

一维 p 波费米气体的输运性质 *

尹相国^{1)2)3)†} 宿莹丹¹⁾²⁾

1) (山西大学, 理论物理研究所, 太原 030006)

2) (山西大学, 光量子技术与器件国家重点实验室, 太原 030006)

3) (山西大学, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

非遍历动力学中的输运是量子多体物理的重要课题, 可积系统凭借其无穷多守恒量展现出独特的弹道输运特性. 基于 Bethe ansatz 与广义流体动力学理论, 系统地研究了一维吸引相互作用 p 波费米气体的平衡与非平衡输运性质. 在热力学 Bethe ansatz 方程和广义流体动力学框架下给出了描述弹道输运的 Drude weight 表达式, 并建立了其与基本热力学量 (例如粒子数密度、能量密度和熵等) 之间的普适关系. 通过解析推导与数值模拟, 给出了 Drude weight 在低温和有限温度下在弱相互作用区域的演化规律, 以及在量子临界区所遵循的普适标度行为. 在非平衡输运方面, 阐述了倾斜势、局域化学势差与局域温度差三种情况下的输运过程, 还分析了粒子流和能量流的演化, 验证了理论框架的自洽性. 本研究不仅为理解一维 p 波费米气体的弹道输运提供了系统的理论框架, 有利于加深对一维量子连续可积系统输运性质的理解.

关键词: 一维 p 波费米气体, 可积系统, 广义流体动力学, Drude weight

PACS: 03.75.Ss, 02.30.IK, 05.70.Ce, 66.10.cd

1 引言

量子多体物理是凝聚态物理中的一个基本课题, 其系统的行为本质上与其组成部分的量子统计密切相关^[1], 并在超冷原子实验平台上得到深入探索^[2-5]. 一维量子气体是理解多体物理系统的一个关键模型, 可通过 Feshbach 共振^[6,7] 技术, 利用磁场精确地控制原子之间的相互作用强度, 从而在强横向约束下实现一维量子气体的实验制备与研究^[8].

† 通信作者. E-mail: yinxianguo@sxu.edu.cn

* 国家自然科学基金 (批准号: 12461160324) 和山西省基础研究计划 (批准号: 202103021224033) 资助的课题.

在一维量子多体系统中, 可积系统^[9-13] 可以通过 Bethe ansatz (BA)^[14-17] 等方法求得严格的精确解. 例如在吸引力 Gaudin-Yang 模型^[18]、单自旋翻转费米气体^[19]、高度极化费米气体^[20] 等均已实现精确求解. 因其拥有无穷多个守恒量而对系统的动力学演化形成强约束, 所以广义流体动力学 (Generalized Hydrodynamics, GHD) 作为一种新的理论方法被提出^[21-23], 为宏观尺度上研究此类系统的非平衡演化提供了理论工具, 已在一系列理论与实验工作中得到验证^[24,25]. 此外, 可积系统是一类特殊的非遍历系统, 具有独特的输运行为: 其动力学由长寿命准粒子主导, 呈现出无耗散的弹道输运特征, 由 Drude weight (DW) 描述^[26-28]. 1957 年, Kubo^[29] 提出线性响应理论, 为研究量子多体系统的输运行为提供了理论基础. 随着广义流体动力学理论的发展, 可积系统的输运研究取得了重要进展. 例如, XXZ 自旋链的自旋扩散系数的精确计算^[30]、一维费米气体的热输运分析^[31], Hubbard 模型^[32] 中 DW 的解析推导, 以及两分量玻色气体在温度差下的输运研究^[33]. 最近, Chandak^[34] 对一维玻色-费米混合气体的 Bethe-ansatz 精确求解, 表明由于伽利略不变性, 体现粒子流对化学势响应的 DW 正比于粒子数密度与质量的比值. 此外, Göhmann 指出^[35] 在非相对论气体中根据伽利略不变性也可得到此关系, 并应用于 Lieb-Liniger 玻色气体. 即使系统不具备可积性, 在仅满足伽利略不变性的电子-电子相互作用体系中, 该关系同样成立^[36].

一维 p 波费米气体是冷原子气体中的一个重要可积模型, 该系统可以通过对费米原子云施加强横向限制来实现^[37]. 对于 p 波费米气体, 泡利不相容原理禁止 s 波 ($l = 0$) 碰撞, 因此主导相互作用是通过 p 波 ($l = 1$) 碰撞, 其中 l 是轨道角动量^[38]. 这种 p 波相互作用在理论和实验上均受到广泛关注. 在理论上, 早期 Imambekov 等人^[39] 已利用 BA 方法对一维吸引 p 波费米气体模型进行了严格求解, 并揭示了其奇异的超费米子 Tonks-Girardeau 相. 在实验方面, V.Venu 等研究者^[1] 首次在光学晶格中观测并相干操控了费米子之间的弹性么正 p 波相互作用. 然而, 该体系的弹道输运性质尚未得到系统阐明, 研究其输运行为不仅有助于揭示 p 波相互作用的独特效应, 也可为广义流体动力学理论提供重要的检验平台.

本文主要研究一维 p 波费米气体系统的输运性质, 首先基于 BA 方法和 GHD 理论给出 DW 的表达式, 探究了平衡态下的输运性质, 并推导低温和有限温度下弱相互作用的解析结果. 进一步, 分析了倾斜势、局域化学势差与局域温度差三种非平衡驱动下的动力学演化过程. 本文的结构安排如下: 第 2 节介绍一维 p 波费米气体的理论模型, 基于 Bethe 假设推导系统准动量满足的 BA 方程, 给出热力学极限下的热力学 Bethe ansatz (Thermodynamic Bethe ansatz, TBA) 方程, 并简要介绍 GHD 方程. 第 3 节研究该模型平衡态下的输运性质, 计算低温与有限温度弱相互作用区域内的 DW. 第 4 节详细阐述倾斜势、局域化学势差与局域温度差三种典型的非平衡协议下的输运过程, 给出相应的数值结果与分析, 并与平衡态下的 DW 进

行对比. 第 5 节分析该模型在量子临界点附近 DW 的标度行为. 最后, 第 6 节对全文研究成果进行总结.

2 一维 p 波费米气体模型

本文聚焦于一维 p 波相互作用的无自旋费米气体模型. 由于粒子间的相互作用会引发散射过程, 并直接调控系统的宏观物理性质, 因此我们可以利用相移和散射振幅来精准刻画粒子间的散射行为^[39]. 考虑到散射伴随着强烈的三体损失, 为正确表征 p 波气体的低能散射特性, 则需要在散射振幅中加入有效范围参数^[40]. 此时三维空间中 p 波相互作用的相移 $\delta_p(k)$ ^[41] 可以表示为 $k^3 \cot \delta_p(k) = -1/\omega - \alpha k^2 + O(k^4)$, 其中 k 是碰撞原子的相对动量, ω 是散射体积, α 是有效范围. 在低能和横向简谐势强束缚下的准一维 p 波费米气体的散射振幅^[42] 为

$$f_p^{\text{odd}} = -ik \left(\frac{1}{l_p} + ik + \xi_p k^2 \right)^{-1}, \quad (1)$$

其中 l_p 是一维 p 波散射长度, ξ_p 是一维 p 波有效力程, 两者共同决定了系统的关联特性. 它们与三维散射体积 ω 和有效范围 α 的关系为 $l_p = 3a_{\perp} [a_{\perp}^3/\omega - 3\sqrt{2}\zeta(-1/2)]^{-1}$, $\xi_p = \alpha a_{\perp}^2/3 > 0$, 而 $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/(m\omega_{\perp})}$ 为横向简谐势的特征长度, m 是费米子质量, ω_{\perp} 为横向简谐势的频率, $\zeta(s)$ 为黎曼函数. 为了便于分析, 将散射长度 l_p 和有效力程 ξ_p 进行无量纲化, 定义 $\gamma_1 = 1/(|l_p|\eta)$, $\gamma_2 = 1/(\xi_p\eta)$, 其中 η 为粒子数密度. 系统能量 E_{total} 由下列表达式给出

$$E_{\text{total}}/L = e(\gamma_1, \gamma_2) (\hbar\eta)^2 / (2m). \quad (2)$$

其中 $e(\gamma_1, \gamma_2)$ 为无量纲化的能量密度, L 为系统长度, \hbar 为约化普朗克常数. 我们绘制了相互作用参数空间中的能量密度图.

如图 1 所示, 首先考虑 $\gamma_2 \rightarrow \infty$ 的极限情况, 此时有效力程 $\xi_p \rightarrow 0$, 系统映射到玻色 Lieb-Liniger 模型的对偶形式, 即 Cheon-Shigehara (CS) 模型^[39], 仅保留了散射长度主导的相互作用效应. 在 CS 模型的核心框架下, 系统在 γ_1 取两种极限下呈现不同的物理性质: 当 γ_1 很大时, 散射长度 $l_p \rightarrow 0$, 费米子间相互作用极弱, 对应图中的红色区域, 其热力学性质等价于玻色子的强相互作用区; 当 γ_1 很小时, 散射长度 $l_p \rightarrow \infty$, 费米系统达到强关联区域, 可映射为弱相互作用玻色子, 形成费米子 Tonks-Girardeau (fTG) 气体. 进一步考虑 $\gamma_2 \ll 1$ 的情况, 此时有效力程不可忽略. 在 γ_1 不太大时, 即 γ_1 和 γ_2 满足

$$\text{Max} \left(\gamma_2, \frac{\gamma_1 \gamma_2}{4\pi^2} \right) \lesssim 1. \quad (3)$$

此时系统处于强关联区域, 系统能量趋于 0, 这种阶段称为超 fTG, 即图中深蓝色区域.

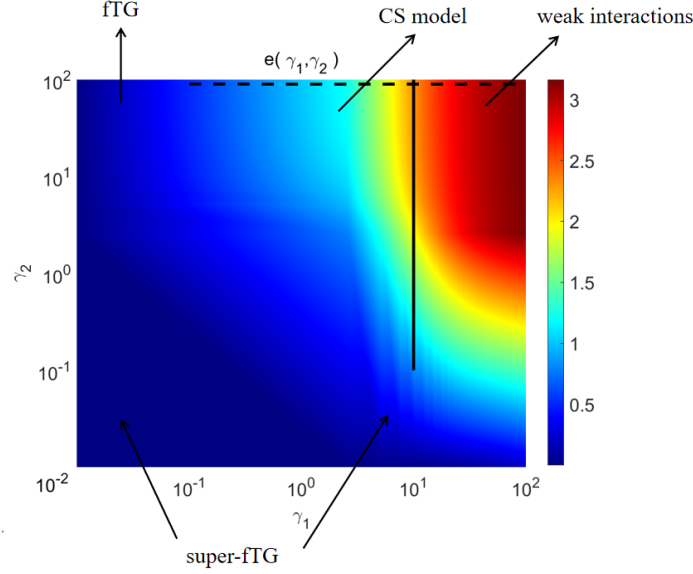


图 1 相互作用参数空间中的能量密度图. 箭头指示弱相互作用费米子、CS 模型、fTG 气体以及超 fTG 区域. 图中的黑色虚线表示 $\gamma_2 \rightarrow \infty, \gamma_1 = 10^{-1} - 10^2$ 区域, 黑色实线表示 $\gamma_1 = 10, \gamma_2 = 10^{-1} - 10^2$ 区域, 分别对应下文中图 2 和图 3 的区域.

Fig. 1. Energy density plot in the interaction parameter space. Arrows indicate the regions of weakly interacting fermions, CS model, fTG gas, and super-fTG region. The black dashed line represents the region $\gamma_2 \rightarrow \infty, \gamma_1 = 10^{-1} - 10^2$, and the black solid line represents the region $\gamma_1 = 10, \gamma_2 = 10^{-1} - 10^2$, corresponding to the areas of Fig. 2 and Fig. 3 below, respectively.

2.1 Bethe ansatz

由散射振幅 (1) 式得出波函数 $\psi(\vec{x})$ 满足粒子间的相互作用边界条件为

$$\lim_{x \equiv x_j - x_i \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{l_p} + \partial_x - \xi_p \partial_x^2 \right) \psi(\vec{x}) = 0, \quad (4)$$

其中 $\vec{x} = x_1, \dots, x_N$ 表示 N 个费米子的坐标. 该边界条件联合周期性边界条件和费米子的交换反对称性条件, 在 Bethe 假设下可以得到准动量 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 满足的 BA 方程^[42,43] 为

$$\exp(i\lambda_i L) = \prod_{j=1}^N S(\lambda_i - \lambda_j), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

其中 i 为虚单位, 散射矩阵为 $S(x) = (\xi_p x^2 + 1/l_p + ix)/(\xi_p x^2 + 1/l_p - ix)$. 能量本征值为 $E_{\text{total}} = \hbar^2/(2m) \sum_{i=1}^N \lambda_i^2$. 在本文中只研究吸引相互作用 (即 $l_p < 0, \xi_p \geq 0$).

在热力学极限下 ($N \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty, N/L$ 为有限值), 有限温度会导致粒子从低能态激发到更高能态,

从而在低能区域留下空穴. 此时系统的准动量可由连续分布函数描述, BA 方程 (5) 式变为积分形式, 即

$$2\pi [\rho(\lambda) + \rho_h(\lambda)] = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - k) \rho(k) dk, \quad (6)$$

其中 $\rho(\lambda)$ 和 $\rho_h(\lambda)$ 分别表示粒子的准动量分布函数和空穴分布函数, 积分核为

$$K(\lambda) = \frac{2|l_p|(1 + |l_p|\xi_p\lambda^2)}{(1 - |l_p|\xi_p\lambda^2)^2 + l_p^2\lambda^2}. \quad (7)$$

物理可观测量的期望值可以由准动量分布函数完全确定. 例如, 粒子数密度 η 、能量密度 e 和熵 S 的表达式分别为

$$\eta = \frac{N}{L} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda) d\lambda, \quad (8)$$

$$e = \frac{E_{\text{total}}}{L} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \rho(\lambda) d\lambda, \quad (9)$$

$$S = L \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda [(\rho + \rho_h) \ln(\rho + \rho_h) - \rho \ln \rho - \rho_h \ln \rho_h]. \quad (10)$$

另外我们定义巨正则系综下的有效能量密度为 $\tilde{e} = e - \mu\eta$, 其中 μ 为化学势.

热力学平衡态要求在粒子数和能量守恒条件下系统的熵最大, 即 $\delta G = \delta(E_{\text{total}} - TS - \mu N) = 0$, 其中 G 为吉布斯自由能, T 为系统温度. 利用该变分条件可以得到一组耦合的非线性积分方程, 即平衡态的 TBA 方程:

$$\epsilon(\lambda) = \frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 - \mu - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - k) [\ln(\exp[-\epsilon(k)/T] + 1)] dk \quad (11)$$

其中赝势能为 $\epsilon(\lambda) = T \ln(\rho_h(\lambda)/\rho(\lambda))$, 表示的是从费米能级 $\epsilon(\lambda_F) = 0$ 开始计算的单粒子激发能, 其中 λ_F 为准费米动量. 此时压强 P 用赝势能的形式给出, 即

$$P = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \ln [1 + \exp(-\epsilon(\lambda)/T)]. \quad (12)$$

在平衡态物理量的数值求解过程中, 给定温度、化学势、一维散射长度和一维有效力程后, 首先通过对 (11) 式进行数值迭代得出平衡态的赝势能, 随后代入下式计算出准粒子占据数

$$n(\lambda) = \frac{\rho(\lambda)}{\rho(\lambda) + \rho_h(\lambda)} = \frac{1}{1 + \exp[\epsilon(\lambda)/T]}. \quad (13)$$

进一步根据 (6) 式得到准动量分布函数 $\rho(\lambda)$, 最后计算出各种物理学量, 例如粒子数密度、能量密度和熵等.

2.2 广义流体动力学

对于可积系统, 其非平衡动力学行为可借助广义流体动力学来描述. 该理论将系统视为由一系列处于局域准平衡态的流体元所构成^[23], 每个流体元存在无穷多的守恒量, 因此准粒子占据数的含时演化所满足 GHD 方程:

$$\partial_t n(\lambda) + v^{\text{eff}} \partial_x n(\lambda) + m a^{\text{eff}} \partial_\lambda n(\lambda) = 0, \quad (14)$$

其中 $v^{\text{eff}}(\lambda) = (E')^{\text{dr}}(\lambda) / (p')^{\text{dr}}(\lambda)$ 为准粒子的有效速度, 而 $a^{\text{eff}} = -\partial_x V(x)/m$ 为准粒子的有效加速度 ($V(x)$ 是外势场). 关于有效速度表达式中 $E(\lambda) = \hbar^2 \lambda^2 / (2m)$ 是单粒子的裸能量, $p(\lambda) = \hbar \lambda$ 是单粒子的裸动量, ' 表示对 λ 的导数, $(E')^{\text{dr}}(\lambda)$ 和 $(p')^{\text{dr}}(\lambda)$ 分别为能量与动量导数的缀饰形式. 对于一维 p 波费米气体模型, 粒子间相互作用导致的缀饰操作 “dr” 定义为

$$h_i^{\text{dr}}(\lambda) = h(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} K(\lambda - k) n(k) h_i^{\text{dr}}(k), \quad (15)$$

其中 $h_i(\lambda)$ 为单粒子本征值, 即 $h_0(\lambda) = 1, h_1(\lambda) = p, h_2(\lambda) = E$, 分别对应粒子数、动量与能量. 此外, 准动量分布函数 $\rho(\lambda)$ 和 $n(\lambda)$ 可以通过动量导数的缀饰相联系, 具体表达式为 $2\pi\rho(\lambda) = n(\lambda) (p')^{\text{dr}}(\lambda)$, 所以 (6) 式也可写为

$$\rho(\lambda) = \frac{n(\lambda)}{2\pi} \left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - k) \rho(k) dk \right]. \quad (16)$$

3 输运性质

在凝聚态物理中, 材料的输运性质通常由电导率来表征. 根据线性响应理论, 电导率的实部可以分解为两个部分^[44,45], 即

$$\text{Re}\sigma_{ab}(\omega) = 2\pi D_{ab} \delta(\omega) + \sigma_{ab}^{\text{reg}}(\omega), \quad (17)$$

其中 σ_{ab} 是电导率, 衡量了当系统受到一个与算符 a 耦合的外场扰动时, 算符 b 对应电流的线性响应. 上式中第一项代表零频率下的无耗散弹道输运, 其中 D_{ab} 被称为 Drude weight, 它是凝聚态物理的基本输运系数^[46]; 第二项 $\sigma_{ab}^{\text{reg}}(\omega)$ 则对应于耗散过程, 表示正则频率相关部分. 在可积系统中, DW 可以表示为一个对称矩阵, 即

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{nn} & D_{n\bar{e}} \\ D_{\bar{e}n} & D_{\bar{e}\bar{e}} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

其中 D_{nn} 是粒子-粒子耦合的 DW, 描述粒子流对化学势梯度的响应; $D_{n\tilde{e}} = D_{\tilde{e}n}$ 是粒子-能量耦合的 DW, 分别描述能量流对化学势梯度的响应和粒子流对温度梯度的响应; $D_{\tilde{e}\tilde{e}}$ 是能量-能量耦合的 DW, 描述能量流对温度梯度的响应.

通常 DW 可通过 Kubo 公式^[29] 表示为电流-电流关联函数的时间和空间积分, 即

$$D_{ab} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle \hat{J}_a(x, t') \hat{J}_b(0, 0) \rangle^c = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle \hat{J}_a(x, t) \hat{J}_b(0, 0) \rangle^c, \quad (19)$$

其中 $\langle \bullet \rangle$ 表示在热平衡状态下的统计平均值, $\hat{J}(x, t)$ 为电流算符, 上标 c 表示连通关联函数, 即 $\langle \hat{A}\hat{B} \rangle^c = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle$. 在可积系统的 GHD 框架下, DW 描述了系统在热平衡下由准粒子运动所导致的输运行为, 可以写成准动量空间的积分表达式^[47,48]

$$D_{ij} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) [v^{\text{eff}}(\lambda)]^2 (1 - n(\lambda)) h_i^{\text{dr}}(\lambda) h_j^{\text{dr}}(\lambda), \quad (20)$$

其中 $i, j \in \{n, e, \tilde{e}\}$, 分别对应 $h^{\text{dr}} = \{1^{\text{dr}}, E^{\text{dr}}, (E - \mu)^{\text{dr}}\}$. 本文中只讨论 D_{nn} , D_{ne} , $D_{n\tilde{e}}$, $D_{\tilde{e}e}$, $D_{\tilde{e}\tilde{e}}$, 其中具体考察了 D_{nn} , D_{ne} 和 $D_{n\tilde{e}}$ 三个分量, 发现均可用宏观热力学量简洁表示 (详细推导过程由附录 A 解释) 为

$$D_{nn} = \frac{\eta}{m}, \quad D_{ne} = \frac{e + P}{m}, \quad D_{n\tilde{e}} = \frac{TS}{mL}. \quad (21)$$

上式所给出的输运系数与热力学量之间的普适关系在满足伽利略不变性的可积系统中均成立, 与具体散射通道无关. 相比于格点模型, 连续空间的可积模型因具有连续空间平移不变性和动量守恒, 满足伽利略不变性. 此外, 该关系式在一维相互作用的玻色气体也得到独立验证, 详见文献^[28], 所以上述恒等式与粒子统计 (费米/玻色) 无关. 从物理角度看, 这意味着系统的动力学行为坍缩为热力学行为——输运系数 $D_{nn} = \eta/m$ 不受相互作用影响, 而 $D_{n\tilde{e}} = TS/(mL)$ 则变为纯对流形式, 是一种无耗散的输运机制.

将上述结果与经典理想流体力学进行对比: 在经典理想流体力学中, 质量流密度 $j_m = \rho_m v$ 由质量密度 $\rho_m = m\eta$ 和流体速度 v 决定, 对应的粒子流密度为 $j_n = j_m/m = \eta v$. 描述粒子流对化学势梯度响应的输运系数 $D_{nn} = \eta/m$ 对应于经典理论中的粒子流密度系数. 另一方面, 在经典理想流体力学中, 能量流密度为 $j_e = \rho_m v (v^2/2 + h)$, 其中 $h = (e + P)/\rho_m$ 是单位质量的焓. 在平衡态附近, 系统整体速度 v 趋近于零, 宏观动能项 $v^2/2$ 可忽略, 此时能量流简化为 $j_e \approx (e + P)v$. 描述能量流对化学势梯度响应的输运系数 $D_{ne} = (e + P)/m$ 与经典的能量流表达式形式一致. 这些对应关系深刻地揭示了其与经典理想流体力学中无耗散对流机制的内在一致性.

3.1 低温下的理想费米气体

对于一维理想费米气体, 忽略相互作用, 为了简便表示, 下文中均令 $\hbar = 2m = 1$, 对应的赝势能为 $\epsilon(\lambda) = \lambda^2 - \mu$, 有效速度是单粒子速度 $v = 2\lambda$, 准动量分布 $\rho(\lambda) = n(\lambda) / (2\pi)$, 此时 DW 表达式为

$$D_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) v^2(\lambda) (1 - n(\lambda)) h_i(\lambda) h_j(\lambda). \quad (22)$$

低温下, 通过求出理想费米气体的粒子数 N 和能量 E_{total} , 用 Sommerfeld 展开得到化学势和压强为

$$\mu = E_F \left(1 + \frac{\pi^2 T^2}{12 E_F^2} + \frac{\pi^4 T^4}{36 E_F^4} \right), P = \frac{2}{3} \eta E_F \left(1 + \frac{\pi^2 T^2}{4 E_F^2} + \frac{\pi^4 T^4}{20 E_F^4} \right), \quad (23)$$

其中 $E_F = T_F = \pi^2 \eta^2$ 分别是费米能量和温度. 利用 $S = (E_{\text{total}} - \mu N + PL) / T$, 得出熵的表达式为

$$S = \frac{1}{T} N E_F \left(\frac{\pi^2 T^2}{6 E_F^2} + \frac{\pi^4 T^4}{45 E_F^4} \right). \quad (24)$$

同理求出一维理想费米气体的 DW, 即

$$D_{nn} = 2\eta, \quad (25)$$

$$D_{n\bar{e}} = 2\eta E_F \left(\frac{\pi^2 T^2}{6 E_F^2} + \frac{\pi^4 T^4}{45 E_F^4} \right), \quad (26)$$

$$D_{\bar{e}\bar{e}} = 2\eta E_F^2 \left(\frac{\pi^2 T^2}{3 E_F^2} - \frac{2\pi^4 T^4}{45 E_F^4} \right). \quad (27)$$

由 (25)-(27) 式可以看出在一维理想费米气体中, 表征粒子-粒子耦合的 D_{nn} 不随温度变化, 而表征粒子-能量耦合的 $D_{n\bar{e}}$ 和能量-能量耦合的 $D_{\bar{e}\bar{e}}$ 则均由热激发主导, 其主导项均随温度升高而增强. 通过比较 (24) 式和 (26) 式, 同时也验证了 (21) 式中 $D_{n\bar{e}}$ 表达式的成立.

3.2 低温下弱相互作用的输运性质

DW 的积分表达式 (20) 式可用分部积分化简为

$$D_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda n(\lambda) \frac{d}{d\lambda} [v^{\text{eff}}(\lambda) h_i^{\text{dr}}(\lambda) h_j^{\text{dr}}(\lambda)], \quad (28)$$

在低温下, 上式中的积分可以用 Sommerfeld 展开得

$$D_{ij} = \frac{1}{\pi} \left[G(0) + G^{(2)}(0) \frac{\pi^2}{6\beta^2} + G^{(4)}(0) \frac{7\pi^4}{360\beta^4} + \dots \right] \quad (29)$$

其中 $\beta = 1/T$ 为逆温度, $G(\epsilon) = v^{\text{eff}}(\lambda) h_i^{\text{dr}}(\lambda) h_j^{\text{dr}}(\lambda)$, 其物理量均可以通过色散关系 $\epsilon = \epsilon(\lambda)$ 视为 ϵ 的函数, 对应的 $G^{(i)}(\epsilon) = \frac{\partial^i}{\partial \epsilon^i} [v^{\text{eff}}(\lambda) h_i^{\text{dr}}(\lambda) h_j^{\text{dr}}(\lambda)]$.

现在考虑低温弱相互作用的情况, 即 $|l_p| \ll 1/\eta$, 对应的积分核化简为 $K(\lambda) \approx 2|l_p| + 6l_p^2\xi_p\lambda^2$, 此时赝势能可以写为 $\epsilon(\lambda) = C\lambda^2 - A$, 其中 $C = 1 + 2l_p^2\xi_p\pi^2\eta^3 - 6l_p^2\xi_p\mu\eta$, $A = \mu + 2|l_p|P - 6l_p^2\xi_p\eta^5\pi^4/5 + 2l_p^2\xi_p\eta^3\mu\pi^2$. 首先计算压强, 利用 (12) 式进行分部积分和 Sommerfeld 展开^[49] 得出压强的低温展开式为

$$P = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi^2 C}} A^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{\pi^2 T^2}{8 A^2} + \frac{7\pi^4 T^4}{640 A^4} + \dots \right], \quad (30)$$

接下来使用关系式 $\partial P/\partial\mu = \eta$ 得出化学势和压强的低温修正为

$$\mu = \mu_0 + \frac{T^2}{12\eta^2} \left[1 - \frac{4}{\gamma_1^2} - \frac{8\pi^2}{\gamma_1^2\gamma_2} \right], P = P_0 + \frac{T^2}{6\eta} \left(1 + \frac{2}{\gamma_1} \right), \quad (31)$$

其中 μ_0 表示零温时的化学势, 具体表达式为 $\mu_0 = \eta^2\pi^2 [1 - 16/(3\gamma_1) + 20/\gamma_1^2 - 64\pi^2/(5\gamma_1^2\gamma_2)]$, 零温时压强为 $P_0 = (2/3)\pi^2\eta^3 [1 - 6/\gamma_1 + 24/\gamma_1^2 - 16\pi^2/(\gamma_1^2\gamma_2)]$. 熵由 (30) 式推导可得

$$S = L \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right) \Big|_{\mu} = \frac{TL}{6\eta} \left(1 + \frac{2}{\gamma_1} + \frac{8\pi^2}{\gamma_1^2\gamma_2} \right), \quad (32)$$

进而根据 (21) 式计算出

$$D_{n\bar{e}} = \frac{T^2}{3\eta} \left(1 + \frac{2}{\gamma_1} + \frac{8\pi^2}{\gamma_1^2\gamma_2} \right). \quad (33)$$

我们从表达式可以看出来, 在 $\gamma_1 \rightarrow \infty$ (即 $|l_p| \rightarrow 0$) 时, 系统处于无相互作用极限, 此时一维 p 波费米气体退化为理想费米气体, 对应表达式中的零阶项. 在此极限下, 系统的化学势和压强、熵以及 DW 均趋近于理想费米气体的相应值. 其中 (33) 式中的一阶项 $1/\gamma_1$ 与散射长度 $|l_p|$ 成正比, 体现了弱吸引相互作用对输运的线性增强效应. 结合 (32) 式和 (33) 式表明熵随着 γ_1 的增大而减小, $D_{n\bar{e}}$ 呈现相同的减小趋势 (参见图 2(b) * 号所示的数据点). 而二阶项 $1/(\gamma_1^2\gamma_2)$ 则反映了有效力程与散射长度的耦合贡献, 在二阶微扰层面进一步提升了系统的弹道输运能力. 同样随二阶项中 γ_2 的增大熵也在减小, $D_{n\bar{e}}$ 也表现出下降趋势, 展现出 p 波散射通道对低能输运的独特调控特性.

3.3 有限温度下输运系数随相互作用强度的演化

图 2 展示了在固定粒子数密度的情况下, 不同 DW 随粒子间相互作用强度和温度的变化趋势 (其无量纲相互作用强度的数值参数对应于图 1 的黑色虚线). 总体上看, 所有 DW 均随温度升高而整体增大, 其中 D_{ne} 和 $D_{\bar{e}e}$ 随 γ_1 的增大不断增大. 这些趋势可通过系统中粒子的结合与解离加以理解. 在强相互作用区 (γ_1 较小), 系统的强 p 波吸引导致粒子形成紧密的凝聚体, 类似无相互作用的玻色气体, 这些凝聚体作为主要载流子主导输运. 随着吸引相互作用减弱 (γ_1 增大) 和温度升高, 凝聚体逐渐解离, 系统向理想费米气体

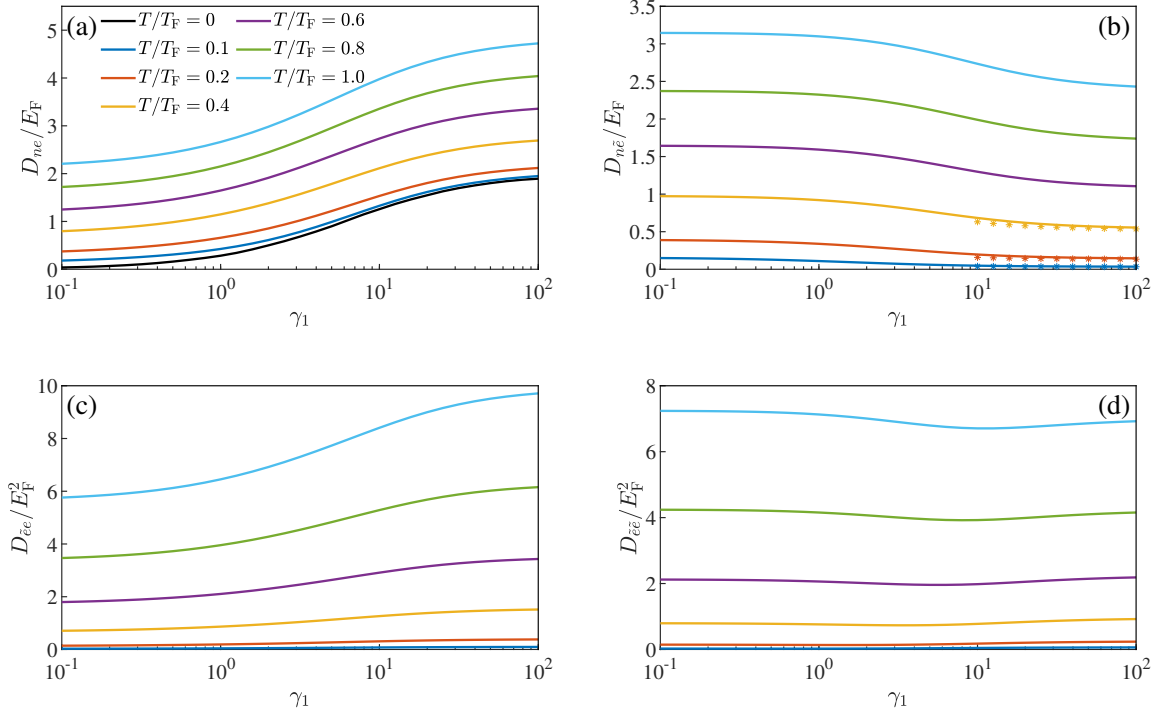


图 2 输运系数 D_{ne} (a), $D_{n\bar{e}}$ (b), $D_{\bar{e}e}$ (c) 和 $D_{\bar{e}\bar{e}}$ (d) 在固定粒子数密度下随无量纲相互作用强度 γ_1 和温度的变化. 实线表示 GHD 框架下 (20) 式的结果, 图中 * 号表示低温弱相互作用下 (33) 式的计算结果. 粒子数密度为 $\eta = 1$, 有效力程为 $\xi_p = 0$, 约化温度分别取值为 $T/T_F = 0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

Fig. 2. The transport coefficients D_{ne} (a), $D_{n\bar{e}}$ (b), $D_{\bar{e}e}$ (c), and $D_{\bar{e}\bar{e}}$ (d) as functions of the dimensionless interaction strength γ_1 and temperature at a fixed particle number density. The solid lines represent the results from Eq. (20) in the GHD framework. The asterisk in the figure indicates the calculation results of Eq. (33) under low-temperature weak interaction. The particle number density is $\eta = 1$, the effective range is $\xi_p = 0$, and the reduced temperature takes values of $T/T_F = 0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

过渡. 在此过程中, 在粒子数密度固定的情况下, 化学势 μ 、能量密度 e 和压强 P 都增大, 从而能量输运能力增强, 导致 D_{ne} 和 $D_{\bar{e}e}$ 的增大.

图 2 中 $D_{n\bar{e}}$ 随 γ_1 不断减小, $D_{\bar{e}\bar{e}}$ 呈现先减后增的趋势. 对于图 2(b) 的 $D_{n\bar{e}}$ 减小是因为随相互作用减小 (γ_1 增大), 凝聚体逐渐解离, 准动量分布函数 $\rho(\lambda)$ 分布更加均匀, 这意味着微观状态数变少, 所以熵 S 随 γ_1 增大而显著降低, 从而导致 $D_{n\bar{e}}$ 也不断减小. 对于图 2(d) 中的 $D_{\bar{e}\bar{e}}$ 的非单调行为反映了系统输运从凝聚体主导逐步过渡到简并费米气体主导. 强相互作用下, 凝聚体主导初始的能量弹道输运, 随着凝聚体的解体, 其对应的能量输运通道部分关闭, 引起 $D_{\bar{e}\bar{e}}$ 的下降. 进入弱相互作用区域后, 升高的化学势 μ 使得粒

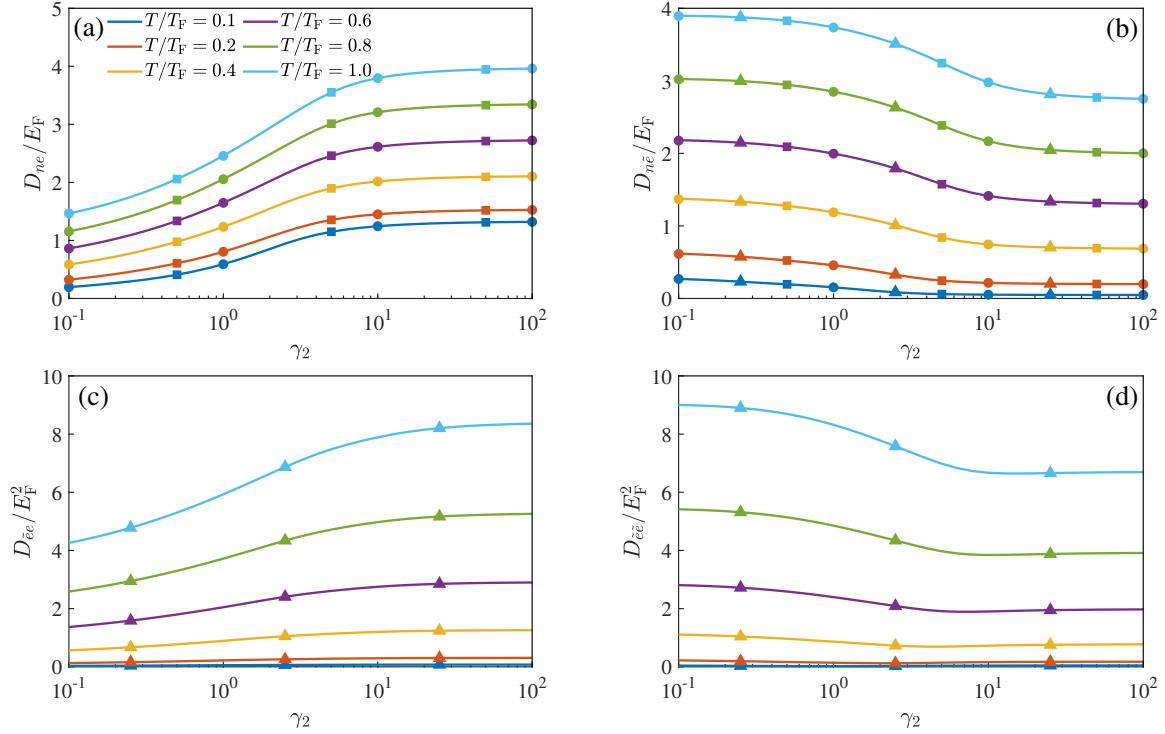


图 3 输运系数 D_{ne} (a), $D_{n\bar{e}}$ (b), $D_{\bar{e}e}$ (c) 和 $D_{\bar{e}\bar{e}}$ (d) 在固定粒子数密度下随无量纲相互作用强度 γ_2 和温度的变化. 实线表示 GHD 框架下 (20) 式的结果, 图 (a) 和 (b) 上的正方形表示倾斜势下 (34) 式的结果, 对应势场的梯度强度为 $\phi = 10^{-5}$; 圆点表示局域化学势差下 (41) 式的结果, 对应化学势差为 $\delta\mu = 0.001$. 图 (b)-(d) 上的三角形表示局域温度差下 (42) 式的结果, 对应温度差为 $\delta T = 0.01$. 粒子数密度为 $\eta = 1$, 散射长度为 $l_p = -0.1$, 约化温度分别取值为 $T/T_F = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

Fig. 3. Transport coefficients D_{ne} (a), $D_{n\bar{e}}$ (b), $D_{\bar{e}e}$ (c), and $D_{\bar{e}\bar{e}}$ (d) as functions of the dimensionless interaction strength γ_2 and temperature at a fixed particle number density. Solid lines represent the results from the Generalized Hydrodynamics (GHD) framework using Eq. (20). The squares in panels (a) and (b) show the results under a tilted potential from Eq. (34), with a potential gradient strength $\phi = 10^{-5}$. The circles in the same panels indicate the results from a local chemical potential difference using Eq. (41), with a chemical potential difference $\delta\mu = 0.001$. The triangles in panels (b)-(d) display the results from a local temperature difference based on Eq. (42), with a temperature difference $\delta T = 0.01$. The particle number density is $\eta = 1$, the scattering length is $l_p = -0.1$, and the reduced temperatures are $T/T_F = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, respectively.

子具有更高的费米动量和动能, 从而实现了更高效的能量弹道输运, 最终导致 $D_{\tilde{e}\tilde{e}}$ 呈现先减后增的趋势.

图 3 展示了系统输运系数在不同温度下随 γ_2 的变化趋势 (其无量纲相互作用强度的数值参数对应于图 1 的黑色实线). 所有 DW 均随温度升高而整体增大, 同时, 随着 γ_2 的增大, D_{ne} 和 $D_{\tilde{e}\tilde{e}}$ 不断增大, $D_{n\tilde{e}}$ 则不断减小, $D_{\tilde{e}\tilde{e}}$ 呈现先减后增的趋势, 这与随 γ_1 的变化趋势是相同的. 其原因在于随着无量纲化系数 γ_1 或 γ_2 的减小, 即对应 $|l_p|$ 或 ξ_p 增大, 根据散射振幅表达式 (1) 式, 散射振幅幅度都会上升, 系统的有效关联强度也都会增强, 同时系统的能量会降低 (见图 1 中的黑色实线和虚线), 因此输运系数随 γ_1 或 γ_2 会表现出相同的趋势.

4 非平衡态的渐进输运

在传统凝聚态物理中, 输运性质主要基于平衡态线性响应理论进行研究, 其中 Kubo 公式是该理论框架的核心工具. 然而, 对于可积系统而言, 由于存在无穷多守恒量, 系统在受到扰动后无法弛豫到传统的热平衡态, 而是会演化为由广义吉布斯系综所描述的稳态, 该系综常用于刻画此类系统在平衡情形下的局域观测量. 这一本质区别使得基于平衡态响应的传统方法在描述可积系统的非平衡输运时面临根本性局限. 为此, 研究者逐渐发展出直接处理非平衡态的理论与数值方法. 这些方法从 GHD 方程或非平衡稳态定义出发, 研究系统在驱动下的实时演化. 在本节中, 我们将针对三种典型的非平衡场景 (倾斜势、局域化学势差与局域温度差) 系统地研究其输运行为.

4.1 倾斜势

倾斜势是通过施加恒定的外场驱动实现的线性势, 可以使系统在广义流体动力学框架下从初始平衡态演化到非平衡稳态. 根据 TBA 方程 (11) 式和 (13) 式可以计算出系统初态的赝势能和粒子占据数. 在 $t = 0$ 时刻引入一个恒定梯度势 $V(x) = -\phi x$, ϕ 为势场的梯度强度, 对应有效加速度为 $a^{\text{eff}} = 2\phi$, 之后系统按 GHD 方程 (14) 式演化.

在此设置下研究体系的 DW, 它表征了无耗散电流, 其可以被定义为在对小且恒定的外场响应时局部电流的时间渐近增长率, 即

$$D_{nb} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j_b(x, t)}{t\phi}. \quad (34)$$

其中 $b \in \{n, e, \tilde{e}\}$, 对应的 j_b 分别表示粒子流、能量流和有效能量流, 具体表达式为

$$j_n = \int_{-\infty}^{\infty} v^{\text{eff}}(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \quad (35)$$

$$j_e = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 v^{\text{eff}}(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \quad (36)$$

$$j_{\bar{e}} = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^2 - \mu) v^{\text{eff}}(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda = j_e - \mu j_n. \quad (37)$$

其中有效速度 v^{eff} 与动量分布函数 $\rho(\lambda)$ 均依赖于占据数 $n(\lambda)$.

由于初态在坐标空间各个位置的占据数相同, 且系统满足的偏微分方程 (14) 式保持空间平移不变性, 因此 $\partial n(\lambda)/\partial x = 0$, 此时偏微分方程变为

$$\partial_t n(\lambda) + \frac{1}{2} a^{\text{eff}} \partial_\lambda n(\lambda) = 0. \quad (38)$$

为求解占据数随时间的演化, 采用特征线方法求解偏微分方程 (38) 式. 引入参数曲线 $\lambda(t)$, 其满足 $d\lambda/dt = a^{\text{eff}}/2 = \phi$ 得 $\lambda(t_1) = \lambda(t_2) - (t_2 - t_1)\phi$. 沿着这些曲线, 偏微分方程变为常微分方程 $dn(t, \lambda(t))/dt = 0$, 这意味 $n(t_1, \lambda(t_1)) = n(t_2, \lambda(t_2))$. 设 $t_1 = 0, t_2 = t$, 得出倾斜势下占据数的演化表达式为

$$n(t, \lambda) = n(0, \lambda - t\phi). \quad (39)$$

表明了 t 时刻占据数可由 0 时刻准动量平移 $-t\phi$ 后的占据数得到. 之后根据 (16) 式计算出动量分布函数 $\rho(\lambda)$ 和有效速度 v^{eff} , 代入 (35)-(37) 式中计算出粒子流、能量流和有效能量流, 最后通过 (34) 式计算出对应的 DW. 如图 3(a) 和 3(b) 所示, 基于 GHD 理论公式 (20) 与倾斜势下公式 (34) 分别计算得到的 DW 相互印证 (图中分别用实线与正方形表示), 结果吻合一致, 验证了两种方法在描述系统输运性质上结论一致, 更说明可以通过系统的平衡态热力学性质精确预测其在非平衡稳态下的运输能力.

4.2 局域化学势差

研究局域化学势差下的非平衡输运常采用分区协议. 该协议考虑两个初始彼此独立的半无限长系统: 左侧 ($x < 0$) 处于化学势 $\mu_L = \mu + \delta\mu/2$ 的平衡态, 右侧 ($x > 0$) 处于化学势 $\mu_R = \mu - \delta\mu/2$ 的平衡态. 在 $t = 0$ 时刻将两者连接 (如图 4 所示), 随后系统在化学势差的驱动下按 GHD 方程 (14) 式演化, 其中有效加速度为 $a^{\text{eff}} = 0$ (无外势). 在长时间演化下, 系统会在初始接触点 $x = 0$ 附近形成稳态, 产生一个从接触点向外扩散的光锥区域. 光锥内的动力学行为由一系列射线 $\xi = x/t$ 所刻画, 即沿每条射线系统都趋近于一个由 ξ 值所标识的局域准稳态, 其中 ξ 是描述长时间稳态行为的无量纲变量. 因此, 系统的动力学可以通过分析局部可观测量随 ξ 的时空分布来研究.

在此框架下, DW 可以用零偏置极限 ($\delta\mu \rightarrow 0$) 下总电流增长的时间渐近速率表示, 即

$$D_{nb} = \lim_{\delta\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \delta\mu} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle \hat{J}_b(x, t) \rangle_{\delta\mu}. \quad (40)$$

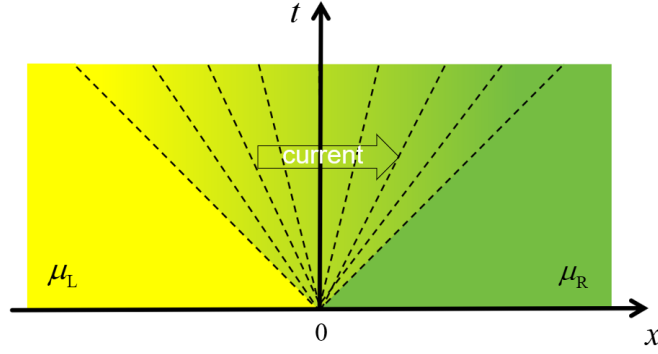


图 4 分区协议示意图. 将化学势为 μ_L 和 μ_R 的两个子系统连接后, 在连接处出现了一个光锥区域, 每条虚线 $\xi = x/t$ 处的物理量相同.

Fig. 4. Schematic diagram of the partitioning protocol. After connecting two subsystems with chemical potentials μ_L and μ_R , a light-cone region emerges at the junction, where the physical quantity remains constant along each dashed line defined by $\xi = x/t$.

因为电荷和电流仅依赖于 $\xi = x/t$, 上式化简为^[44,50]

$$D_{nb} = \lim_{\delta\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \delta\mu} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi j_b(\xi)_{\delta\mu}, \quad (41)$$

其中 $j(\xi)$ 表示从接触点沿 ξ 的局域稳态电流密度期望值, 对应的粒子流和能量流的定义与 (35) 式、(36) 式和 (37) 式一致. 根据 (14) 式可得出占据数的表达式为 $n(\lambda, \xi) = n_L(\lambda) \Theta(\lambda - \lambda^*) + n_R(\lambda) \Theta(\lambda^* - \lambda)$, 其中 $n_L(\lambda)$ 和 $n_R(\lambda)$ 为系统左右两边初始平衡态占据数, Θ 为阶跃函数, λ^* 是 $v^{\text{eff}}(\lambda) = \xi$ 的解.

进一步地, 在图 3(a)和 3(b)中针对 GHD 解析理论计算出的 DW(实线) 与局域化学势差下的计算出的 DW(圆点) 进行了对比, 其结果依旧是高度吻合, 也可以证明了两种方法在研究系统输运性质的一致性.

4.3 局域温度差

与局域化学势差的情形类似, 考虑局域温度差下的非平衡演化过程. 系统左侧 ($x < 0$) 是温度为 $T_L = T + \delta T/2$ 的热力学平衡态, 右侧 ($x > 0$) 是温度为 $T_R = T - \delta T/2$ 的热力学平衡态, 在 $t = 0$ 时刻让两个子系统接触, 示意图与图 4 相似. 该方法通过温度梯度来诱导非平衡动力学, DW 可以用极限 $\delta T \rightarrow 0$ 下总电流增长的时间渐近速率表示

$$D_{eb} = T \lim_{\delta T \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \delta T} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi j_b(\xi)_{\delta T} \quad (42)$$

对应的粒子流和能量流的定义如 (35)-(37) 式.

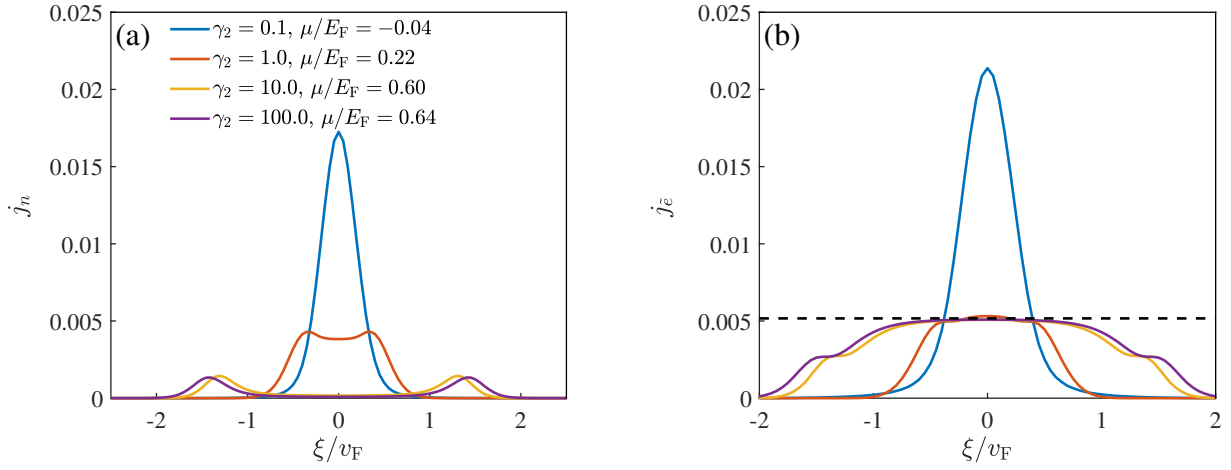


图 5 粒子流 (a) 和有效能量流 (b) 在不同 γ_2 下随 ξ/v_F 的变化. 虚线表示 CFT 值, $v_F = 2\pi\eta$ 是费米速度. 粒子数密度为 $\eta = 1$, 约化温度为 $T/T_F = 0.1$, 温度差为 $\delta T = 0.01$, 无量纲化参数 $\gamma_1 = 10$, γ_2 分别取 0.1, 1, 10, 100.

Fig. 5. The variation of (a) particle current and (b) effective energy current with ξ/v_F at different γ_2 . The dashed lines represent the CFT values, where $v_F = 2\pi\eta$ is the Fermi velocity. The particle number density is $\eta = 1$, the reduced temperature is $T/T_F = 0.1$, the temperature difference is $\delta T = 0.01$, and the dimensionless parameter $\gamma_1 = 10$, γ_2 takes values of 0.1, 1, 10, and 100, respectively.

图 5 展示了在相同粒子数密度下粒子流和有效能量流在不同 γ_2 下随 ξ/v_F 的分布规律. 两者均以 $\xi/v_F = 0$ 为中心区域对称分布, 图 5(a) 中当 γ_2 较小时粒子流在 $\xi = 0$ 处呈现出一个尖锐峰, 两侧快速向零衰减, 随着 γ_2 增大, 中心区域逐渐凹陷, 在两侧 $\xi = \pm v_s$ (其中 $v_s = [E'(\lambda_F)]^{\text{dr}} / [p'(\lambda_F)]^{\text{dr}}|_{T=0}$ 是声速) 处出现双峰结构, 此时整体峰值降低、分布区间变宽. 考虑强相互作用 (γ_2 很小) 的情况, 系统处于强关联状态, 类似没有相互作用的玻色子, 准动量聚集在 $\lambda = 0$ 附近, 粒子流和能量流高度集中在 $\xi = 0$ 的位置, 形成尖锐单峰 (如图 5 中蓝色曲线所示). 而当相互作用较弱 (γ_2 较大) 时, 系统接近理想费米气体. 粒子流双峰的出现源自费米面附近粒子的贡献. 例如造成右侧峰值的原因是, 高温 T_L 的平衡态在费米面内占据数几乎等于 1, 与低温 T_R 相同, 而在费米面附近比低温存在更多的高动量粒子, 造成向右运动的纯粒子流. 该处粒子的有效速度为声速, 所以右侧峰值也出现在声速处. 类似的, 左侧的峰值来自负费米动量处占据数的差异.

当 γ_2 较小时, 图 5(b) 中能量流的曲线形状同样呈现尖锐单峰, 但是随着 γ_2 增大, 中心主峰峰值减小并且在 $\xi = 0$ 附近形成一个平台, 同时在两侧 $\xi = \pm v_s$ 处出现小平台, 整体分布区间变宽. 根据共形场论

(Conformal Field Theory, CFT) ^[21] 预测, 在 $x = 0$ 附近形成的稳态光锥内, 理想费米气体对应的能量流趋于均匀值 $j_{\bar{e}} = \pi(T_L^2 - T_R^2)/12 = (\pi/6)T\delta T$. 如图所示弱相互作用下的能量流在 $\xi = 0$ 附近形成的平台高度与 CFT 结果 (图中虚线) 一致.

根据 (42) 式可知, 在 $\delta T \rightarrow 0$ 下, 该积分 (即流分布曲线与横轴围成的面积) 近似与对应的输运系数成正比. 在此基础上, 可利用 CFT 结果直接估算对应的输运系数

$$D_{\bar{e}\bar{e}} = T \frac{\partial}{\partial \delta T} (2j_{\bar{e}} v_F) = 2\eta \frac{\pi^2 T^2}{3}. \quad (43)$$

此结果与一维理想费米气体的低温展开式 (27) 式一致, 印证了 DW 的正确性. 从图 5 中也可以明显看出随着 γ_2 的增大, 粒子流所围成的面积减小, 对应 $D_{n\bar{e}}$ 减小. 这是因为相同温度下, 在 γ_2 较小时, 准粒子主要集中在 $\lambda = 0$ 附近, 可以激发很多的粒子参与运输. 而在 γ_2 较大时, 只能在费米面附近激发少量粒子, 因而粒子流的运输能力下降, 即 $D_{n\bar{e}}$ 减小. 而能量流所围成的面积呈现先减小后增大的趋势, 对应 $D_{\bar{e}\bar{e}}$ 先减后增. 其先减小的原因与粒子流相同, 即激发粒子数减少导致运输减弱; 而后增大的原因在于粒子动量的增加. 具体来说, 能量流的表达式中包含了动量的平方项, 对高能准粒子的贡献更为敏感, 随着 γ_2 的增大, 费米动量升高, 高能粒子的权重增强, 又重新提升了能量流的运输能力, 所以 $D_{\bar{e}\bar{e}}$ 的变化趋势为先减后增. 该行为与图 3(b)和图 3(d)中局域温度差下的数值计算结果 (三角形) 展示的变化规律完全一致, 同时也与 GHD 框架下的理论结果 (实线) 表现出极好的一致性.

5 量子临界区的输运性质

除相互作用强度调控的输运行为外, 量子临界区 ^[18] 是理解量子多体系统的核心. 从微观角度看, 量子临界态描述了在绝对零度下发生量子相变 ^[51] 时, 物质的热涨落与量子涨落发生强耦合的独特状态. 在一维费米气体中, 最基本的量子相变是通过化学势驱动, 系统从真空态 ($\mu < 0$, 无粒子) 转变到有限密度费米态 ($\mu > 0$), 临界点为 $\mu_c = 0$. 其最显著的特征是在临界点附近, 系统的热力学性质表现出普适的标度行为.

考虑在有限温度下弱相互作用近似 $|l_p| \ll 1/\eta$ 的输运特性. 基于 GHD 框架利用 (28) 式来计算输运系数, 将结果保留到 l_p 的二阶项, 得出 DW 的表达式如下:

$$D_{nn} = \frac{1}{\pi} G_0 \left(1 + \frac{1}{\pi} |l_p| G_0 + \frac{1}{\pi^2} l_p^2 G_0^2 + \frac{6}{\pi} l_p^2 \xi_p G_2 \right), \quad (44)$$

$$D_{n\bar{e}} = \frac{1}{\pi} (3G_2 - G_0\mu) + \frac{1}{\pi^2} |l_p| (G_0 G_2 - \mu G_0^2) + \frac{1}{\pi^3} l_p^2 G_0 (G_2 G_0 - \mu G_0^2) - \frac{6}{\pi^2} l_p^2 \xi_p \left(\frac{3}{2} G_2^2 + \mu G_0 G_2 - \frac{1}{2} G_0 G_4 \right), \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
D_{\bar{e}\bar{e}} &= \frac{1}{\pi}(5G_4 + G_0\mu^2 - 6\mu G_2) + \frac{1}{\pi^2}|l_p|(-5G_0G_4 + 6G_2^2 - 2G_0\mu G_2 + G_0^2\mu^2) \\
&+ \frac{1}{\pi^3}l_p^2(G_0G_2^2 - 2\mu G_2G_0^2 + \mu^2G_0^3) \\
&+ \frac{3}{\pi^2}l_p^2\xi_p(G_4G_2 - 7G_0G_6 + 6G_2^2\mu + 2\mu^2G_0G_2 - 2G_0\mu G_4). \tag{46}
\end{aligned}$$

在上式中我们定义了

$$G_{2i} = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda n(\lambda)\lambda^{2i} = -C^{-s}T^s \text{Li}_s[-\exp(\frac{A}{T})]\Gamma(s), \tag{47}$$

其中 $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, $s = i + 1/2$, $C = 1 - 6l_p^2\xi_p P$, $A = \mu + 2|l_p|P - 3/(2\sqrt{\pi})l_p^2\xi_p T^{5/2}\text{Li}_{5/2}(-\exp(A/T))$, $\text{Li}_s(z)$ 是 Polylogarithm 函数^[32], $\Gamma(x)$ 是伽马函数. 在临界区附近, 将 (44)-(46) 式中的 Polylog 函数展开到主导阶并忽略有效力程的高阶贡献, 即保留到 $|l_p|$ 的一阶项, 可得到量子临界区 DW 满足的标度方程:

$$D_{nn} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}T^{1/2}\text{Li}_{\frac{1}{2}}(-e^{\Delta\mu/T}) + \frac{1}{\pi}|l_p|T \left[\text{Li}_{\frac{1}{2}}(-e^{\Delta\mu/T}) \right]^2, \tag{48}$$

$$D_{n\bar{e}} = -\frac{3}{2\sqrt{\pi}}T^{3/2}\text{Li}_{\frac{3}{2}}(-e^{\Delta\mu/T}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}T^{1/2}\text{Li}_{\frac{1}{2}}(-e^{\Delta\mu/T})\mu - \frac{1}{\pi}|l_p|\mu T \left[\text{Li}_{\frac{1}{2}}(-e^{\Delta\mu/T}) \right]^2, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
D_{\bar{e}\bar{e}} &= -\frac{15}{4\sqrt{\pi}}T^{5/2}\text{Li}_{\frac{5}{2}}(-e^{\Delta\mu/T}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}T^{1/2}\text{Li}_{\frac{1}{2}}(-e^{\Delta\mu/T})\mu^2 \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}3\mu T^{3/2}\text{Li}_{\frac{3}{2}}(-e^{\Delta\mu/T}) + \frac{1}{\pi^2}|l_p|T \left[\text{Li}_{\frac{1}{2}}(-e^{\Delta\mu/T}) \right]^2 \pi\mu^2. \tag{50}
\end{aligned}$$

其中 $\Delta\mu = \mu - \mu_c$ 表示化学势相对于临界点的距离. 我们发现标度方程 (48)-(50) 式中出现了 $|l_p|T$ 的修正项, 体现了弱吸引散射长度对临界运输的微扰修正, 这要求微扰展开的有效性必须满足小量条件——即当散射长度 $|l_p|$ 较大时, 温度 T 必须足够低. 所以表明 p 波相互作用虽不改变普适类指数, 但会影响运输系数标度性质的温度适用范围.

一般而言, 粒子数密度在临界点 $\mu \approx \mu_c$ 附近可表示为^[52]:

$$\eta(\mu, T) - \eta_r(T, \mu) = T^{\frac{d}{z}+1-\frac{1}{\nu z}}\varphi\left(\frac{\mu - \mu_c}{T^{\frac{1}{\nu z}}}\right), \tag{51}$$

其中 η_r 为粒子数密度的正则部分, d 是系统维度, z 为动力学指数, ν 为关联长度指数, $\varphi(x)$ 为描述临界点附近粒子数密度的普适函数. 由于 D_{nn} 与粒子数密度成正比, 将 D_{nn} 的标度方程与上述粒子数密度的标度形式相结合, 可得 $d/z+1-1/(\nu z) = 1/2$ 和 $1/(\nu z) = 1$, 即动力学指数 $z = 2$, 关联长度指数 $\nu = 1/2$. 因此 DW 的标度行为与无相互作用的费米气体对应的临界指数^[51] 完全一致, 其主导区域也由 $T > |\mu - \mu_c|$ 所界定. 在此基础上, $D_{n\bar{e}}$ 和 $D_{\bar{e}\bar{e}}$ 的主要项在粒子数标度指数 1/2 的基础上, 依次引入能量标度维度 1, 从而分布呈现为 $T^{3/2}$ 和 $T^{5/2}$ 的温度依赖关系, 进一步证实了该量子临界点附近的标度理论自洽性.

如图 6 所示, 对比 GHD 下 (28) 式的数值计算与 Polylog 理论下的标度方程 (48)-(50) 式, 二者吻合良好, 共同展示了不同温度下化学势对运输系数的调控规律. 图 6(a)- 6(c)显示重新标度后的 DW 在相变点 $\mu_c = 0$ 交汇, 直接反映了量子临界点的存在. 根据图像可知 $D_{n\bar{e}}$ (图 6(b)) 随 μ 先增后减, 峰值出现在 $\mu = 0$ 附近. 这一现象的根本原因是在低温下, 当 $\mu \rightarrow -\infty$ 时, 系统的粒子占据数 $n \rightarrow 0$, 系统趋近于真空态; 而当 $\mu \rightarrow +\infty$ 时, 占据数 $n \rightarrow 1$, 单粒子态均被完全占据, 熵趋近于零; 而在 $\mu = 0$ 附近, 系统介于两者之间, 此时粒子-空穴激发最为显著, 微观无序程度 (熵) 达到最大, 因此 $D_{n\bar{e}}$ 出现峰值. 此外, 随着温度降低, 该峰值位置越趋近于 $\mu = 0$ 处.

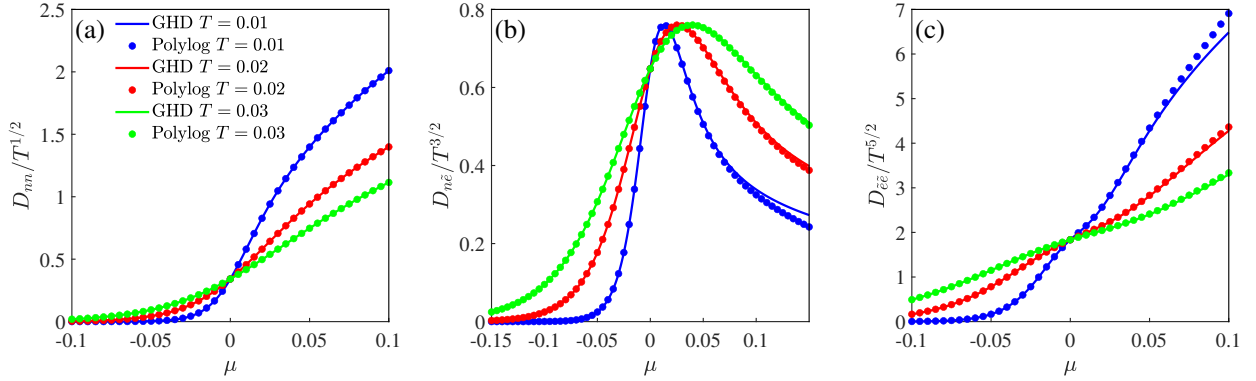


图 6 运输系数 D_{nn} (a), $D_{n\bar{e}}$ (b) 和 $D_{\bar{e}\bar{e}}$ (c) 在量子临界区随化学势 μ 和温度的变化. 实线表示 GHD 框架下 (28) 式的数值计算结果, 圆点表示量子临界区满足的标度方程 (48)-(50) 式计算的结果. 散射长度为 $l_p = -0.01$, 有效力程为 $\xi_p = 0$, 温度分别取 $T = 0.01, 0.02, 0.03$.

Fig. 6. Transport coefficients D_{nn} (a), $D_{n\bar{e}}$ (b), and $D_{\bar{e}\bar{e}}$ (c) in the quantum critical region as functions of chemical potential μ and temperature. The solid lines represent the numerical results from the GHD framework using Equation Eq. (28), and the dots indicate the results calculated from the scaling equations (48)-(50) satisfied in the quantum critical region. The scattering length is $l_p = -0.01$, the effective range is $\xi_p = 0$, and the temperatures are taken as $T = 0.01, 0.02, 0.03$, respectively.

6 结论

本文系统研究了一维 p 波费米气体的运输性质, 基于 Bethe ansatz 和广义流体动力学理论, 分析了该模型在平衡态与非平衡态下的运输系数 Drude weight. 研究发现, 系统的输运行为本质上由其平衡态热力学量 (例如粒子数密度、能量密度和熵等) 描述. 在平衡态方面, 首先分析了低温下弱相互作用极限, 通过

Sommerfeld 展开解析获得了热力学量和 DW 的低温展开式. 同时探究了 DW 随粒子间相互作用强度和温度的变化. 然后, 在非平衡态方面分析了倾斜势、局域化学势差和局域温度差三种协议的演化, 其均由广义流体动力学方程描述. 数值计算获得的稳态下输运系数与其积分表达式的结果完全一致, 进一步支持了理论框架的可靠性. 此外, 通过 Polylogarithm 函数推导出了输运系数的普适标度方程, 发现其在量子相变点附近展现出清晰的标度行为, 其相应温度依赖关系与动力学指数 $z = 2$, 关联长度指数 $\nu = 1/2$ 的普适类相一致, 验证了理论的自洽性. 这项工作全面展示了一维 p 波费米气体弹道输运的热力学本质、非平衡稳态的特征以及量子临界区的标度规律, 不仅深化了对一维可积系统输运行为的理解, 而且所建立的理论框架和计算结果为理解其他一维可积量子多体系统的非平衡输运提供了重要参考.

致谢

感谢中国科学院精密测量科学与技术创新研究院管习文研究员的讨论.

录用稿件, 非最终出版稿

附录 A

本章节详细展示了输运系数 D_{nn} 、 D_{ne} 和 $D_{n\bar{e}}$ 简洁表达式 (即 (21) 式) 的推导过程. 这些输运系数开始由 (20) 式定义, 推导的核心是利用一些热力学量的表达式和缀饰方程运算的性质, 最终将积分表达式化为熟知的基本热力学量.

我们首先计算 D_{nn} , 其定义为

$$D_{nn} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) [v^{\text{eff}}(\lambda)]^2 (1 - n(\lambda)) 1^{\text{dr}}(\lambda) 1^{\text{dr}}(\lambda). \quad (\text{A1})$$

由 (13) 式可得占据数 $n(\lambda)$ 对 λ 的导数

$$\begin{aligned} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{1 + \exp[\epsilon(\lambda)/T]} \\ &= -\frac{1}{T} n(\lambda) [1 - n(\lambda)] \frac{d\epsilon(\lambda)}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

利用有效速度的定义

$$v^{\text{eff}}(\lambda) = \frac{(E')^{\text{dr}}(\lambda)}{(p')^{\text{dr}}(\lambda)} = \frac{\hbar \lambda^{\text{dr}}}{m 1^{\text{dr}}} = \frac{d\epsilon(\lambda)}{d\lambda} \frac{1}{2\pi\hbar\rho^{\text{tot}}(\lambda)}, \quad (\text{A3})$$

其中 $1^{\text{dr}}(\lambda) = 2\pi\rho^{\text{tot}}(\lambda) = 2\pi\rho(\lambda)/n(\lambda)$, 态密度 $\rho^{\text{tot}}(\lambda) = \rho(\lambda) + \rho_{\text{h}}(\lambda) = \rho(\lambda)/n(\lambda)$, 可将导数 $d\epsilon(\lambda)/d\lambda$ 用 $\rho(\lambda)$ 和 v^{eff} 表示, 代入 (A2) 式后得到

$$\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{2\pi\hbar}{T} [1 - n(\lambda)] \rho(\lambda) v^{\text{eff}}(\lambda). \quad (\text{A4})$$

现在将 (A3) 式、(A4) 式和 1^{dr} 的表达式代入 (A1) 式中, 从而将 D_{nn} 重写为

$$\begin{aligned} D_{nn} &= -\frac{1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \lambda^{\text{dr}} 1^{\text{dr}}(\lambda) \\ &= -\frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^{\text{dr}} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \frac{\rho(\lambda)}{n(\lambda)}. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

根据 BA 积分方程 (16) 式, 可以计算出动量分布函数 $\rho(\lambda)$ 对 λ 的导数

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{n(\lambda)}{2\pi} \left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - k) \rho(k) dk \right] \right\} \\ &= \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \frac{\rho(\lambda)}{n(\lambda)} + \frac{n(\lambda)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} K(\lambda - k) \rho(k) dk, \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

其中积分项可以利用分部积分化简, 之后将化简结果代入 (A6) 式可得

$$\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \frac{\rho(\lambda)}{n(\lambda)} = \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} - \frac{n(\lambda)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk K(\lambda - k) \frac{d}{dk} \rho(k). \quad (\text{A7})$$

最后将 (A7) 式代入 (A5) 式中, 并进行变量代换可以得出

$$D_{nn} = -\frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} \left[\lambda^{\text{dr}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk n(k) k^{\text{dr}} K(\lambda - k) \right], \quad (\text{A8})$$

此时出现了缀饰动量 λ^{dr} 所满足的积分方程

$$\lambda^{\text{dr}} = \lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk K(\lambda - k) n(k) k^{\text{dr}}. \quad (\text{A9})$$

利用这一方程和分部积分的方法, (A8) 式变为

$$\begin{aligned} D_{nn} &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) \\ &= \frac{\eta}{m}, \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

其中 $\eta = N/L$ 为粒子数密度.

我们现在计算 D_{ne} , 其定义为

$$D_{ne} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) [v^{\text{eff}}(\lambda)]^2 (1 - n(\lambda)) 1^{\text{dr}}(\lambda) E^{\text{dr}}(\lambda), \quad (\text{A11})$$

其中 $E = (\hbar\lambda)^2 / (2m)$, 采用与推导 D_{nn} 类似的步骤, 利用关系式 (A4) 可将定义式改写为

$$D_{ne} = -\frac{1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \lambda^{\text{dr}} E^{\text{dr}}(\lambda). \quad (\text{A12})$$

我们引入一个辅助函数 $F(\lambda) = n(\lambda) E^{\text{dr}}(\lambda)$ 之后对 $F(\lambda)$ 求导, 得

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} E^{\text{dr}}(\lambda) + \frac{\hbar^2 \lambda}{m} n(\lambda) + \frac{n(\lambda)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - k) \frac{d}{dk} F(k) dk. \quad (\text{A13})$$

将其代入 (A12) 式, 并进行变量代换, 再次利用缀饰动量的积分方程 (A9) 式, 可消去含积分核的部分. 经过分部积分, 得到

$$D_{ne} = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda n(\lambda) E^{\text{dr}}(\lambda) + \frac{1}{2\pi m} \frac{\hbar^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^{\text{dr}} \lambda n(\lambda). \quad (\text{A14})$$

利用缀饰操作的对偶性质, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda g^{\text{dr}}(\lambda) n(\lambda) G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda g(\lambda) n(\lambda) G^{\text{dr}}(\lambda), \quad (\text{A15})$$

可将 (A14) 式中第一个积分项化简为

$$\frac{1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda n(\lambda) E^{\text{dr}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda n(\lambda) E(\lambda) I^{\text{dr}}(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi m} \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^2 \cdot 2\pi \rho(\lambda) \\
&= \frac{e}{m},
\end{aligned} \tag{A16}$$

其中 $e = \hbar^2/(2m) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^2 \rho(\lambda)$ 是能量密度. 压强 P 的表达式为

$$\begin{aligned}
P &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \ln [1 + e^{-\epsilon(\lambda)/T}] \\
&= \frac{\hbar^2}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda n(\lambda) \lambda^{\text{dr}},
\end{aligned} \tag{A17}$$

将其与 (A14) 式中第二个积分项进行比较, 第二个积分项等于 P/m . 因此, 最终得出

$$D_{ne} = \frac{e + P}{m}. \tag{A18}$$

现在计算 $D_{n\bar{e}}$, 其定义为

$$D_{n\bar{e}} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) [v^{\text{eff}}(\lambda)]^2 (1 - n(\lambda)) 1^{\text{dr}}(\lambda) [E - \mu]^{\text{dr}}(\lambda). \tag{A19}$$

利用缀饰操作的性质, 有 $[E - \mu]^{\text{dr}}(\lambda) = E^{\text{dr}}(\lambda) - \mu 1^{\text{dr}}(\lambda)$ 代入上式中, 得

$$\begin{aligned}
D_{n\bar{e}} &= D_{ne} - \mu D_{nn} \\
&= \frac{e + P}{m} - \mu \frac{\eta}{m}.
\end{aligned} \tag{A20}$$

由热力学关系, 吉布斯自由能 $G = E - TS - \mu N = -PL$, 因此 $e + P - \mu\eta = TS/L$, 于是

$$D_{n\bar{e}} = \frac{TS}{mL}. \tag{A21}$$

综上所述, 我们得到了输运系数简洁的热力学表达式

$$D_{nn} = \frac{\eta}{m}, D_{ne} = \frac{e + P}{m}, D_{n\bar{e}} = \frac{TS}{mL}. \tag{A22}$$

这些结果表明, 这些输运系数直接与平衡态的热力学量 (例如粒子数密度、能量密度、压力以及熵) 相关, 为研究可积系统的输运行为提供了重要基础.

参考文献

- [1] Venu V, Xu P, Mamaev M, Corapi F, Bilitewski T, D' Incao J P, Fujiwara C J, Rey A M, Thywissen J H 2023 *Nat.* **613** 262
- [2] Guan X W, He P 2022 *Rep. Prog. Phys.* **85** 114001
- [3] Yan X C, Sun D L, Wang L, Min J, Peng S G, Jiang K J 2021 *Chin. Phys. Lett.* **38** 056701
- [4] Yan X C, Sun D L, Wang L, Min J, Peng S G, Jiang K J 2022 *Chin. Phys. B* **31** 016701
- [5] Zhao G D, Xia J, Liu Y, Zhou Y Z, Zhou C H, Guo F, Wang W H, He D J, Feng M, Liang T, Ren J, Xu Q F, Meng J W, Gao F, Shen Y, Lu X T, Lu B Q, Wang Y B, Hu X H, Tan W, Zou H X, Chang H 2025 *Chin. Phys. Lett.* **42** 063701
- [6] Chin C, Grimm R, Julienne P, Tiesinga E 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1225
- [7] Diao P P, Deng S J, Li F, Wu H B 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 046702. (in Chinese) [刁鹏鹏, 邓书金, 李芳, 武海滨 2019 物理学报 68 046702]
- [8] Newbury N R, Myatt C J, Wieman C E 1995 *Phys. Rev. A* **51** R2680
- [9] Lieb E H, Liniger W 1963 *Phys. Rev.* **130** 1605
- [10] Yang C N 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1312
- [11] Gaudin M 1967 *Phys. Lett. A* **24** 55
- [12] Lieb E H, Wu F Y 1968 *Phys. Rev. Lett.* **20** 1445
- [13] Sutherland B 1968 *Phys. Rev. Lett.* **20** 98
- [14] Bethe H 1931 *Z. Phys.* **71** 205
- [15] Qiao Y, Cao J, Yang W L, Shi K, Wang Y 2023 *Chin. Phys. B* **32** 117504
- [16] Wen F K, Hao K 2023 *Chin. Phys. B* **32** 090307
- [17] Liu Y X, Zhang Y B 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 040304. (in Chinese) [刘彦霞, 张云波 2019 物理学报 68 040304]

- [18] Zhang X M, Cheng S, Chen Y Y 2024 *Chin. Phys. B* **33** 040203
- [19] Yin X G, Yu H R, Hao Y J, Zhang Y B 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 020302. (in Chinese) [尹相国, 于海如, 郝亚江, 张云波 2024 物理学报 73 020302]
- [20] Song Y D, Cai X M 2018 *Chin. Phys. Lett.* **35** 110301
- [21] Castro-Alvaredo O A, Doyon B, Yoshimura T 2016 *Phys. Rev. X* **6** 041065
- [22] Bertini B, Collura M, De Nardis J, Fagotti M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 207201
- [23] Doyon B, Yoshimura T 2017 *SciPost Phys.* **2** 014
- [24] Malvania N, Zhang Y, Le Y, Dubail J, Rigol M, Weiss D S 2021 *Science* **373** 1129
- [25] Schemmer M, Bouchoule I, Doyon B, Dubail J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 090601
- [26] De Nardis J, Doyon B, Medenjak M, Panfil M 2022 *J. Stat. Mech.* **2022** 014002
- [27] Vasseur R, Karrasch C, Moore J E 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 267201
- [28] Liu Z Y, Yin X G, Zhang Y B, Zhang S Z, Guan X W 2026
- [29] Kubo R 1957 *J. Phys. Soc. Jpn.* **12** 570
- [30] De Nardis J, Bernard D, Doyon B 2019 *SciPost Phys.* **6** 049
- [31] Mestyán M, Bertini B, Piroli L, Calabrese P 2019 *Phys. Rev. B* **99** 014305
- [32] Luo J J, Pu H, Guan X W 2024 *Rep. Prog. Phys.* **87** 117601
- [33] Wang L R, Yu H R, Yin X G 2026 *J. Shanxi Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **49** 129. (in Chinese) [王丽蓉, 于海如, 尹相国 2026 山西大学学报 (自然科学版) 49 129]
- [34] Chandak S, Petković A, Ristivojevic Z 2026 *Phys. Rev. B*
- [35] Göhmann F, Klümper A, Kozłowski K K 2025 *Phys. Rev. Lett.* **135** 263401
- [36] Okabe T 1998 *Journal of the Physical Society of Japan* **67** 2792
- [37] Günter K, Stöferle T, Moritz H, Köhl M, Esslinger T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 230401

- [38] Regal C A, Ticknor C, Bohn J L, Jin D S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 053201
- [39] Imambekov A, Lukyanov A A, Glazman L I, Gritsev V 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 040402
- [40] Jackson K G, Dale C J, Maki J, Xie K G, Olsen B A, Ahmed-Braun D J, Zhang S, Thywissen J H
2023 *Phys. Rev. X* **13** 021013
- [41] Pricoupenko L 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 170404
- [42] Yin X G, Guan X W, Zhang Y B, Su H B, Zhang S Z 2018 *Phys. Rev. A* **98** 023605
- [43] Chen X L, Liu X J, Hu H 2016 *Phys. Rev. A* **94** 033630
- [44] Ilievski E, De Nardis J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 020602
- [45] Carmelo J, Sacramento P 2024 *Phys. Rev. B* **110** L201108
- [46] Ilievski E, De Nardis J, Medenjak M, Prosen T 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 230602
- [47] Doyon B, Spohn H 2017 *SciPost Phys.* **3** 039
- [48] Ilievski E, De Nardis J 2017 *Phys. Rev. B* **96** 081118
- [49] Guan X W, Batchelor M T, Takahashi M 2007 *Phys. Rev. A* **76** 043617
- [50] Schüttelkopf P, Tajik M, Bazhan N, Cataldini F, Ji S C, Schmiedmayer J, Møller F 2026 *Science* **391**
290
- [51] Sachdev S 1999 *Phys. World* **12** 33
- [52] Zhou Q, Ho T L 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 245702

非最终出版稿
录用稿件，

Transport Properties in One-dimensional p-wave Fermi Gases*

YIN Xiangguo^{1)2)3)†} SU Yingdan¹⁾²⁾

1) (*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*State Key Laboratory of Quantum Optics Technologies and Devices, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

3) (*Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

Transport in nonergodic dynamics is a fundamental topic in quantum many-body physics. Integrable systems, due to their infinite number of conserved quantities, exhibit unique ballistic transport properties. In this work, we systematically investigate an integrable model of cold atomic gases—the one-dimensional p-wave Fermi gas. Although the theoretical description of this model has been extensively studied, its ballistic transport properties have not yet been fully elucidated. Within the framework of thermodynamic Bethe ansatz (TBA) equations and Generalized Hydrodynamics (GHD), we derive an expression for the Drude weight that characterizes ballistic transport and establish a universal relation linking it to basic thermodynamic quantities such as particle density, energy density, and entropy. This relation holds in all integrable systems satisfying Galilean invariance. Under equilibrium conditions and for weak interactions, we obtain the low-temperature thermodynamic quantities and the Drude weight via Sommerfeld expansion, and further explore the dependence of the Drude weight on both interaction strength and temperature. For non-equilibrium states, we analyze the evolution under three protocols—tilted potential, local chemical potential difference, and local temperature difference—all governed by the GHD equations. Numerical calculations of the transport coefficients in steady states agree perfectly with the results obtained from

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12461160324) and the Research Foundation for Basic Research of Shanxi Province, China (Grant No. 202103021224033).

† Corresponding author. E-mail: yinxiangguo@sxu.edu.cn

integral expressions, further validating the reliability of the theoretical framework. Furthermore, using the polylogarithm function, we derive a universal scaling equation for the transport coefficients. It is found that the transport coefficients exhibit clear scaling behavior near the quantum critical point of the transition from the vacuum state to a finite-density Fermi state, and their temperature dependence is consistent with the universality class characterized by dynamical exponent $z = 2$ and correlation length exponent $\nu = 1/2$, thereby confirming the self-consistency of the theory. This work not only provides a systematic theoretical framework for understanding ballistic transport in one-dimensional p-wave Fermi gases but also deepens the general understanding of transport properties in one-dimensional quantum continuum integrable systems.

Keywords: One-dimensional p-wave Fermi gas, Integrable system, Generalized hydrodynamics, Drude weight

录用稿件，非最终出版稿