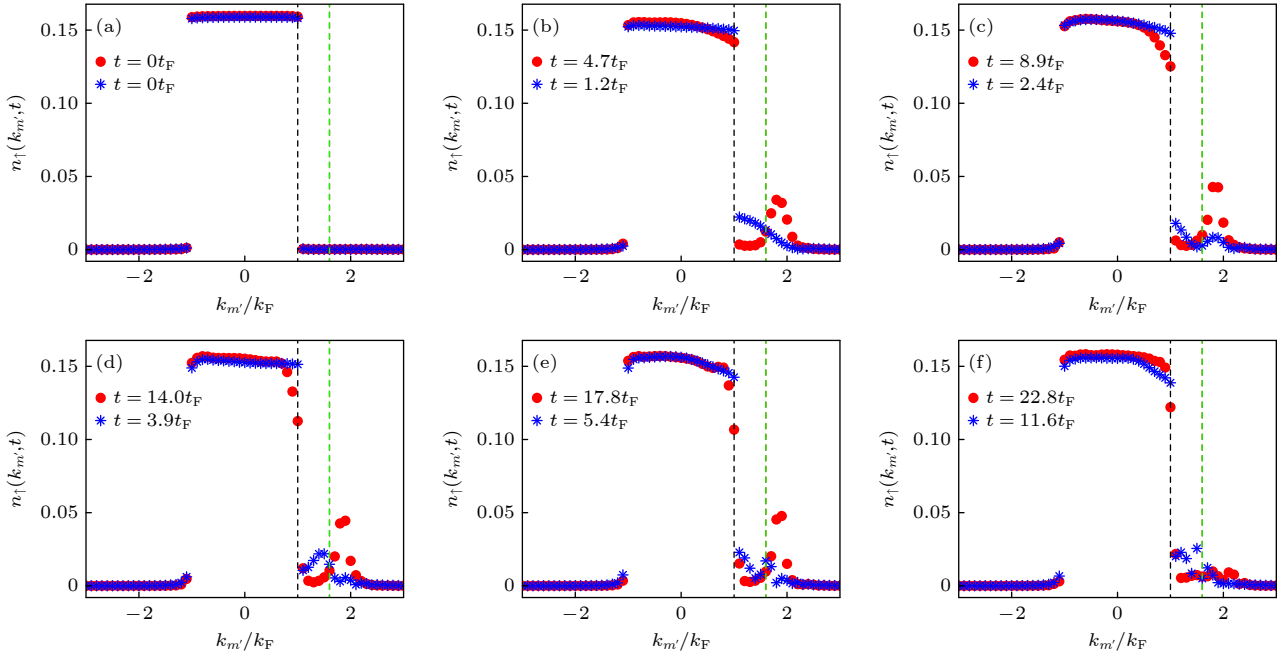


图 6 在总动量 $Q = 1.6k_F$ 的条件下, 不同时刻下自旋向上粒子的动量分布. 红色圆圈代表排斥相互作用强度 $c = 5$ 的情况. 蓝色八角星代表吸引相互作用强度 $c = -5$ 的情况. 绿色虚线标注的是 $k_{m'} = Q$ 的位置. 黑色虚线标注的是右侧费米动量的位置. (b–f) 中所选取的时刻和图 5 中 b–f 标记的坐标相对应. 粒子数 $N = 22$, 系统长度 $L = 22$

Fig. 6. Momentum distributions of the spin-up particles at different times for a total momentum $Q = 1.6k_F$. Red circles correspond to the repulsive interaction case with $c = 5$, while blue octagons correspond to the attractive interaction case with $c = -5$. The green dashed line indicates the position $k_{m'} = Q$, and the black dashed line marks the right Fermi momentum. The times chosen in panels (b–f) correspond to the coordinates labeled b–f in Fig. 5. The particle number is $N = 22$ and the system length is $L = 22$.

消失, 只在费米海附近与初态有明显不同. 说明在此时自旋向上粒子通过相互作用将动量基本归还给自旋向下粒子.

当系统为吸引相互作用时, 图 6 蓝色八角星符号可以看出, 当时间 $t = 1.2t_F$ 时, 自旋向下粒子的动量随时间的演化第一次出现最小值, 由于吸引相互作用, 自旋向上粒子的动量分布与系统初始时刻明显不同. 在费米海边界到 $k_{m'} = 2k_F$ 的位置附近出现由高逐渐降低的分布, 与排斥相互作用不同, 动量分布不会在此时出现峰值. 当时间 $t = 2.4t_F$ 时, 自旋向下粒子的动量随时间的演化达到第一个次峰. 自旋向上粒子的动量分布从费米海边界到 $k_{m'} = 1.6k_F$ 呈现逐步降低的趋势. 从 $k_{m'} = 1.6k_F$ 到 $k_{m'} = 2k_F$ 的位置出现先增后减的趋势, 在 $k_{m'} = 1.8k_F$ 附近出现较小的峰值, 其峰值的高度明显小于排斥相互作用在 $k_{m'} = 1.8k_F$ 的峰值高度. 当时间 $t = 3.9t_F$ 时, 自旋向下粒子的动量随时间的演化第二次出现最小值, 自旋向上粒子的动量分布在 $k_{m'} = 1.4k_F$ 位置出现峰值, 略低于 $Q = 1.6k_F$ 对应的位置. 当时间 $t = 5.4t_F$ 时, 自旋向下粒子的动量

随时间的演化达到第二个次峰, 自旋向上粒子的动量分布在 $k_{m'} = 1.6k_F$ 位置出现峰值. 综上, 系统峰值出现的位置略小于排斥情况下 $k_{m'} = 1.8k_F$ 的位置, 且峰值也较低. 这是因为当不同自旋粒子间的吸引相互作用越强, 会导致粒子的有效质量增大, 由于系统在演化过程中保持动量守恒, 所以会使得有效速度降低. 在 $t = 11.6t_F$ 时, 自旋向上粒子的动量分布在费米海外仍有较高的值, 系统并没有恢复到与初始时刻相近的状态, 因此自旋向下粒子的动量仅出现较弱的量子复苏现象.

5.2 量子颤振周期和自旋向下粒子的化学势

如图 7(a) 所示, 量子颤振的周期 τ 与总动量是 0 时基态的自旋向下粒子的化学势 $\mu_{\downarrow c}$ 对应的周期一致, 与排斥费米气体类似^[40], 即

$$\tau = \frac{2\pi}{|\mu_{\downarrow c}|}. \quad (37)$$

$\mu_{\downarrow c}$ 取绝对值的原因是吸引相互作用下自旋向下粒子的化学势为负值. 关于自旋向下粒子化学势的推导, 多种途径结果一致: 总动量为 0 时, 可通过热力

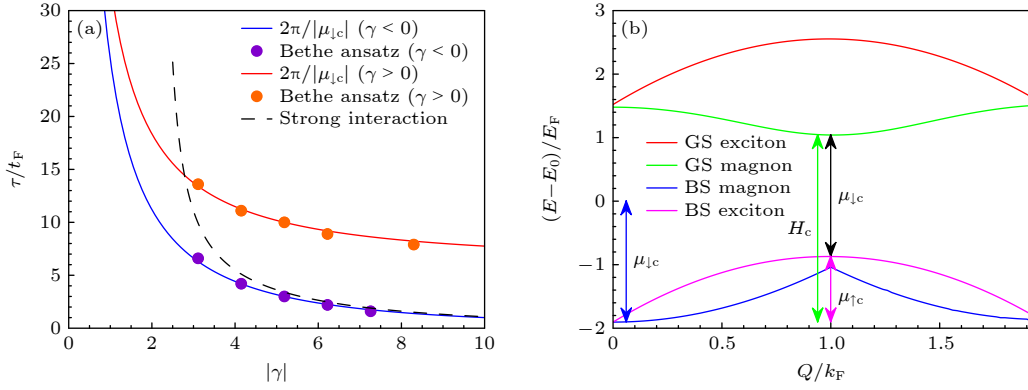


图 7 (a) 量子颤振的周期随无量纲相互作用强度的变化. (b) 气态的激子态和磁振子态, 束缚态的激子态和磁振子态的色散关系. 无量纲相互作用强度 $\gamma = c/n = -5$. (a) 和 (b) 的粒子数分别为 $N = 28$ 和 $N = 100$

Fig. 7. (a) Dependence of the quantum flutter period on the dimensionless interaction strength. (b) Dispersion relations of the excitonic and magnonic states in the gas-state regime and in the bound-state regime. The dimensionless interaction strength is $\gamma = c/n = -5$. The particle numbers in (a) and (b) are $N = 28$ and $N = 100$, respectively.

学 BA 方程推导量子相变点的临界磁场与临界化学势得到, 也可借助离散 BA 方程根据向理想费米气基态添加一个自旋向下粒子所需能量推导得出; 总动量等于费米动量时, 气态磁振子态与束缚态激子态的能量差等于该化学势; 总动量大于费米动量时, 利用单粒子态激发能与缀饰能的关系, 可推导出占据概率较高且两两配对的束缚态激子态与气态磁振子态的能量差等于该化学势.

首先介绍通过热力学 BA 方程得出自旋向下粒子的方法. $\mu_{\downarrow c}$ 由量子相变点处的临界化学势 μ_c 和临界磁场 H_c 决定

$$\mu_{\downarrow c} = \mu_c - \frac{H_c}{2}. \quad (38)$$

同时自旋向上粒子的化学势 $\mu_{\uparrow c}$ 可以写为理想费米气体的形式,

$$\mu_{\uparrow c} = \mu_c + \frac{H_c}{2} = \pi^2 n^2. \quad (39)$$

其中 $n = N/L$. 热力学极限下, 即 $N \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$ 时, 量子相变点处的临界化学势 μ_c 和临界磁场 H_c 可以用描述热力学平衡态的 BA 积分方程获得^[41].

$$\begin{aligned} \epsilon^b(\lambda) = & 2 \left(\lambda^2 - \mu - \frac{c^2}{4} \right) - \int_{-B}^B a_2(\lambda - \lambda') \epsilon^b(\lambda') d\lambda' \\ & - \int_{-Q_c}^{Q_c} a_1(\lambda - k) \epsilon^u(k) dk, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\epsilon^u(k) = \left(k^2 - \mu - \frac{H}{2} \right) - \int_{-B}^B a_1(k - \lambda) \epsilon^b(\lambda) d\lambda, \quad (41)$$

其中

$$a_{m'}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{m' |c|}{(m' c/2)^2 + \xi^2}. \quad (42)$$

缀饰能 $\epsilon^b(\lambda) \leq 0$ [$\epsilon^u(k) \leq 0$] 对应 $|\lambda| \leq B$ ($|k| \leq Q_c$) 的占据态. $\epsilon^b(\epsilon^u)$ 的正值对应未占据态. 积分边界 B 和 Q_c 分别表征束缚对和非配对费米子的费米面. 完全极化费米气体到出现自旋向下粒子的转变点由 $B = 0$, $\epsilon^b(0) = 0$ 和 $\epsilon^u(\pm Q_c) = 0$ 确定, 这给出了临界磁场, 具体为

$$H_c = 2Q_c^2 + \frac{|c|^2}{2} + |c|n - \left(\frac{2Q_c^2}{\pi} + \frac{|c|^2}{2\pi} \right) \arctan\left(\frac{2Q_c}{|c|}\right), \quad (43)$$

其中 $Q_c = \pi n$. 通过 (39) 式即可得到 μ_c , 将临界磁场和临界化学势代入 (38) 式即可得到自旋向下粒子的化学势. 在强相互作用极限下, 自旋向下粒子化学势对应的周期可由 (37) 式写为

$$\tau = \left| \frac{2\pi t_F}{-\frac{\gamma^2}{2\pi^2} - 1 - \frac{8}{3\gamma} + o(\gamma^{-3})} \right|. \quad (44)$$

图 7(a) 表明, 当 $|\gamma| \rightarrow \infty$ 时, 量子颤振的周期趋近于零.

自旋向下粒子的化学势可以理解理想费米气体系统中增加一个自旋向下的粒子所需要的能量, 即图 7(b) 中标注的蓝色双箭头对应的值. 借助该理解可得

$$\mu_{\downarrow c} = E_{\text{Ground}}(0) - E_0, \quad (45)$$

其中 $E_0 = \sum_{j=1}^{N-1} (k_j)^2$, $k_j = [-(N/2 - 1), \dots, (N/2 - 1)] 2\pi/L$, 代表 $N - 1$ 个费米子组成的理想费米气体系统的基态能量. 对于束缚态的离散 BA

方程 (9)–(12) 式, 系统的基态对应的量子数取 $n_{\lambda} = 0$, $n_{j'} = -(N-3)/2, \dots, (N-3)/2$, 弦解的实部 $p = 0$, 在热力学极限下得到总动量为零的情况下 ($Q = 0$) 的基态能量

$$E_{\text{Ground}}(0) = E_{\text{bare}}(N-2) + \left(\frac{2Q_c^2}{\pi} + \frac{|c|^2}{2\pi} \right) \arctan \frac{2Q_c}{|c|} - |c|n - \frac{c^2}{2} + o(1/L), \quad (46)$$

其中裸能量 $E_{\text{bare}}(N-2) = \sum_{j=1}^{N-2} (k_{j'}^{\text{bare}})^2$, 裸动量 $k_{j'}^{\text{bare}} = 2\pi n_{j'}/L$. 将 $E_{\text{Ground}}(0)$ 和 E_0 求和化积分后的结果代入 (45) 式可得自旋向下粒子的化学势

$$\mu_{\downarrow c} = \left(\frac{2Q_c^2}{\pi} + \frac{|c|^2}{2\pi} \right) \arctan \frac{2Q_c}{|c|} - \left(\pi^2 n^2 + |c|n + \frac{|c|^2}{2} \right). \quad (47)$$

其结果与通过描述热力学平衡态的 BA 积分方程得到的结果一致.

我们发现量子颤振的周期可以由总动量为费米动量处的两个态决定, 具体为气态磁振子态和束缚态激子态, 这两个态对应的能量差与自旋向下粒子的化学势相等, 即图 7(b) 中标注的黑色双箭头对应的值

$$\mu_{\downarrow c} = E_{\text{BS Exciton}}(k_F) - E_{\text{GS Magnon}}(k_F). \quad (48)$$

磁振子态代表自旋向下的粒子从 $k = 0$ 处激发到费米海内的其它准粒子态. 激子态代表自旋向下的粒子位于 $k = 0$ 附近, 仅由一个自旋向上粒子从费米海内激发到费米面处, 从而在费米海内留下一个空穴. 对于气态的磁振子态的能量最低态, 即总动量等于费米动量 ($Q = k_F$) 处, 自旋向下的粒子位于费米面, 对应的离散 BA 方程的 (7), (8) 式中的量子数取 $n_{\lambda} = N/2 - 1$, $n_j = -(N-1)/2, \dots, (N-1)/2$, 通过热力学极限下的近似, $\lambda \rightarrow -\infty$, 同时忽略掉 $1/L$ 的高阶小量得到能量本征值

$$E_{\text{GS Magnon}}(k_F) = E_{\text{bare}}(N) + o(1/L), \quad (49)$$

其中裸能量 $E_{\text{bare}}(N) = \sum_{j=1}^N (k_j^{\text{bare}})^2$, 裸动量 $k_j^{\text{bare}} = 2\pi n_j/L$. 对于束缚态的总动量等于费米动量 ($Q = k_F$) 下的激子态, 自旋向上的粒子从 $k = 0$ 激发到费米面处, 对应的离散 BA 方程的 (9)–(12) 式中的量子数取 $n_{\lambda} = N/2 - 1$, $n_{j'} = -(N-3)/2, \dots, -1/2, 3/2, \dots, (N-1)/2$, 在热力学极限下, $\lambda \rightarrow 0$, 其本征能量为

$$E_{\text{BS Exciton}}(k_F) = E_{\text{bare}}(N) - Q_c^2 + \left(\frac{2Q_c^2}{\pi} + \frac{|c|^2}{2\pi} \right) \times \arctan \frac{2Q_c}{|c|} - |c|n - \frac{|c|^2}{2} + o(1/L). \quad (50)$$

将 (49) 式和 (50) 式代入 (48) 式可以得到 $\mu_{\downarrow c}$, 其结果与总动量为 0 时的自旋向下粒子的化学势 (47) 式一致. 与排斥情况相比较 [42], 相同的是都是激子态与磁振子态的共同参与; 不同的是, 排斥情况只有气态, 而吸引情况下气态和束缚态共同参与.

除上述方法外, 在总动量等于费米动量时, 还可采用间接途径确定量子颤振周期对应的能量: 分别计算气态磁振子态与束缚态激子态相对于基态的能量差, 并进一步取两者之差即可得到该能量. 在费米动量处, 束缚态激子态的能量与基态能量之差为

$$\delta E_{\text{BS Exciton}}(k_F) = E_{\text{BS Exciton}}(k_F) - E_{\text{Ground}}(0) = \mu_{\uparrow c}, \quad (51)$$

即图 7(b) 中品红色双箭头对应的值. 在费米动量处, 气态磁振子态的能量与基态能量之差为

$$\delta E_{\text{GS Magnon}}(k_F) = E_{\text{GS Magnon}}(k_F) - E_{\text{Ground}}(0) = H_c, \quad (52)$$

即图 7(b) 中绿色双箭头对应的值. 将上面的两个能量差相减, 再根据 (38) 式和 (39) 式即可得到自旋向下粒子的化学势

$$\delta E_{\text{BS Exciton}}(k_F) - \delta E_{\text{GS Magnon}}(k_F) = \mu_{\uparrow c} - H_c = \mu_{\downarrow c}, \quad (53)$$

其结果与 (47) 式一致.

对于高于费米动量的情况, 依然可以用具有较高占据概率且互相配对的束缚态激子态与气态磁振子态的能量差来表示自旋向下粒子的化学势, 进而得到量子颤振的周期. 束缚态激子态的激发能可以理解为单粒子态激发能相加 [43], 即

$$\Delta E_{\text{BS Exciton}} = \varepsilon^b(\lambda_b) + \varepsilon^u(k_p^e) - \varepsilon^u(k_h^e). \quad (54)$$

其中 λ_b 代表束缚对的快度, k_p^e 代表激发到费米海外的粒子对应的波矢, k_h^e 代表空穴对应的波矢. $\varepsilon^u(k_p^e)$ 和 $-\varepsilon^u(k_h^e)$ 分别代表未配对情况下粒子和空穴对应的激发能, $\varepsilon^b(\lambda_b)$ 代表束缚对的激发能. 由于该系统只有一个自旋向下的粒子, 忽略有关自旋向下粒子激发能 $\varepsilon^b(\lambda_b)$ 的积分项, 则束缚对的激发能 (40) 式写为

$$\varepsilon^b(\lambda_b) = 2 \left(\lambda_b^2 - \mu - \frac{c^2}{4} \right) - \int_{-Q_c}^{Q_c} a_1(\lambda_b - k) \varepsilon^u(k) dk, \quad (55)$$

未配对粒子 (背景粒子) 的激发能 (41) 式具体可写为

$$\varepsilon^u(k) = k^2 - \mu_c - \frac{H_c}{2}. \quad (56)$$

气态磁振子态的激发能也可理解为单粒子态激发能相加, 即

$$\Delta E_{\text{GS Magnon}} = \varepsilon^c(k_p^m) + \varepsilon^s(\lambda_s). \quad (57)$$

其中 k_p^m 代表气态被激发到费米海外的粒子对应的波矢, $\varepsilon^c(k_p^m)$ 对应的能量具体表达式与束缚态的 (56) 式相同. λ_s 代表自旋向下粒子对应的快度, $\varepsilon^s(\lambda_s)$ 代表气态对应的自旋激发能

$$\varepsilon^s(\lambda_s) = H_c + \int_{-Q_c}^{Q_c} a_1(\lambda_s - k) \varepsilon^c(k) dk. \quad (58)$$

因此量子颤振周期对应的能量可用互相配对的束缚态激子态与气态磁振子态的能量差表示为

$$\Delta E_{\text{QF}} = \Delta E_{\text{BS Exciton}} - \Delta E_{\text{GS Magnon}}. \quad (59)$$

在热力学极限下, $\lambda_s \rightarrow \infty$, $\lambda_b = 0$, $k_p^m = k_p^c$, $k_h^c = 0$, 将相关的变量分别代入 (54) 式和 (57) 式可得

$$\Delta E_{\text{QF}} = |\varepsilon^u(0)| - |\varepsilon^s(\infty)| = \mu_{\uparrow c} - H_c = \mu_{\downarrow c}. \quad (60)$$

这与文献 [7] 排斥玻色气体中的自旋向下粒子化学势的表达式类似, 都是激子态的空穴激发能与磁振子态的自旋激发能的能量差. 最终该情况下, 自旋向下粒子的化学势可以化简成与 (38) 式一致的形式.

6 结 论

基于一维吸引相互作用单自旋翻转费米气体的 BA 严格解, 将交叠积分以及单体关联函数、两体关联函数的矩阵元简化为简单函数的有限求和形式, 从而实现对大量本征态占据概率与关联函数长时间演化的高效计算. 将具有动量的自旋向下杂质粒子注入无相互作用自旋向上费米子构成的基态后, 初始时刻将不同自旋粒子间的相互作用淬灭至有限吸引强度, 系统研究了不同相互作用下两体关联函数的演化特性及量子颤振行为. 首先, 弱吸引相互作用下: 当初始动量小于等于费米动量时, 系统动力学主要由束缚态主导, 杂质粒子与背景粒子形成束缚对, 两体关联函数在局域关联区域出现

显著的概率密度峰, 且峰值附近形成沿正方向运动的关联孔洞, 该孔洞的演化周期与占据概率最高的两个束缚态的能量差所对应的周期相吻合; 当初始动量大于费米动量时, 非常规态、气态与束缚态的耦合作用导致关联函数在局域关联区域随时间演化交替呈现波峰与波谷, 波峰处数值大于 1, 呈现束缚态特性, 反映杂质粒子与背景粒子形成束缚对并协同运动, 波谷处数值小于 1, 呈现气态特性, 反映束缚对在运动过程中解离, 且因多种高占据概率本征态的共同参与, 关联波峰的演化无法通过占据概率最高的两个态进行描述. 其次, 强吸引相互作用下: 无论杂质粒子初始动量是否大于费米动量, 关联函数在局域关联区域的峰值始终大于 1, 呈现束缚态特征, 且局域关联峰两侧形成不向外传播的关联孔洞. 最后, 研究了吸引相互作用下自旋向下粒子动量的演化行为, 进一步建立任意相互作用强度下量子颤振周期与自旋向下粒子化学势的统一关系, 即 $\tau = 2\pi/|\mu_{\downarrow c}|$. 并通过热力学与离散 BA 方程等多种方法得到一致的自旋向下粒子化学势. 本文在吸引相互作用淬灭动力学与量子颤振相关领域给出了动力学演化结果, 有助于深化对量子多体物理非平衡态性质的理解, 为相关的超冷原子杂质动力学实验提供理论参考.

感谢中国科学院精密测量科学与技术创新研究院姜玉铸研究员的讨论.

参 考 文 献

- [1] Senaratne R, Cavazos-Cavazos D, Wang S, He F, Chang Y T, Kafle A, Pu H, Guan X W, Hulet R G 2022 *Science* **376** 1305
- [2] Yan Z Z, Ni Y, Robens C, Zwierlein M W 2020 *Science* **368** 190
- [3] Yan Z J, Patel P B, Mukherjee B, Fletcher R J, Struck J, Zwierlein M W 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 093401
- [4] Chen S, Guan X W, Yin X G, Guan L M, Batchelor M T 2010 *Phys. Rev. A* **81** 031608
- [5] Cheng S, Chen Y Y, Guan X W, Yang W L, Lin H Q 2025 *Phys. Rev. A* **111** L010802
- [6] Robinson N, de Klerk A J, Caux J S 2021 *SciPost Phys.* **11** 104
- [7] Zhang Z H, Jiang Y Z, Lin H Q, Guan X W 2024 *Phys. Rev. A* **110** 023329
- [8] Gamayun O, Panfil M, Taha Sant'Ana F 2023 *Phys. Rev. Res.* **5** 043265
- [9] Gamayun O, Panfil M, Sant'Ana F T 2022 *Phys. Rev. A* **106** 023305
- [10] Mao R X, Guan X W, Wu B 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043645
- [11] Song Y D, Barthwal S 2019 *Commun. Theor. Phys.* **71** 617
- [12] Henson B, Ross J, Thomas K, Kuhn C, Shin D, Hodgman S, Zhang Y H, Tang L Y, Drake G, Bondy A 2022 *Science* **376** 199

- [13] Simmons S, Bayocboc Jr F, Pillay J, Colas D, McCulloch I, Kheruntsyan K 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 180401
- [14] Li J, Chockalingam S, Cohen T 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 014302
- [15] Qu Y F, Stefanini M, Shi T, Esslinger T, Gopalakrishnan S, Marino J, Demler E 2025 *Phys. Rev. B* **111** 155113
- [16] McGuire J B 1965 *J. Math. Phys.* **6** 432
- [17] McGuire J B 1966 *J. Math. Phys.* **7** 123
- [18] Li W L, Cui X L 2017 *Phys. Rev. A* **96** 053609
- [19] Castella H, Zotos X 1993 *Phys. Rev. B* **47** 16186
- [20] Castella H 1996 *Phys. Rev. B* **54** 17422
- [21] Zvonarev M, Cheianov V, Giamarchi T 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 240404
- [22] Hu H, Wang J, Liu X J 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 083403
- [23] Hu H, Wang J, Liu X J 2025 *Phys. Rev. Lett.* **134** 153403
- [24] Liu X J, Hu H 2025 *AAPPS Bulletin* **35** 9
- [25] Meinert F, Knap M, Kirilov E, Jag-Lauber K, Zvonarev M B, Demler E, Nägerl H C 2017 *Science* **356** 945
- [26] Zhang K L, Jiang X D, Li Y Y 2024 *Phys. Rev. B* **110** 184304
- [27] Mathy C J, Zvonarev M B, Demler E 2012 *Nat. Phys.* **8** 881
- [28] Wang B T, Vashisht A, Guo Y, Dhar S, Landini M, Nägerl H C, Goldman N 2025 *Phys. Rev. Lett.* **135** 253403
- [29] Li R T, Cheng S, Chen Y Y, Guan X W 2023 *J. Phys. A: Math. Theor.* **56** 335204
- [30] Zheng M C, Qiao Y, Wang Y P, Cao J P, Chen S 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 086502
- [31] Yi Y, Qiao Y, Cao J P, Yang W L 2022 *Nucl. Phys. B* **977** 115732
- [32] Chang M L, Yin X G, Chen L, Zhang Y B 2023 *Phys. Rev. A* **107** 053312
- [33] Peng C, Liu R J, Zhang W, Cui X L 2021 *Phys. Rev. A* **103** 063312
- [34] Cui X L 2020 *Phys. Rev. A* **102** 061301
- [35] Dolgirev P E, Qu Y F, Zvonarev M B, Shi T, Demler E 2021 *Phys. Rev. X* **11** 041015
- [36] Yin X G, Guan X W, Zhang Y B, Su H B, Zhang S Z 2018 *Phys. Rev. A* **98** 023605
- [37] Gamayun O, Lychkovskiy O, Zvonarev M 2020 *SciPost Phys.* **8** 053
- [38] Gamayun O, Lychkovskiy O 2024 *SciPost Phys.* **17** 063
- [39] Yin X G, Yu H R, Hao Y J, Zhang Y B 2024 *Acta Phys. Sin.* **73**. (in Chinese) [尹相国, 于海如, 郝亚江, 张云波 2024 物理学报 73 020302]
- [40] Wang S, Zhang Z H, Guan X W 2025 *Commun. Theor. Phys.* **77** 055502
- [41] Guan X W, Ho T L 2011 *Phys. Rev. A* **84** 023616
- [42] Knap M, Mathy C J M, Ganahl M, Zvonarev M B, Demler E 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 015302
- [43] Pan J F, Luo J J, Guan X W 2022 *Commun. Theor. Phys.* **74** 125802

SPECIAL TOPIC—Ultracold atomic and molecular physics

Quench dynamics and quantum flutter properties of one-dimensional attractive single-spin flipped Fermi gases*

YIN Xiangguo^{1)2)3)†} ZHAO Shulong¹⁾²⁾

1) (*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*State Key Laboratory of Quantum Optics Technologies and Devices, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

3) (*Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

(Received 2 February 2026; revised manuscript received 15 February 2026)

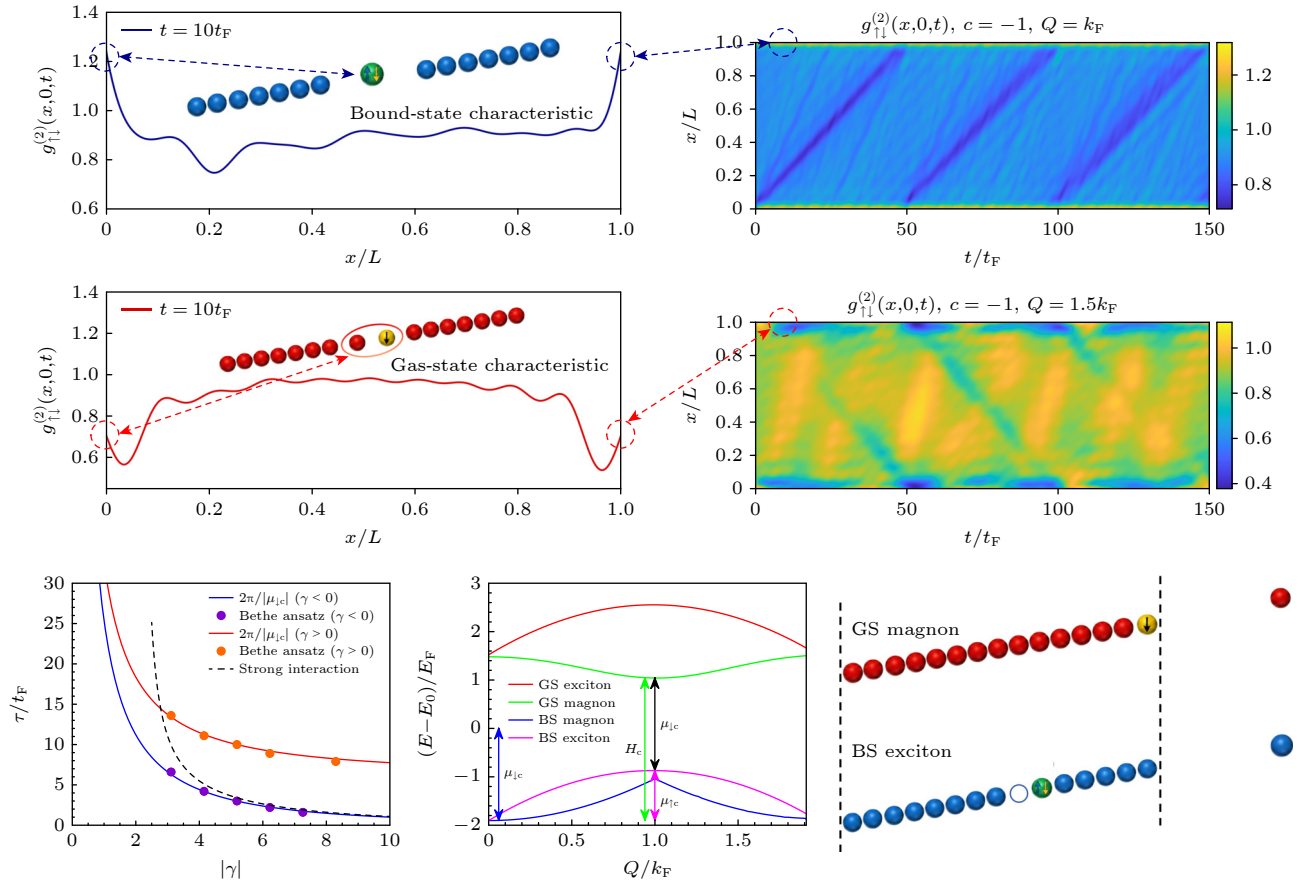
Abstract

The nonequilibrium dynamics of impurities in quantum many-body systems constitute a frontier topic in ultracold-atom physics and are key to uncovering the microscopic mechanisms of polaron physics and collective excitation behavior. Compared with the extensively studied repulsively interacting systems, the dynamical behavior under attractive interactions remains insufficiently explored in a systematic manner, owing to the complex coupling mechanisms among bound states, gas states, and irregular states. We take the ground state of a one-dimensional ideal Fermi gas as the initial state, and add a spin-down impurity particle carrying momentum. The impurity has an attractive interaction with the spin-up fermions. We study the time-evolution behavior of the two-body correlation functions between particles of different spins and the impurity momentum. First, based on the exact solution from the Bethe ansatz (BA), starting from the eigenstate wave functions, we analytically simplify the overlap integrals, the matrix elements of the one-body correlation function of spin-up particles, and the matrix elements of the two-body correlation functions between particles of different spins into finite-sum expressions of simple functions, thereby enabling efficient computations of the occupation probabilities of a large number of eigenstates and the long-time evolution of the correlation functions. Second, in the weakly attractive regime: when the total momentum is less than or equal to the Fermi momentum, the dynamics exhibits features of bound states. The two-body correlation function between particles of different spins shows a stable correlation peak and an outward-propagating correlation hole, and its evolution period agrees with the period corresponding to the energy difference between the two bound states with the highest occupation probabilities. Conversely, when the total momentum is greater than the Fermi momentum, due to the superposition of bound states, gas states, and irregular states, the system exhibits complex oscillatory behavior, alternating between bound-state-like and gas-state-like features. In the strongly attractive regime, regardless of the initial momentum, the system exhibits bound-state-dominated features locally, characterized by a localized correlation peak and Friedel-like oscillations induced by scattering interference. Finally, we rigorously characterize the phenomenon of quantum flutter, namely the periodic oscillation of the impurity momentum, and find that the quantum-flutter period is strictly determined by the chemical potential of the spin-down impurity particle $\mu_{\downarrow c}$, namely $\tau = 2\pi/|\mu_{\downarrow c}|$. We obtain consistent results for the chemical potential of the spin-down particle via four approaches: For zero total momentum, it can be obtained by deriving the critical magnetic field and the critical chemical potential at the quantum phase-transition point from the thermodynamic BA equations, and it can also be derived from the discrete BA equations via the energy required to inject a single spin-down particle into the ground state of the ideal Fermi gas; when the total

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12461160324) and the Research Foundation for Basic Research of Shanxi Province, China (Grant No. 202103021224033).

† Corresponding author. E-mail: yinxiangguo@sxu.edu.cn

momentum equals the Fermi momentum, the energy difference between the gas-state magnon and the bound-state exciton equals this chemical potential; when the total momentum is greater than the Fermi momentum, by using the relation between the single-particle excitation energy and the dressed energy, we can derive that the energy difference between the bound-state exciton states and the gas-state magnon states, which have relatively high occupation probabilities and form pairwise correspondences, equals this chemical potential. This work investigates the evolution laws of quench dynamics and quantum flutter in systems with attractive interactions, which helps deepen the understanding of nonequilibrium-state properties in quantum many-body physics and provides theoretical support for related ultracold-atom experiments on impurity dynamics.



Keywords: one-dimensional Fermi gas, correlation function, quench dynamics, quantum flutter

DOI: [10.7498/aps.75.20260182](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260182)

CSTR: [32037.14.aps.75.20250182](https://cstr.net.cn/urn:cn:11-1131-2026-0182)