

无序三角晶格中硬核玻色子的超玻璃相^{*}

武菲菲¹⁾²⁾, 左贤达¹⁾²⁾, 朱庆庆¹⁾²⁾, 戴汉宁^{1)2)3)†}

1) (中国科学技术大学物理学院, 合肥微尺度物质科学国家研究中心, 合肥 230026)

2) (中国科学技术大学, 中国科学院量子信息与量子科技创新研究院, 上海量子科学研究中心, 上海 201315)

3) (合肥国家实验室, 合肥 230088)

强相互作用与无序之间的竞争可以重塑量子多体体系的基态结构, 并诱导一系列超出传统有序-无序分类的新奇物态。本文通过路径积分蒙特卡洛数值模拟, 研究了二维三角晶格中具有长程相互作用的玻色子体系在随机外势阱作用下的基态性质。结果表明, 在中等强度的无序化学势条件下, 体系可稳定进入一种同时具有超流响应与玻璃特性的超玻璃相。该相表现为有限的超流密度和爱德华-安德森序参量, 而不伴随固体序。进一步的有限温度分析显示, 超玻璃相对热涨落具有显著鲁棒性, 在较高温度下仍可保持其关键特征。本工作为在超冷原子平台, 尤其是为无序外势阱下的三角光晶格中的里德堡原子体系实验观测超玻璃相提供了明确的理论依据。

关键词: 三角晶格, 无序, 超玻璃, 硬核玻色子

PACS: 67.85.-d, 64.70.kj, 67.10.Ba

1 引言

无序效应是现实量子体系中不可避免的基本特征, 它的存在从根本上改变了粒子在空间中的传播方式以及多体系统的集体行为。无序不仅打破了体系的平移对称性, 还通过引入空间涨落显著重塑了低能激发的结构, 从而诱导局域化、量子混沌等一系列非平庸的量子现象^[1-5]。在无相互作用系统中, 无序的引入会诱导安德森局域化^[6,7], 使体系从扩展态转变为局域态; 而当相互作用被引入后, 无序与相互作用之间的竞争进一步打破了传统平衡统计物理的描述框架, 催生出一系列全新的量子多体物相与动力学行为。无序势阱通过在空间上引入局域能量的涨落, 可以抑制粒子的长程相干输运, 并显著延缓甚至阻止体系向热平衡态的演化, 从而导致多体局域化 (many-body localization, MBL) 现象的出现^[8-11]。与无相互作用体系中的安德森局域化不同, MBL 的产生源于无序与相互作用的协同作用, 其本质在于多体态之间的共振过程被无序有效抑制。无序与相互作用之间的竞争不仅阻碍体系的热化过程, 还突破了传统朗道对称性破缺理论的描述范畴, 推动了玻色玻璃 (Bose glass)^[12-15] 以及超玻璃 (Superglass)^[16-18] 等一系列新型量子物相的研究。

在二维玻色子体系中, 无序效应与相互作用的竞争会催生新的平衡量子相。以玻色-哈伯德模型为例, 当在二维方晶格中引入无序外势阱时, 体系将出现玻色玻璃相。该相不具有长程相干性, 但其压缩率保持有限, 表明体系仍可对化学势变化作出响应。正是由于这一独特性质, 玻色玻璃相在相图中占据了莫特绝

^{*} 国家重点研发计划 (批准号: 2023YFC2206200)、上海市市级科技重大专项 (批准号: 2019SHZDZX01) 和科技创新 2030—“量子通信与量子计算机”重大项目 (批准号: 2021ZD0302002) 资助的课题。

[†] 通信作者. E-mail: daihan@ustc.edu.cn
第一作者. E-mail: feifeiwu@mail.ustc.edu.cn

缘相与超流相之间的中间区域，使得在无序体系中，超流相向莫特绝缘相的量子相变无法直接发生，而必须经由玻色玻璃相过渡^[19]。

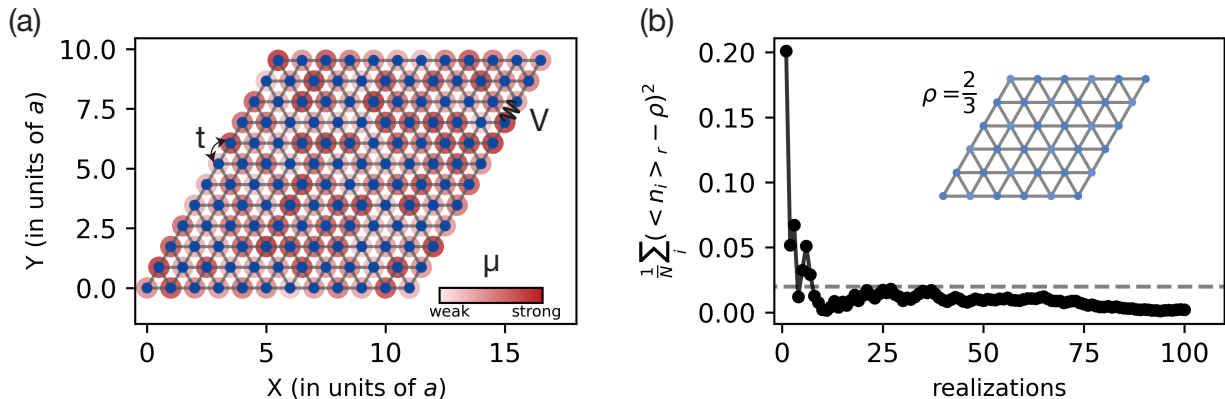


图 1 (a) 无序三角晶格示意图，在规则排列的三角晶格中引入随机外势阱 μ_i ，其强度由格点上的热力图表示。(b) 在尺寸为 $L = 6$ ， $\mu_0/V = 4.5$ 的均匀三角晶格中，平均粒子数密度分布方差随独立重复蒙特卡罗模拟次数的变化关系，用以检验热力学平均的收敛性。右上角的图片展示的该实验参数下的平均粒子数密度分布。

Fig. 1. (a) Schematic illustration of a disordered triangular lattice. A random on-site potential μ_i is introduced into an regular triangular lattice, with its strength encoded by the color scale.(b) Variance of the averaged local particle-density distribution as a function of the number of independent Monte Carlo runs for a uniform two-dimensional triangular lattice with $L = 6$, demonstrating the convergence of the thermodynamic averaging. The figure inset shows the mean local density with the parameter $L = 6$, $\mu_0/V = 4.5$.]

玻色玻璃相的存在已在超冷原子实验中得到广泛验证。例如，通过在光晶格中引入随机无序势或采用准周期晶格结构，实验上在一维^[20]、二维^[21]和三维^[22]体系中观测到了与玻色玻璃相一致的特征行为。这些实验通常通过测量动量分布、激发谱以及爱德华-安德森 (Edwards-Anderson, EA) 序参量等物理量，对体系中局域玻璃行为进行表征。

在此基础上，当进一步考虑长程相互作用时^[23-25]，无序玻色体系的物理图景将变得更加丰富。长程相互作用不仅增强了体系中不同空间区域之间的耦合，还可能在无序背景下引入高度复杂的自由能景观。在这种情况下，体系有可能进入一种更加特殊的量子相——超玻璃相^[26-28]。该相同时具备有限的超流密度与玻璃冻结的特征，表现为玻璃态的结构无序与超流态的相干输运在同一体系中的共存。从理论上讲，超玻璃相的出现意味着体系在保持超流响应的同时，其基态结构呈现出非遍历的特性。已有研究通过数值模拟的方法在方晶格体系^[29-31]以及相互作用阻塞的三角晶格体系^[32]中预测了超玻璃相的存在。这些研究中的超玻璃相出现于存在无序的长程相互作用或者无序的隧穿强度的系统中。然而，这些类型的无序结构在超冷原子实验中具有很大的构造难度。相较于以往的无序结构，随机外势阱的构造在实验中具有更加成熟的获得方式。对于硬核玻色子在仅具有无序外势阱的三角晶格体系中，其基态是否能够稳定形成超玻璃相，目前仍缺乏系统而明确的研究。这一问题在几何受挫与无序同时存在的背景下尤为重要，因为三角晶格本身的几何受挫可能进一步放大无序与相互作用之间的竞争效应。

本文采用路径积分蒙特卡罗 (path-integral Monte Carlo, PIMC) 的方法^[33]，对于三角晶格中，含有无序 (随机) 化学势的硬核玻色子模型进行了有限温度下的数值模拟。通过对玻色子局域密度分布的统计分析，我们计算了刻画玻璃特性的爱德华-安德森序参量 q_{ea} ，并结合超流密度等关键物理量，对体系的相图进行了系统研究。数值结果表明，即使在仅引入无序化学势、而不考虑随机相互作用的情况下，在特定参数范围内体系仍然表现出超玻璃相的典型特征。这一发现表明，无序化学势本身即可在长程相互作用体系中诱导玻璃行为与超流性的共存。随着无序强度的进一步增强，体系对初始态的依赖性显著增加。在不

同初始条件下，系统可能分别演化至超玻璃相或玻璃相，反映出其自由能景观对无序结构的依赖特性。

本文结构安排如下：第一部分介绍具有长程相互作用的硬核玻色子在无序外势阱三角晶格中的模型哈密顿量及相关序参量的定义；第二部分给出模拟的结果与分析，包括有限温度下各序参量随无序强度变化的数值结果，并讨论超玻璃相出现的判据与物理特征，分析不同温度条件下超玻璃相的稳定性及其演化行为，研究在不同隧穿强度 t 和平均化学势 μ_0 的条件下、固定温度 $T = 0.2t$ 时体系的相变行为，并绘制相应的相图。

2 理论模型

在考虑最近邻相互作用的情况下，三角晶格中的硬核玻色子体系（如图1(a)所示）可由扩展的玻色-哈伯德模型^[34]加以描述，

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i) + V \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{n}_i \hat{n}_j - \sum_i \mu_i \hat{n}_i \quad (1)$$

模型中， t 代表最近邻格点之间的隧穿强度， V 表示最近邻格点之间的相互作用强度，而格点上的化学势写作 $\mu_i = \mu_0 + \delta_i$ ，其中 μ_0 为平均化学势， δ_i 描述无序外势阱在空间上的随机涨落。 \hat{n}_i 表示第 i 个格点上的粒子数算符。由于本文仅考虑硬核玻色子，每个格点上最多存在一个玻色子，因此在模型中不需要考虑格点上的相互作用项 $U \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1)$ 。该模型在当前超冷原子实验平台中具有良好的可实现性。例如，在光镊系统中，最近邻相互作用 V 可以通过调节耦合光场的失谐和占空比来实现^[35]，而化学势 μ_i 则可通过对光阱深度与空间分布的精细调控来调节。使得该模型成为研究无序与相互作用竞争效应的理想实验候选体系。在均匀外势阱条件下，例如盒型势阱中，化学势满足 $\mu_i = \mu_0$ ，体系保持空间均匀性。在这一情况下，硬核玻色子在三角晶格中的基态可能呈现出超流相、超固相以及晶体固体相等多种有序态，具体取决于 t 、 V 、 μ_0 之间的相对强度^[23]。当相互作用强度 V/t 较大时，纯净系统中会出现分数填充的晶体固体相；反之，系统将处于超流相。纯净系统的超固相出现在不同分数填充的固体相与超流相之间。本文将重点关注在引入随机外势阱后，即当 $\mu_i = \mu_0 + \delta_i$ 呈现无序分布时，体系所表现出的新型量子相。我们设定无序项 δ_i 服从均匀分布，其取值范围为 $\delta_i \sim [-0.5\Delta, 0.5\Delta]$ ，其中 Δ 表征无序强度。这种无序形式在理论与实验中被广泛采用，可有效刻画化学势型无序对多体系统的影响。本文将展示，在这一无序背景下，三角晶格中的硬核玻色子体系可稳定进入一种特殊的平衡量子相——超玻璃相。文中采用蒙特卡洛模拟中的蠕虫算法，数值模拟得到系统在有限温度下的基态。在模拟过程中，我们计算了以下物理量：爱德华-安德森序参量 q_{ea} ，结构因子 $S(\mathbf{k})$ ，以及超流密度 ρ_s 。结构因子定义为 $S(\mathbf{k}) = \sum_{i,j} \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \langle \hat{n}_i \hat{n}_j \rangle / N$ ，其中 N 为系统格点数， \mathbf{r}_i 表示格点位置。这里我们选取不同 \mathbf{k} 值对应得到的一系列结构因子 $S(\mathbf{k})$ 中的最大值作为最大结构因子 $S(\mathbf{k})^{\max}$ ，用作衡量体系晶体序程度的指标。爱德华-安德森序参量 q_{ea} 是描述体系玻璃特性的物理量，常用于评估系统的玻璃特性，广泛应用于自旋玻璃与玻色玻璃体系中。在本文所研究的长程相互作用玻色子体系中，我们采用 $q_{ea} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \hat{n}_i \rangle^2 - \langle \hat{n}_i \rangle^2$ 作为玻璃特性的判据。当 q_{ea} 取得有限值时，表明体系中不同空间区域对无序的响应存在非平庸的记忆效应。这里的“—”代表的是对于不同无序分布的平均，而“ $\langle \rangle$ ”代表的是热力学平均。在具体计算中，热力学平均通过对相同参数下多次独立蒙特卡洛采样结果取平均获得；而无序平均则通过在固定无序强度 Δ 下，对多组不同随机势分布进行独立模拟并取平均实现。

由公式1描述的三角晶格硬核玻色子体系，其基态粒子数密度期望可能为非整数。为了满足热力学平均的要求，并降低有限尺寸效应与统计涨落对数值计算结果的影响，我们首先对均匀二维体系（系统尺寸 $L = 6$ ）在相同参数条件下进行了系统的收敛性检验。在该检验中，我们对同一参数点（粒子数平均密度为 $\rho = 2/3$ ）重复进行了 100 次独立的蒙特卡洛模拟，并统计平均粒子数密度分布的方差 $\sum_i (\langle \hat{n}_i \rangle - \rho)^2$ ，结果如图1(b)所示。可以看出，当重复模拟次数超过 20 次后，密度分布方差迅速收敛并稳定在 0.02 以下。基于上述收敛性分析，在后续所有数值计算中，我们对每一组参数进行了 30 次独立重复模拟，以有效抑制非整数密度期望所引入的统计涨落。在此基础上，爱德华-安德森序参量 q_{ea} 的计算方式为：在固

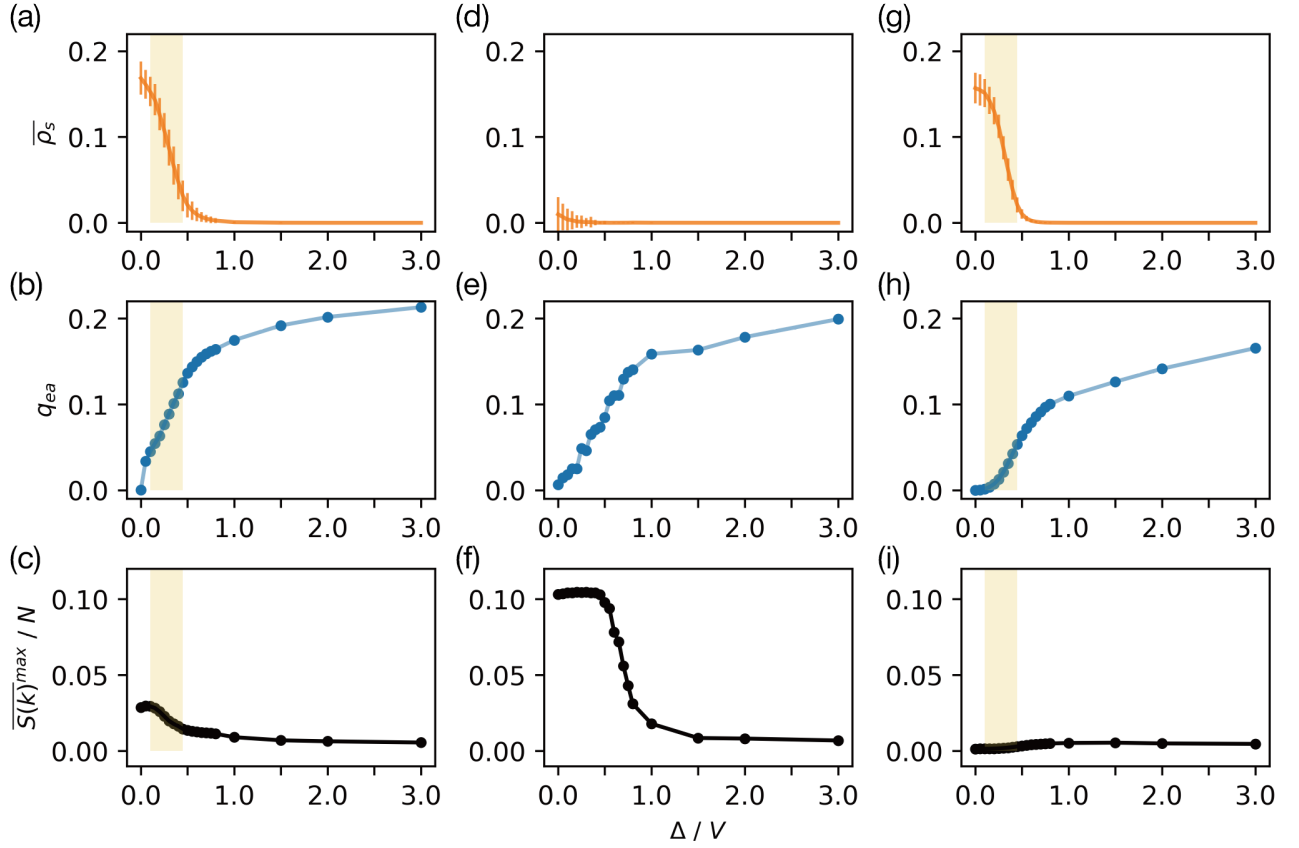


图 2 在不同平均化学势条件下的序参量数值模拟结果。(a-c) $\mu_0/V = 3.0$, (d-f) $\mu_0/V = 4.5$ 和 (g-i) $\mu_0/V = 6.0$ 的序参量模拟结果。黄色阴影区域表示超玻璃相出现的参数区间。在 $\mu_0/V = 3.0$ 和 $\mu_0/V = 6.0$ 中, 体系同时表现出有限的超流密度 $\bar{\rho}_s$ 和爱德华-安德森序参量 q_{ea} , 而结构因子趋于零, 表明超玻璃相的形成。系统参数为 $L = 12$, $T = 0.2t$, $t/V = 0.1$ 。

Fig. 2. Numerical results for the order parameters at different average chemical potentials. (a-c) $\mu_0/V = 3.0$, (d-f) $\mu_0/V = 4.5$ and (g-i) $\mu_0/V = 6.0$. Yellow shadows indicate the parameter regions where the superglass phase emerges. For $\mu_0/V = 3.0$ and $\mu_0/V = 6.0$, both a finite superfluid density $\bar{\rho}_s$ and a nonzero Edwards–Anderson order parameter q_{ea} are observed, while the structure factor is suppressed, signaling the formation of a superglass phase. System parameters are $L = 12$, $T = 0.2t$ and $t/V = 0.1$.

定无序强度 Δ 的条件下, 对 10 组不同随机种子生成的化学势分布 μ_i 分别进行 30 次独立模拟, 并对所得粒子数密度分布进行无序平均。与此同时, 为了进一步降低单次蒙特卡洛模拟的统计误差, 超流密度 $\bar{\rho}_s$ 和结构因子 $\overline{S(\mathbf{k})}$ 取每组参数下 300 次模拟结果的平均值。

3 结果与讨论

图2展示了系统尺寸为 $L = 12$ 的二维无序三角晶格在低温条件下的数值结果。此时体系温度为 $T = 0.2t$, 隧穿强度与与相互作用强度之间比值为 $t/V = 0.1$ 。可以看到, 随着无序强度 Δ 的变化, 体系基态的物理性质发生了显著改变。如图2(a-c) 所示, 在 $\mu_0/V = 3.0$ 体系中, 当 $\Delta = 0$ 即均匀系统时, 基态表现为处于超固相, 其特征为有限的超流密度 $\bar{\rho}_s > 0$ 以及非零的最大结构因子 $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max} > 0$, 表明体系同时具备超流性与晶体序。随着无序强度 Δ 的逐渐增大, 超流密度 $\bar{\rho}_s$ 单调降低, 而爱德华-安德森序参量 q_{ea} 逐渐增大。值得注意的是, 在 $\Delta \approx 0.1V$ 至 $0.4V$ 这一区间内, 体系同时表现出有限的超流密度以及非零的 q_{ea} , 而结构因子几乎完全消失。意味着在该参数区间内, 体系仍保持超流响应并呈现空间局域密度冻结的

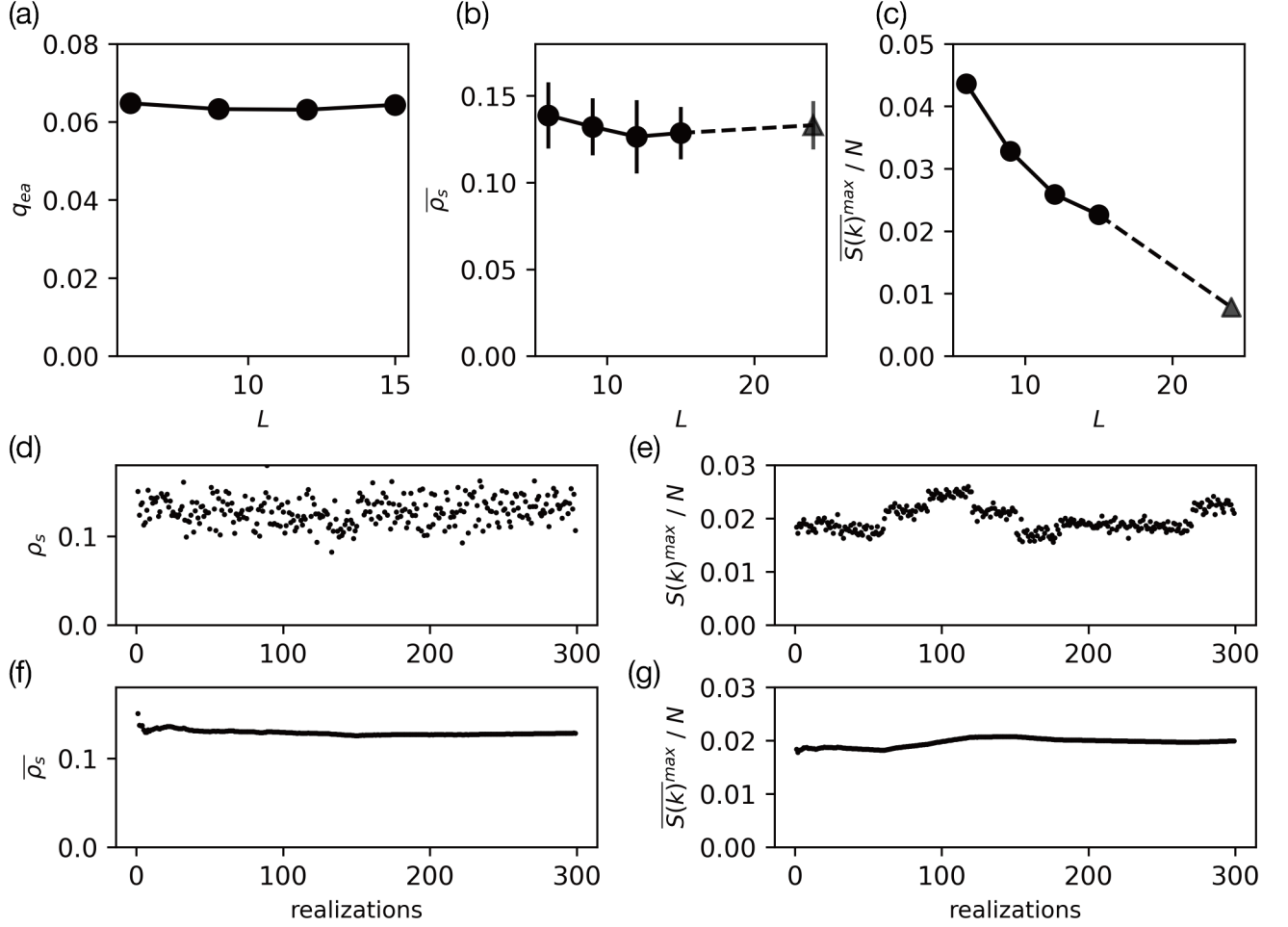


图 3 不同系统尺寸下无序三角晶格体系的基态数值模拟结果。(a-c) 分别展示了爱德华-安德森序参量 q_{ea} ，超流密度 $\bar{\rho}_s > 0$ 以及最大结构因子 $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max}$ 对系统尺寸的依赖关系。其中，在 (b-c) 中额外给出了 $L = 24$ 时单一无序构型下 10 次独立模拟的统计结果，用以补充大尺寸体系的行为特征。图 (d-g) 展示了 $L = 15$ 的 300 次独立模拟的结果：分别为多次独立模拟得到的超流密度与最大结构因子的分布；(f-g) 则给出了对不同独立模拟次数取平均后的结果，即平均超流密度与最大结构因子随独立模拟次数的收敛行为。

Fig. 3. Ground-state numerical results of the disordered triangular lattice system for different system sizes. Panels (a-c) show the system-size dependence of the Edwards-Anderson order parameter q_{ea} , the superfluid density $\bar{\rho}_s > 0$ and the maximum structure factor $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max}$, respectively. In (b-c), additional data for $L = 24$ are included, obtained from 10 independent simulations for a single disorder realization, to further characterize the behavior at larger system sizes. Panels (d-g) present statistical analyses based on 300 independent simulations for $L = 15$: (d-e) display the distributions of the superfluid density and the maximum structure factor over independent simulations, while (f-g) show their averaged values as functions of the number of independent simulations, demonstrating convergence with increasing sampling.

特征，因此可被明确识别为超玻璃相。图2(d-f) 给出了 $\mu_0/V = 4.5$ 时的结果。在无序缺失的均匀体系中，基态位于固体相区间，其特征为 $\bar{\rho}_s = 0$ 且 $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max} > 0$ 。随着无序强度 Δ 的增加，体系的超流密度始终保持在零附近，而 q_{ea} 逐渐增大，同时结构因子逐渐减小，表明体系的基态从具有晶体序的固体相连续演化为玻璃相。在 $\mu_0/V = 6.0$ 的情况下，如图2(g-i) 所示，在均匀外势阱条件下，体系基态处于超流相，其特征为 $\bar{\rho}_s > 0$ 且 $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max} \approx 0$ 。随着无序强度的增加，在中等无序区间内同样出现了有限 $\bar{\rho}_s$ 与非零 q_{ea} 共存的区域，表明超玻璃相在该参数条件下依然稳定存在。

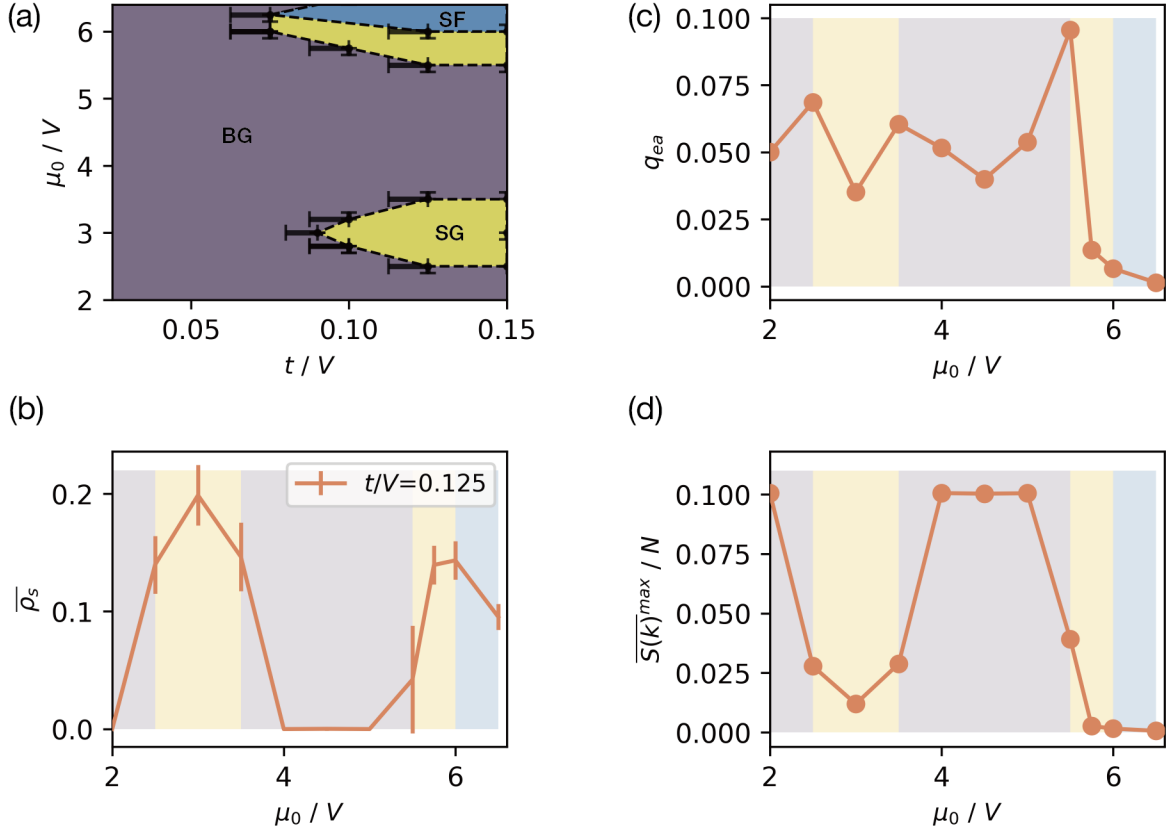


图 4 (a) 无序三角晶格体系在低温条件下的 $t - \mu$ 的相图，出现玻色玻璃相 (BG)、超流相 (SF) 和超玻璃相 (SG)。(b-d) 给出了在 $t/V = 0.125$ 时，超流密度 $\bar{\rho}_s$ 、爱德华-安德森序参量 q_{ea} 以及最大结构因子 $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max}$ 随平均化学势 μ_0 的变化。系统参数为 $L = 12$ ， $\Delta = 0.25V$ ， $T = 0.2t$ 。

Fig. 4. (a) Low-temperature $t - \mu$ phase diagram of the disordered triangular lattice. The bose-glass(BG), superfluid(SF), and superglass(SG) phases are observed in panel (a). Panels (b-d) show the superfluid density $\bar{\rho}_s$, the Edwards-Anderson order parameter q_{ea} and the maximum structure factor $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max}$ as functions of the average chemical potential μ_0 for $t/V = 0.125$. System parameters are $L = 12$, $\Delta = 0.25V$ and $T = 0.2t$.

值得注意的是，图2(c) 中最大结构因子 $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max}$ 表现出有限值，主要来源是有限尺寸效应。为系统评估该效应的影响，我们在典型超玻璃相参数下，对不同系统尺寸 $L = 6, 9, 12, 15$ 进行了数值模拟。受计算资源限制，进一步增大系统尺寸的计算成本显著增加。为进一步验证尺寸依赖趋势，我们在更大系统尺寸 $L = 24$ 下，针对单一无序构型进行了 10 次独立模拟，并计算其平均超流密度与最大结构因子。考虑到体系的统计特性，我们进一步对同一参数条件下的所有独立模拟结果进行了系统的统计分析，即对 10 种无序分布下各 30 次独立模拟（共计 300 次）的结果，研究物理量随独立模拟次数的收敛行为。如图3(d-g) 所示，不同独立模拟之间的物理量涨落较小，且其平均值表现出良好的收敛性与稳定性。因此，在 $L = 24$ 的情况下，对单一无序分布进行有限次数（10 次）独立模拟所得到的超流密度与结构因子，已能够可靠反映该物理量的变化趋势。综合多个系统尺寸下的结果，我们得到了各个序参量的尺寸依赖性，如图3(a-c) 所

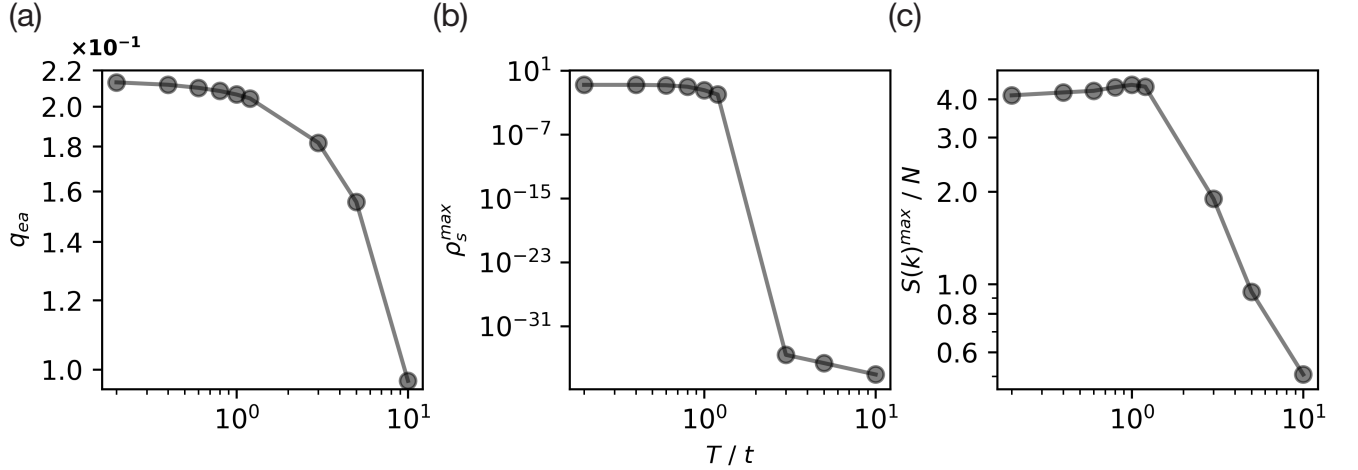


图 5 不同温度条件下无序三角晶格体系的基态数值模拟结果。(a-c) 分别展示了在 $T = 0.2t \sim 10t$ 时, 范围内, 体系的超流密度、爱德华-安德森序参量以及最大结构因子随温度的演化行为。可以看出, 超流密度对温度变化高度敏感, 并在 $T \leq t$ 的低温区间内保持明显的超流响应。

Fig. 5. Ground-state simulation results for the disordered triangular lattice at different temperatures. Panels (a-c) show the temperature dependence of the superfluid density, the Edwards-Anderson order parameter, and the maximum structure factor over the range $T = 0.2t$ to $10t$. The superfluid density is highly sensitive to thermal fluctuations and remains clearly finite only in the low-temperature regime $T \leq t$.

示。结果表明, 超流密度 $\bar{\rho}_s$ 与序参量 q_{ea} 随系统尺寸变化较小, 基本保持有限值; 而最大结构因子 $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max}$ 则随尺寸增大迅速减小, 并趋于零。因此在热力学极限下, 结构因子 $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max}$ 将完全消失, 而超流密度 $\bar{\rho}_s$ 与序参量 q_{ea} 会保持有限值。这一结果清晰表明, 本文所观测到的超玻璃相并非由有限尺寸效应导致的伪相, 而是在热力学极限下稳定存在的真实量子物相。

图4(a) 展示了在低温 $T = 0.2t$ 时、固定无序强度 $\Delta = 0.25V$ 条件下体系的 $t - \mu$ 相图。黄色区域为超玻璃相, 紫色区域为玻色玻璃相, 蓝色区域为超流相。相边界的划分依据主要是描述玻璃特性的序参量 q_{ea} 和描述超流特性的序参量 $\bar{\rho}_s$ 。当 $\bar{\rho}_s > 0$ 并且 $q_{ea} > 0$ 时, 说明系统同时具有超流性和玻璃特性, 我们判定其为超玻璃相; 当 $\bar{\rho}_s > 0$ 但 $q_{ea} \approx 0$ 时, 说明系统不存在玻璃特性, 但是超流特性显著, 则为超流相; 当 $\bar{\rho}_s \approx 0$ 但 $q_{ea} > 0$ 时, 说明系统不具备超流特性但是玻璃特性明显, 判定其为玻色玻璃相。考虑到蒙特卡洛模拟对于粒子数分布的统计误差 (如图1(b)), 这里我们选取 $q_{ea} < 0.01$ 为 $q_{ea} \approx 0$ 。可以看到, 在 $V = 6 - 10t$ 的范围内, 体系存在稳定的超玻璃相区域。随着相互作用强度的进一步增大, 体系从超玻璃相过渡至玻色玻璃相, 其基态特征为超流密度消失而 q_{ea} 仍保持有限。图4(b-d) 分别描述了在 $t/V = 0.125$ 时, 超流密度、爱德华-安德森序参量和最大结构因子随平均化学势 μ_0 的变化趋势。在不同相图区间, 这三个特征参数分别表现出不同的变化趋势。与此同时, 原本存在的超固相区域显著收缩, 超玻璃相出现在超流相与玻璃相之间。

图5给出了在不同温度条件下体系的相图演化行为。图5(a) 显示了 $\Delta = 3V$ 时的爱德华-安德森序参量 q_{ea} 变化趋势, 在低温区域 $T < t$ 内, 爱德华-安德森序参量 q_{ea} 随温度变化几乎保持不变; 当温度升高至 $T > t$ 后, q_{ea} 缓慢减小, 但其随无序强度增加而增大的整体趋势依然存在。如图2所示, 随着无序强度的增大, 超流密度会逐渐衰减, 因此在图5(b) 中, 我们描述了最大超流密度 ρ_s , 即纯净系统中的超流密度 ρ_s 随温度的变化。可以看到, 随着温度升高, 体系的超流特性迅速衰减; 当 $T > t$ 时, 不论无序强度如何, 超流密度几乎完全消失。这是因为超流性依赖于相位相干的长程建立, 而热涨落会有效破坏玻色子的相位相干性, 使得系统无法维持宏观量子相干输运, 从而导致超流响应在有限温度下迅速被抑制。如图5(c), 描述了纯净系统中最大结构因子 $S(\mathbf{k})^{\max}$ 随温度升高逐渐减小。当温度足够高时, 体系中不再存

在显著的密度调制结构，系统进入液相 (liquid phase)。综合上述三个序参量的行为，随着温度升高，超玻璃相的稳定区域逐渐收缩。值得注意的是，超玻璃相主要出现在 $T < t$ 的低温区域，这一温度尺度对于当前超冷原子实验而言是有望实现的。已有实验表明，在光镊阵列体系中，里德堡原子的有效温度可被冷却至接近隧穿强度 t 的量级，为超玻璃相的实验观测提供了现实可行性。

4 结论

本文研究了在三角晶格体系中，通过引入随机外势阱使化学势呈现无序分布后，硬核玻色子体系基态所表现出的新型量子相结构。数值结果表明，在一定参数范围内，体系可稳定进入超玻璃相，其特征为同时具有有限的超流响应以及玻璃特性。

通过对局域粒子数密度的统计分析，我们计算了体系的超流密度 ρ_s 以及爱德华-安德森序参量 q_{ea} 和结构因子 $S(\mathbf{k})$ 。当超流密度 ρ_s 以及爱德华-安德森序参量 q_{ea} 物理量均取非零值时，表明体系在保持长程相干性的同时，对无序势的响应呈现出非平庸的空间非均匀性，从而可明确识别为超玻璃相。基于上述判据，我们发现随着无序强度的增加，原本处于超流相或超固相的体系均可能演化进入超玻璃相，而初始处于固体相的体系则将过渡至玻璃相。

本文的数值模拟结果表明，即使在几何受控的三角晶格体系中，仅通过对化学势引入无序调制，亦可实现超玻璃相的稳定存在。虽然之前的研究在非对角无序系统中预测了超玻璃相，但本工作首次在实验最易实现的硬核玻色子与对角无序框架下证实了该相的稳定性，这为实验观测扫清了主要障碍，拓展了超玻璃相可能出现的模型与参数空间，表明无序化学势在长程相互作用体系中能够发挥关键作用。

上述理论预期具有一定的实验可行性。在光晶格体系中的里德堡原子^[36]和偶极子^[37]，可以产生远距离的相互作用。通过数字微镜阵列 (DMD) 或空间光调制器 (SLM) 对光学势阱进行随机调制，从而实现化学势无序的精确控制。借助高分辨率量子气体显微镜^[38,39]，可直接测量原子的局域密度分布。通过对局域密度的方差统计可以为超流态的判断提供支持。除此之外，超流特性的判断还可以通过释放光晶格中的原子，经过一段时间的自由空间膨胀后观测相位相干性得到，或者通过高分辨成像技术观测晶格中原子的长程密度-密度关联得到；同时，对不同无序实现下原子的局域密度涨落进行分析，即可重构爱德华-安德森序参量 q_{ea} ，从而实现对超玻璃相的直接实验判定。此外，本文通过对不同温度条件下体系行为的数值模拟，发现超玻璃相在有限温度下依然保持稳定。当温度满足在 $T \leq t$ ，体系中仍可观测到清晰的超玻璃特征，表明该相对热涨落具有一定的鲁棒性，提高了实验制备超玻璃相的可行性。基于本文的理论研究，后续实验上面临的一个挑战在于超玻璃相基态的绝热制备问题。由于玻璃态动力学极其缓慢，因此，探索有效的态制备过程并研究其动力学演化与优化，将成为实现和操控超玻璃相的关键前沿课题。

参考文献

- [1] Brody T A, Flores J, French J B, Mello P A, Pandey A, Wong S S M 1981 *Rev. Mod. Phys.* **53** 385
- [2] Vavilov M G, Larkin A I 2003 *Phys. Rev. B* **67** 115335
- [3] Borgonovi F, Izrailev F M, Santos L F, Zelevinsky V G 2016 *Phys. Rep.* **626** 1
- [4] Šuntajs J, Bonča J, Prosen T, Vidmar L 2020 *Phys. Rev. E* **102** 062144
- [5] Das A K, Cianci C, Cabral D G A, Zarate-Herrada D A, Pinney P, Pilatowsky-Cameo S, Matsoukas-Roubéas A S, Batista V S, del Campo A, Torres-Herrera E J, Santos L F 2025 *Phys. Rev. Res.* **7** 013181
- [6] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
- [7] Giamarchi T, Schulz H J 1988 *Phys. Rev. B* **37** 325

- [8] Choi J, Hild S, Zeiher J, Schauss P, Rubio-Abadal A, Yefsah T, Khemani V, Huse D A, Bloch I, Gross C 2016 *Science* **352** 1547
- [9] Smith J, Lee A, Richerme P, Neyenhuis B, Hess P W, Hauke P, Heyl M, Huse D A, Monroe C 2016 *Nat. Phys.* **12** 907
- [10] Abanin D A, Altman E, Bloch I, Serbyn M 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 021001
- [11] Rispoli M, Lukin A, Schittko R, Kim S, Tai M E, Léonard J, Greiner M 2019 *Nature* **573** 385
- [12] Yu R, Yin L, Sullivan N S, Xia J S, Huan C, Paduan-Filho A, Oliveira Jr N F, Haas S, Steppke A, Miclea C F, Weickert F, Movshovich R, Mun E D, Scott B L, Zapf V S, Roscilde T 2012 *Nature* **489** 379
- [13] Fisher M P A, Weichman P B, Grinstein G, Fisher D S 1989 *Phys. Rev. B* **40** 546
- [14] Yao H P, Giamarchi T, Sanchez-Palencia L 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 060401
- [15] Thomson S J, Walker L S, Harte T L, Bruce G D 2016 *Phys. Rev. A* **94** 051601
- [16] Yu X Q, Müller M 2012 *Phys. Rev. B* **85** 104205
- [17] Hertkorn J, Schmidt J N, Guo M, Böttcher F, Ng K S H, Graham S D, Uerlings P, Langen T, Zwierlein M, Pfau T 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 033125
- [18] Ostermann S, Walther V, Yelin S F 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** 023074
- [19] Greiner M, Mandel O, Esslinger T, Hänsch T W, Bloch I 2002 *Nature* **415** 39
- [20] Fallani L, Lye J E, Guarrera V, Fort C, Inguscio M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 130404
- [21] Yu J C, Bhave S, Reeve L, Song B, Schneider U 2024 *Nature* **633** 338
- [22] Meldgin C, Ray U, Russ P, Chen D, Ceperley D M, DeMarco B 2016 *Nat. Phys.* **12** 646
- [23] Wessel S, Troyer M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 127205
- [24] Baier S, Mark M J, Petter D, Aikawa K, Chomaz L, Cai Z, Baranov M, Zoller P, Ferlaino F 2016 *Science* **352** 201
- [25] Kottmann K, Haller A, Acín A, Astrakharchik G E, Lewenstein M 2021 *Phys. Rev. B* **104** 174514
- [26] Boninsegni M, Prokof'ev N, Svistunov B 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 105301
- [27] Biroli G, Chamon C, Zamponi F 2008 *Phys. Rev. B* **78** 224306
- [28] Hunt B, Pratt E, Gadagkar V, Yamashita M, Balatsky A V, Davis J C 2009 *Science* **324** 632
- [29] Tam K M, Geraedts S, Inglis S, Gingras M J P, Melko R G 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 215301
- [30] Larson D, Kao Y J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 157202
- [31] Piekarska A M, Kopeć T K 2022 *Phys. Rev. B* **105** 174203
- [32] Angelone A, Mezzacapo F, Pupillo G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 135303
- [33] Todo S, Kato K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 047203
- [34] Rossini D, Fazio R 2012 *New J. Phys.* **14** 065012
- [35] Weckesser P, Srakaew K, Blatz T, Wei D, Adler D, Agrawal S, Bohrdt A, Bloch I, Zeiher J 2025 *Science* **390** 849
- [36] Anderson S E, Younge K C, Raithel G 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 263001
- [37] Tanzi L, Rocuzzo S M, Lucioni E, Famà F, Fioretti A, Gabbanini C, Modugno G, Recati A, Stringari S 2019 *Nature* **574** 382
- [38] Bakr W S, Gillen J I, Peng A, Fölling S, Greiner M 2009 *Nature* **462** 74
- [39] Gross C, Bakr W S 2021 *Nat. Phys.* **17** 1316

Superglass Phase of Hard-Core Bosons on a Disordered Triangular Lattice*

WU Feifei¹⁾²⁾ ZUO Xianda¹⁾²⁾ ZHU Qingqing¹⁾²⁾ DAI Hanning^{1)2)3)†}

1) (*Hefei National Research Center for Physical Sciences at the Microscale, School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

2) (*Shanghai Research Center for Quantum Science, CAS Center for Excellence in Quantum Information and Quantum Physics, University of Science and Technology of China, Shanghai 201315, China*)

3) (*Hefei National Laboratory, Hefei 230088, China*)

Abstract

The competition between strong interactions and disorder can fundamentally alter the ground-state landscape of quantum many-body systems, leading to exotic phases that transcend the conventional dichotomy of order and disorder. In this work, we systematically investigate the ground-state properties of hard-core bosons with nearest-neighbor repulsive interactions on a two-dimensional triangular lattice in the presence of a random on-site chemical potential—a paradigmatic model of diagonal disorder. Using large-scale path-integral Monte Carlo simulations combined with the worm algorithm, we numerically study the system at finite temperature and extract key observables: the superfluid density (characterizing phase coherence and superfluidity, ρ_s), the Edwards-Anderson order parameter (quantifying glassy behavior via frozen local density fluctuations, q_{ea}), and the static structure factor (probing crystalline order, $S(\mathbf{k})$). Our simulations are performed on lattices of linear size up to $L=24$, with careful averaging over up to 300 independent Monte Carlo runs and 10 distinct disorder realizations to ensure statistical convergence and to mitigate finite-size effects.

Our results reveal that, for moderate disorder strengths Δ and at low temperature $T = 0.2t$, the system stabilizes into a superglass phase—a simultaneous manifestation of superfluidity and glassiness without any accompanying crystalline order. Specifically, for average chemical potentials $\mu_0/V = 3.0$ and 6.0 , and for $t/V = 0.1$, we find a parameter window $\Delta \approx 0.1V$ to $0.4V$ where $\rho_s > 0$ and $q_{ea} > 0$ coexist, while $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max}$ remains vanishingly small. This coexistence is robust against finite-size scaling: as system size increases, $\overline{S(\mathbf{k})}^{\max}$ decays to zero, whereas both $\overline{\rho}_s$ and q_{ea} converge to finite values, confirming the thermodynamic stability of the superglass phase. In contrast, for $\mu_0/V = 4.5$ (where the clean system is a solid phase), increasing disorder only leads to a conventional Bose glass phase with $q_{ea} > 0$ but $\overline{\rho}_s = 0$. Furthermore, we map out the low-temperature $t - \mu$ phase diagram at fixed $\Delta = 0.25V$, identifying regions of superfluid, Bose glass, and superglass phases. Notably, the superglass

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2023YFC2206200), the Shanghai Municipal Science and Technology Major Project, China (Grant No. 2019SHZDZX01), and the Innovation Program for Quantum Science and Technology, China (Grant No. 2021ZD0302002).

† Corresponding author. E-mail: daihan@ustc.edu.cn
The First Author. E-mail: feifeiwu@mail.ustc.edu.cn

emerges in a finite window of intermediate interaction strengths $V \approx 6 - 10t$, bridging the superfluid and Bose glass regimes. Finite-temperature simulations show that the superglass phase is remarkably robust against thermal fluctuations: the Edwards-Anderson order parameter remains nearly constant for temperatures up to $T \lesssim t$, and a finite superfluid response persists as long as $T \lesssim t$. This thermal stability makes the superglass phase experimentally accessible in state-of-the-art ultracold-atom setups. This work provides the first demonstration that a stable superglass phase exists in a hard-core boson system with only diagonal (chemical potential) disorder on a geometrically frustrated triangular lattice—without requiring off-diagonal disorder or random interactions. Our findings significantly expand the parameter space for realizing superglass phases and establish a concrete, experimentally friendly platform for their observation, thereby bridging a critical gap between theoretical prediction and laboratory realization.

Keywords: Triangular Lattice, Disorder, Superglass, Hard-core Boson

录用稿件，非最终出版稿