

李黄杨修正下自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚系统的基态性质*

吴季瑄 陈园园†

(上海大学理学院, 上海 200444)

(2026 年 2 月 10 日收到; 2026 年 3 月 5 日收到修改稿)

在自旋-轨道耦合自旋-1/2 的玻色-爱因斯坦凝聚体中引入李黄杨 (LHY) 修正, 系统哈密顿量中出现新的相互作用项, 利用变分法求解系统基态, 并得到相边界和三相点. 通过量子相图发现 LHY 相互作用对基态相具有明显的调制作用, 条纹相区域明显变大, 平面波相减小, 并出现两种零动量相, 由此系统中出现了新的三相点. 在 LHY 作用下, 条纹相还可以出现在组分内相互作用小于组分间相互作用的系统中, 这在平均场理论下是没有出现的. 研究表明, 李黄杨相互作用可以为玻色-爱因斯坦凝聚体的量子调控提供新的工具.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 自旋-轨道耦合, 李黄杨修正, 基态相**DOI:** 10.7498/aps.75.20260234**CSTR:** 32037.14.aps.75.20260234

1 引言

超冷中性原子是实现人工规范场的可靠实验平台^[1,2], 超冷原子系统中的人工规范场最初于 2009 年通过 Raman 激光实现^[3]. 以此为基础, 2011 年通过 Raman 激光耦合超冷原子的超精细能级实现了人工合成的自旋-轨道耦合 (SOC)^[4]. 自旋-轨道耦合是粒子内电子自旋与其轨道运动的一种相互作用, 不同于粒子间相互作用, 它为玻色-爱因斯坦凝聚系统的研究指出了新的方向^[5-8]. 自旋-轨道耦合改变了 BEC 系统的色散关系, 在自旋量子数为 1/2 和 1 的系统中都可以产生零动量相和非零动量量子相^[8-13], 即平面波相和条纹相, 其中条纹相的性质尤为令人感兴趣. 零动量相具有单阱能谱结构, 能量极小值位于动量零点. 非零动量相能谱具有对称的双阱或三阱结构, 平面波相只占据其中一个能量极小值, 具有非零准动量; 条纹相粒子凝聚在两个或多个能量极小值处, 其空间密度分

布呈现条纹状, 具有超固态特性^[14,15]. 实验上, 平面波相和条纹相已经在 ^{87}Rb 原子和 ^{23}Na 原子中被观察到^[16-19].

1961 年, Bogoliubov, Gross 和 Pitaevskii 提出, 在超低温的系统中, 原子气体的弱相互作用可以用平均场理论描述^[20-22]. 忽略量子涨落的影响是平均场理论中一项重要的近似行为, 大幅简化了 Gross-Pitaevskii (GP) 方程的计算和推导过程. 随着超冷原子领域研究的发展, 部分系统在使用平均场理论时发生了量子坍缩现象, 2015 年时 Petrov^[23] 提出这种坍缩现象可以被量子涨落所稳定. 这种平均场相互作用的高阶修正被称作超越平均场 (BMF) 相互作用, 由于该项的能量表达式最早于 1956 年由 Lee 等^[24] 推导得出^[25], 也被称作李黄杨 (LHY) 修正, 在实验上可以通过调节 Feshbach 共振调节实现^[26,27]. LHY 修正的形式依赖于系统维度, 它在一维是吸引的相互作用, 在二维和三维则是排斥的相互作用. LHY 相互作用与平均场相互作用的竞争使原本将要坍缩的系统达

* 国家自然科学基金 (批准号: 12374247) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: cyyuan@shu.edu.cn

到稳态, 由于该量子态的形成方式类似于水滴的形成并表现出了一定的流体性质, 因此被称作量子液滴态^[28-31]. 近年来已经有研究将 SOC 引入到量子液滴系统中^[31], 通过数值模拟得到了量子液滴的条纹相^[32-34].

目前对 LHY 相互作用的研究多集中于量子液滴系统中^[25,26,35], 本文将在自旋量子数为 1/2 的一维自旋-轨道耦合 BEC 系统中引入 LHY 相互作用, 研究其对系统基态的影响. Li 等^[8]在平均场理论下研究了自旋-1/2 的自旋-轨道耦合 BEC 系统, 发现三种基态量子相: 条纹相 (I)、平面波相 (II) 和零动量相 (III), 且条纹相仅存在于组分内相互作用大于组分间相互作用 (即 $g_{11} > g_{12}$) 的系统, 本文中 LHY 相互作用的引入会改变这一结论. 研究发现, LHY 相互作用对系统基态相会产生明显的调制, 条纹相和零动量相区域明显扩大, “替代”了原本的平面波相, 随着 LHY 相互作用的增大平面波相逐渐缩小直至消失. 相邻的相边界也发生变化, 在原有单一三相点的基础上出现了新的三相点. 同时, LHY 相互作用的引入, 使条纹相可以出现在组分内相互作用小于组分间相互作用 (即 $g_{11} < g_{12}$) 的系统中.

2 理论模型

在一个 Bose-Bose 混合物系统中, 系统哈密顿量表示为^[27]

$$H = \sum_{\sigma, \mathbf{k}} \left(\frac{k^2}{2m_\sigma} - \mu_\sigma \right) a_{\sigma, \mathbf{k}}^* a_{\sigma, \mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}} a_{\sigma, \mathbf{k}_1 + \mathbf{q}}^* a_{\sigma', \mathbf{k}_2 - \mathbf{q}}^* \times U_{\sigma\sigma'}(\mathbf{q}) a_{\sigma, \mathbf{k}_1} a_{\sigma', \mathbf{k}_2}, \quad (1)$$

式中, $\mathbf{k}$ 为粒子的动量 ($\mathbf{k} = -\mathbf{q}, 0, \mathbf{q}$); m_σ 为组分 σ 粒子的质量 ($\sigma = 1, 2$); μ_σ 为组分 σ 粒子的化学势; a^* 和 a 为系统中粒子的产生、湮灭算符; $U_{\sigma\sigma'}$ 为组分 σ 粒子与组分 σ' 粒子之间的相互作用势, 在平均场近似下该相互作用势为 δ 势: $U_{\sigma\sigma'}(\mathbf{q}) = g_{\sigma\sigma'}\delta(0)$. 根据平均场理论, 基态系统中仅考虑 $k = 0$ 的粒子, (1) 式中第二项的相互作用能量可以被化简为

$$H_{\text{MF}} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} g_{\sigma\sigma'} n_\sigma n_{\sigma'}, \quad (2)$$

式中, $g_{\sigma\sigma'}$ 为组分 σ 粒子与组分 σ' 粒子之间的相互

作用, 定义 g_{11} 和 g_{22} 分别为各组分的组分内粒子相互作用, g_{12} 为组分间粒子相互作用, 本文仅考虑相互作用自旋对称的情况, 即 $g_{11} = g_{22}$. 在平均场近似下, (2) 式忽略了相互作用的高阶项, 即量子涨落效应, 在通常情况下这种近似是合理的. 但当组分间吸引力大于组分内排斥力的几何平均值 (即 $g_{12}^2 > g_{11}g_{22}$) 时将发生 BEC 坍塌, 而量子涨落效应可以使系统重新稳定^[23], 这种高阶的相互作用也被称为 LHY 相互作用, 它具有强维度依赖性, 不同维度下系统非线性相互作用分别表示为^[24]

$$H_{\text{non}}(\psi) = \begin{cases} |\psi|^2\psi - |\psi|\psi, & 1\text{D}, \\ \ln(|\psi|^2) |\psi|^2\psi, & 2\text{D}, \\ g_1 |\psi|^2\psi + |\psi|^3\psi, & 3\text{D}, \end{cases} \quad (3)$$

式中, ψ 为系统波函数; g_1 为平均场相互作用系数, 可以为正数也可以为负数, 其符号不对 LHY 相互作用产生影响.

本文仅考虑一维系统, LHY 项的引入会产生新的系统能量:

$$E_{\text{LHY}} = \sum_{\sigma} -\frac{2}{3} \pi g_L (n_\sigma)^{3/2}, \quad (4)$$

式中, g_L 为 LHY 相互作用系数, n_σ 为组分 σ 的粒子数密度.

在一维自旋 1/2 的 BEC 系统中, 可以通过拉曼激光耦合原子内的两个超精细能级实现自旋-轨道耦合, 系统中粒子受自旋-轨道耦合以及拉曼耦合的影响, 单粒子哈密顿量表示为

$$h_0 = \frac{1}{2} (p_x - k_0 \sigma_z)^2 + \frac{\Omega}{2} \sigma_x, \quad (5)$$

式中, k_0 为自旋-轨道耦合强度, 代表两束 Raman 激光之间的动量转移; Ω 为 Raman 耦合常数, 在 LHY 相互作用下 BEC 系统的能量泛函表示为

$$E(\psi_1, \psi_2) = \int d\mathbf{r} \left[(\psi_1^*, \psi_2^*) h_0 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \frac{g_{11}}{2} |\psi_1|^4 + \frac{g_{22}}{2} |\psi_2|^4 + g_{12} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 - \frac{g_L^{3/2}}{2\pi} \sqrt{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) \right]. \quad (6)$$

(6) 式中 ψ_i ($i = 1, 2$) 为组分 i 的波函数, 右侧最后一项为 LHY 非线性相互作用项, 当 $g_L = 0$ 时该系统与 Li 等^[8]的系统一致. 本文公式均已做无量纲

化处理, 长度、动量与能量的单位分别为 $1/k_r$, $\hbar k_r$ 和 $\hbar^2 k_r^2/2m$, 其中 k_r 为拉曼激光的波数, 为简化处理, 规定 $\hbar = m = 1$.

基于 (6) 式的能量泛函, 系统的基态波函数可以通过变分法求解, 拟设系统旋量波函数:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{N}{V}} \left[C_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} e^{ik_1 x} + C_2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} e^{-ik_1 x} \right], \quad (7)$$

式中, N 为总粒子数, V 为系统体积, 定义系统粒子数密度 $n = N/V$; 变分参数 k_1 代表动量. 通过能量极小化可以得到变分参数 C_1 , C_2 , k_1 , θ 的值. 由归一化条件 $\sum_i \int |\psi_i|^2 dr = N$ 可知 $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$. 对能量关于 θ 求偏导可得 $\theta = \arccos(k_1/k_0)/2$. 各参数确定后, 可以求得序参量 $\langle \sigma_z \rangle = \frac{k_1}{k_0} (|C_1|^2 - |C_2|^2)$ 用以表征系统基态. 将拟设波函数代入能量泛函 (6) 式中, 得到系统中每个粒子的能量密度 $\varepsilon = E/N$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{k_0^2}{2} - \frac{\Omega}{2k_0} \sqrt{k_0^2 - k_1^2} - F(\beta) \frac{k_1^2}{2k_0^2} + G_1(1+2\beta) \\ & - \sqrt{n}G_L \left(\frac{3}{4}\beta K + \frac{9}{64}\beta^2 K^2 + \frac{35}{256}\beta^3 K^3 + 1 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

为简化表达, 式中进行了变量代换: $\beta = |C_1|^2|C_2|^2$ ($0 \leq \beta \leq 1/4$), 定义参数 $G_1 = n(g_{11} + g_{12})/4$, $G_2 = n(g_{11} - g_{12})/4$, 函数 $F(\beta)$ 表示为 $F(\beta) = (k_0^2 - 2G_2) + 4(G_1 + 2G_2)\beta$, $K = (k_0^2 - k_1^2)/k_0^2$, $G_L = g_L^2/2\pi$. (8) 式中最后一项代表了 LHY 相互作用能量, 当 $g_L = 0$ 时, (8) 式即为平均场理论下的系统能量 [8].

接下来对能量进行极小化, 可以得到基态波函数, 对 (8) 式关于 k_1 , β 求一阶导数:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial k_1} = \frac{k_1}{k_0} \left[\frac{\Omega}{2\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} - \frac{F(\beta)}{k_0} + \frac{3\beta}{2k_0} \sqrt{n}G_L \right], \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta} = & 2G_1 - \frac{2k_1^2}{k_0^2} (G_1 + 2G_2) - G_L \sqrt{n} \\ & \times \left(\frac{3}{4}K + \frac{9}{32}\beta K^2 + \frac{105}{256}\beta^2 K^3 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

当 $k_1 = 0$ 时, (9) 式为 0, 此时能量为极小值, 系统处于零动量相. (10) 式中, $\partial \varepsilon / \partial \beta$ 的值与 LHY 相互作用系数 g_L 相关. $g_L = 0$ 时有 $\partial \varepsilon / \partial \beta$ 始终大于零, 零动量相只能出现在 $\beta = 0$ (即零动量

相 III(0)); 但引入 LHY 项后, 当 g_L 较大时 $\partial \varepsilon / \partial \beta$ 会出现负值, 系统会在 $\beta = 1/4$ 时出现基态零动量相, 这是新的零动量相, 表示为相 III(1/4).

当 $k_1 \neq 0$ 时, 求解 (9) 式零点可得, k_1 满足:

$$k_1^2 = k_0^2 \left\{ 1 - \Omega^2 [F(\beta) - 3\sqrt{n}G_L/2]^2 / 4 \right\}. \quad (11)$$

即当 $F(\beta) - 3\sqrt{n}G_L/2 > \Omega/2$ 时, 系统能量处于极值点, 且此时有 $\partial^2 \varepsilon / \partial \beta^2 = -G_L \sqrt{n} (9K^2/32 + 105\beta K^3/256) < 0$, 能量的最小值会出现在 β 的边界处. 由 $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$ 可知 $\beta \in [0, 1/4]$. 当 $\beta = 0$ 时, $|C_1| = 0$ 或 $|C_2| = 0$, 动量 $k_1 \neq 0$, 系统波函数由 $k_1 > 0$ 或 $k_1 < 0$ 的平面波 $e^{ik_1 x}$ 表示, 即粒子处于平面波相 (相 II). 当 $\beta = 1/4$ 时, $|C_1| = |C_2| = \sqrt{2}/2$, 此时系统波函数为两个平面波 $e^{\pm ik_1 x}$ 的线性叠加, 系统中粒子密度呈现出条纹状分布, 即系统处于条纹相 (相 I).

在 Li 等 [8] 的报道中, 当 $\beta = 1/4$ 时, 系统仅存在条纹相, 而 LHY 相互作用的引入使 $\beta = 1/4$ 时, 系统也可以存在零动量相, 从而系统的基态性质和相变也会发生变化, 通过能量极小化确定系统基态波函数, 可以得到不同基态对应的能量表达式. 首先考虑 $k_1 \neq 0$ 的情况, 条纹相与平面波相的能量表达式分别为

$$\varepsilon_I = -\frac{\Omega^2}{8 \left(k_0^2 + G_1 - \frac{3}{8}\sqrt{n}G_L \right)} + G_1 - \sqrt{n}G_L, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{II} = -\frac{\Omega^2}{8(k_0^2 - 2G_2)} + G_1 + G_2 - \sqrt{n}G_L. \quad (13)$$

对于零动量相, 当 $\beta = 0$ 时, 其能量表达式为

$$\varepsilon_{III} = \frac{k_0^2}{2} - \frac{\Omega}{2} + G_1 - \sqrt{n}G_L. \quad (14)$$

当 $\beta = 1/4$ 时, 零动量相的能量表达式为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{III}^* = & \frac{k_0^2}{2} - \frac{\Omega}{2} + \frac{3}{2}G_1 - \frac{1}{16}\sqrt{n}G_L \left(3K + \frac{9}{64}K^2 \right. \\ & \left. + \frac{35}{1024}K^3 + 16 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式描述的零动量相仅存在于 $g_L \neq 0$ 的系统中.

两种零动量相的存在, 使得系统基态相变的情况变得复杂. 通过调节 Raman 耦合强度可以实现不同的量子相, 因此采用 Ω 表征系统基态相之间的相变, 首先考虑零动量相 III(0) 与其他相的相变条件:

$$\Omega_{\text{I-II}} = 2 \sqrt{(k_0^2 - 2G_2) \left(k_0^2 + G_1 - \frac{3}{8} \sqrt{n} G_L \right) \frac{2G_2}{G_1 + 2G_2 - \frac{3}{8} \sqrt{n} G_L}}, \quad (16)$$

$$\Omega_{\text{II-III}} = 2 (k_0^2 - 2G_2), \quad (17)$$

$$\Omega_{\text{I-III}} = 2 \left(k_0^2 + G_1 - \frac{3}{8} \sqrt{n} G_L \right) - 2 \sqrt{\left(G_1 - \frac{3}{8} \sqrt{n} G_L \right) \left(k_0^2 + G_1 - \frac{3}{8} \sqrt{n} G_L \right)}. \quad (18)$$

(16) 式—(18) 式分别定义了相邻量子相的相边界, 三式相等时, 系统出现三相点, 即满足条件:

$$k_0^2 = 4G_2 + 4G_2^2 / \left(G_1 - \frac{3}{8} \sqrt{n} G_L \right). \quad (19)$$

零动量相 III(1/4) 与平面波相和条纹相的相边界为

$$\Omega_{\text{II-III}}^* = 2 (k_0^2 - 2G_2) - \frac{1}{2} \sqrt{(k_0^2 - 2G_2) (X - 32\sqrt{n} G_L - 16G_1)}, \quad (20)$$

$$\Omega_{\text{I-III}}^* = 2 \left(k_0^2 + G_1 - \frac{3}{8} \sqrt{n} G_L \right) - \frac{1}{2} \sqrt{(38\sqrt{n} G_L + X) \left(k_0^2 + G_1 - \frac{3}{8} \sqrt{n} G_L \right)}, \quad (21)$$

式中, $X = 2\sqrt{n} G_L \left(3K + \frac{9}{64} K^2 + \frac{35}{1024} K^3 + 16 \right)$. 由此得到新的三相点, 满足下式:

$$2\sqrt{k_0^2 - 2G_2} - \frac{1}{2} \sqrt{X - 16G_1} = 2 \sqrt{\left(k_0^2 + G_1 - \frac{3}{8} \sqrt{n} G_L \right) \frac{2G_2}{G_1 + 2G_2 - \frac{3}{8} \sqrt{n} G_L}}. \quad (22)$$

系统的三相点可以由粒子数密度 n 表征, (19) 式给出了零动量相 III(0) 边界处的三相点方程, (22) 式给出了零动量相 III(1/4) 边界处的三相点方程. 根据文献 [8] 的结论, 在 $g_L = 0$ 且 $G_2 > 0$ 的系统中仅存在一个三相点, 对应临界粒子数密度 n_c , 可以通过关系式 $\Omega^{\text{I-II}} = \Omega^{\text{II-III}}$ 求解, 在本文中称为基础三相点. 经数值计算, (19) 式和 (22) 式可以得到多个数值解, 经筛选后得到满足系统基态三相点的解, 如图 1 所示. 图中纵坐标为三相点对应的系统粒子数密度, 利用平均场框架下三相点的临界粒子数密度 n_c 做归一化, 可以更明显地对比出 LHY 相互作用的影响. 当 $g_L = 0$ 时, 系统中只有一个基础三相点, 图 1 中绿色实心五角星所示, 此时系统相图如图 2(a) 所示. 随着 g_L 的增大, 基础三相点位置逐渐减小 (图 1 中绿色空心五角星), 此三相点为条纹相、平面波相和零动量相 III(0) 的边界点, 由 (19) 式计算得到. 当 $g_L \geq 2$ 时, 系统开始出现零动量相 III(1/4), 也产生了新的三相点, 即条纹相、平面波相、零动量相 III(1/4) 的边界点 (图中红色圆圈), 由 (22) 式求解得到. 当 $g_L \geq 4$ 时, 由于条纹相、平面波相区域的变化, 在零动量相 III(0) 边界上会出现新的三相点 (图中紫色三角形), 由 (19) 式计算得到.

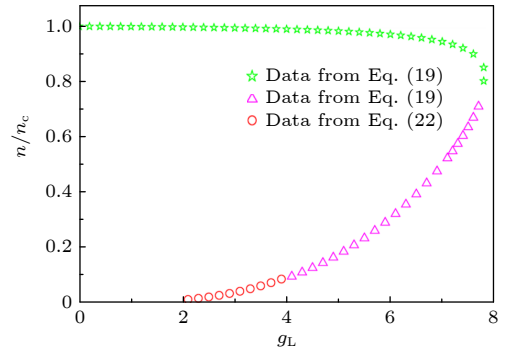


图 1 系统三相点随 LHY 相互作用系数变化的数值计算结果. 图中绿色五角星和紫色三角形为 (19) 式的数值结果, 红色圆圈为 (22) 式的数值结果. 图中参数 $g_{11} = 0.525$, $g_{12} = 0.5$, $n_c \approx 37.5$

Fig. 1. Numerical results of the tricritical points of the system as a function of the LHY interaction coefficient g_L . The green pentagrams and purple triangles represent the numerical results of Eq. (19), and the red circles represent the numerical results of Eq. (22). The parameters are set as $g_{11} = 0.525$, $g_{12} = 0.5$, $n_c \approx 37.5$.

在平均场框架下, 条纹相只存在于 $G_2 > 0$ (即 $g_{11} > g_{12}$) 的系统, 因为当 $G_2 < 0$ 时 (10) 式恒为正数, ε 仅在 $\beta = 0$ 时存在两个极小值解, C_1 , C_2 不能同时为非零值, 因此系统中不存在条纹相. 但 LHY 相互作用的引入使 $\partial\varepsilon/\partial\beta$ 的结果发生改变, 使条纹相可以出现在 $G_2 < 0$ 的系统中, 在第 3 节中, 将通过系统基态相图做详细分析.

3 结果与分析

第2节详细分析了LHY相互作用下一维自旋 $-1/2$ 的自旋-轨道耦合BEC系统的理论模型,在LHY相互作用强度 g_L 较小时,对系统产生的影响有限,随着 g_L 的增大,LHY相互作用将对系统的三个基态相产生明显的调制作用,接下来将分别研究 $G_2 > 0$ 和 $G_2 < 0$ 两种非线性条件下系统的基态相图。

3.1 $G_2 > 0$ 系统的基态相图

对(8)式做能量极小化,可以得到基态波函数中的动量 k_1 。条纹相 I: 系统具有两个不为零的动

量 $\pm k_1$ ($k_1 \neq 0$); 平面波相 II: 动量取 $+k_1$ 或 $-k_1$ ($k_1 \neq 0$); 零动量相 III: 系统动量为零,即 $k_1 = 0$ 。接下来,将利用动量 k_1 及极化强度 $\langle \sigma_z \rangle$ 为序参量绘制基态相图和相边界。先研究 $G_2 > 0$ (即 $g_{11} > g_{12}$) 的系统。

图2给出了LHY相互作用系数分别为0, 3.5, 5.5, 7时系统的相图,图中白色实线为相邻量子相的相边界。第2节的研究提到当 $g_L \geq 2$ 时,系统中会出现 $\beta = 1/4$ 的零动量相,即相III(1/4),图中用白色虚线标出了相III(1/4)和相III(0)的边界线。图2(a)即为平均场框架下的结果,图中只有一个基础三相点(绿色实心五角星)。随着LHY相互作用的增大,条纹相、平面波相和零动量相的区域发

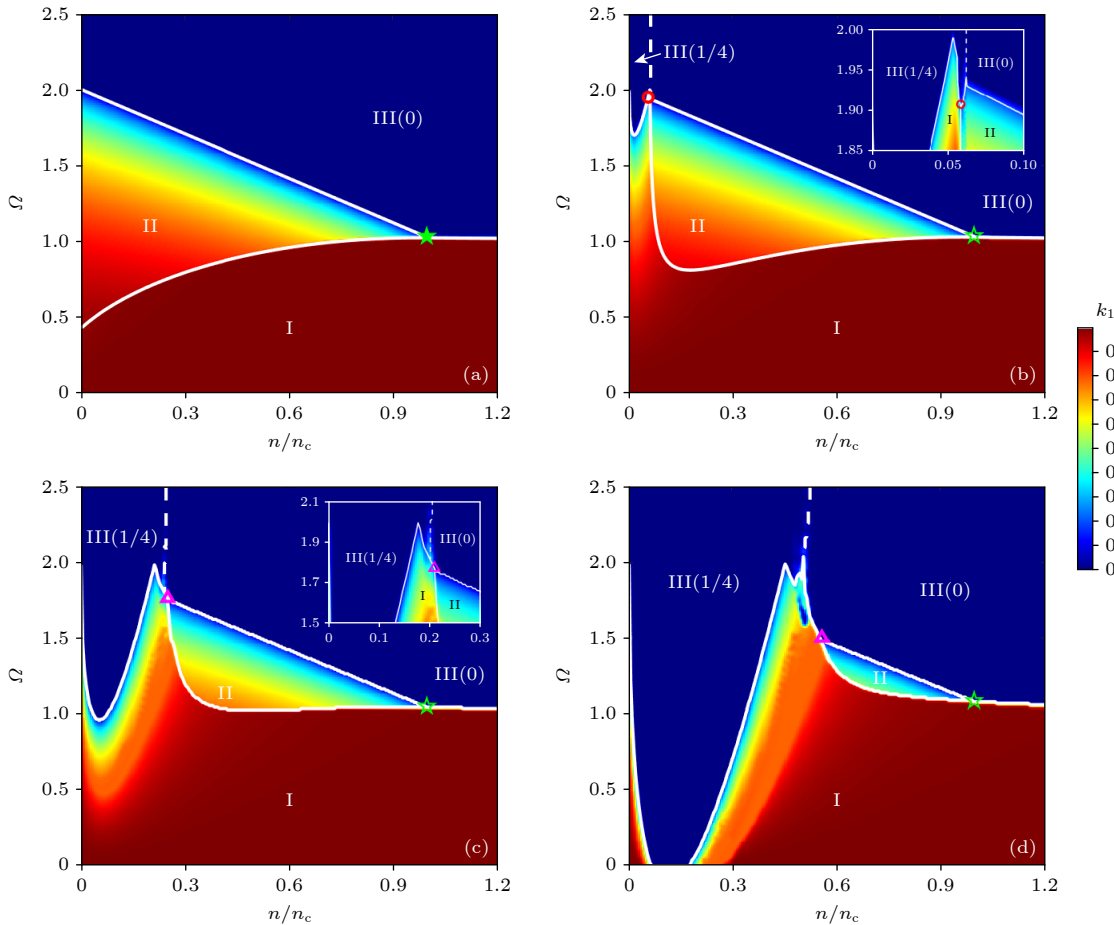


图2 不同LHY相互作用下,自旋-轨道耦合BEC系统的基态相图 (a) $g_L = 0$; (b) $g_L = 3.5$; (c) $g_L = 5.5$; (d) $g_L = 7$. 图中序参量为动量 k_1 , n_c 为平均场近似下三相点的粒子数密度。相I为条纹相,相II为平面波相,相III为零动量相。图中白色实线为相邻量子相边界,白色虚线为 $\beta = 0$ 和 $\beta = 1/4$ 零动量相的分界线。其他参数: $g_{11} = 0.525$, $g_{12} = 0.5$, $n_c \approx 37.5$

Fig. 2. Ground-state phase diagrams of the spin-orbit-coupled BEC system under different LHY interaction strengths. The order parameter is the momentum k_1 , and n_c denotes the critical particle density at the tricritical point within the mean-field approximation. Phase I corresponds to the stripe phase, Phase II to the plane-wave phase, and Phase III to the zero-momentum phase. The white solid lines indicate boundaries between adjacent quantum phases, while the white dashed line marks the division between the $\beta = 0$ and $\beta = 1/4$ zero-momentum phases. The panels correspond to different LHY interaction strengths: (a) $g_L = 0$; (b) $g_L = 3.5$; (c) $g_L = 5.5$; (d) $g_L = 7$. Other parameters: $g_{11} = 0.525$, $g_{12} = 0.5$ and $n_c \approx 37.5$.

生明显变化, 在图 2(b) 中条纹相进入到平面波相的左侧区域和零动量相 III(1/4) 相接, 形成了新的三相点, 如图中红色圆圈所示, 该点的位置与 (22) 式数值计算的结果一致. 当 $g_L = 5.5$ 时, 条纹相进入到零动量相 III(0) 区域, 和平面波相边界构成了新的三相点, 如图 2(c) 中紫色三角形所示, 该点的位置与 (19) 式数值计算的结果一致. 图 2(c) 中在 LHY 相互作用下, 条纹相占据了原平面波相的部分区域, 而零动量相 III(1/4) 也占据了部分条纹相区域, 形成了零动量相、条纹相、平面波相连续分布的状态, 这也提供了一种更方便调控相变的手段, 即通过改变粒子数密度就可以实现. 随着 LHY 项的持续增大, 平面波相区域会迅速减小, 如图 2(d) 中所示. 当 g_L 接近 8 时, 平面波相消失. 图中绿色五角星为基础三相点, 在平均场理论下也存在, 受 LHY 相互作用影响不大, 只是随着 g_L 的增

大, 向粒子数密度减小的方向略有移动. 图 2 中各三相点与图 1 数值计算的结果一致.

接下来, 综合考虑多种相互作用对系统基态的影响, 图 3 给出了组分间相互作用 g_{12} 固定, 系统随组分内相互作用 g_{11} 变化的相图. 图 3(a) 中无 LHY 相互作用, 当 $g_{11} < g_{12}$ 时系统只存在平面波相; 当 $g_{11} > g_{12}$ 时系统存在条纹相和零动量相, 三相点对应于 $\Omega = 1$ 处. 图 3(b) 考虑 LHY 相互作用 $g_L = 7.5$, 条纹相区域明显扩大, 向上进入到原零动量相区域, 并且有向左扩展到原平面波相区域的趋势, 图中三相点位置明显上移.

3.2 $G_2 < 0$ 系统的基态相图

前面提到在平均场近似下, $G_2 < 0$ 系统中只存在平面波相和零动量相^[8], 如图 4(a) 所示. 在 $G_2 > 0$ 系统中, LHY 相互作用的引入明显改变了

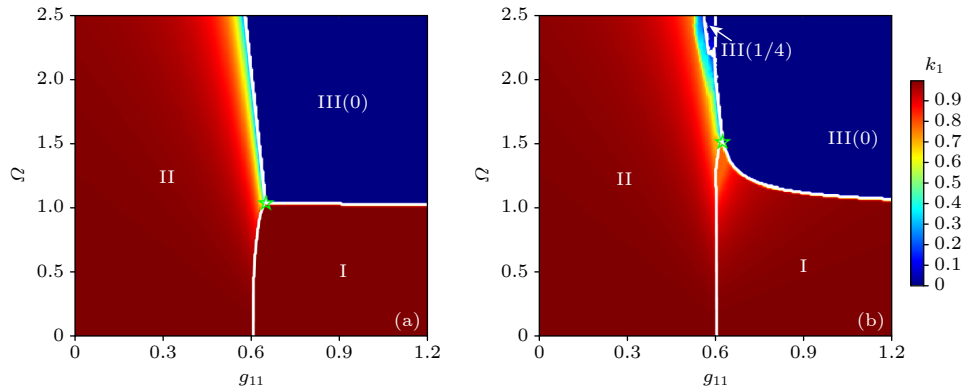


图 3 多种相互作用对系统基态相图的影响 (a) $g_L = 0$; (b) $g_L = 7.5$. 其他参数: $g_{12} = 0.5$, $n = 25$

Fig. 3. Effects of multiple interactions on the ground-state phase of the system: (a) $g_L = 0$; (b) $g_L = 7.5$. The other parameters are fixed as $g_{12} = 0.5$, $n = 25$.

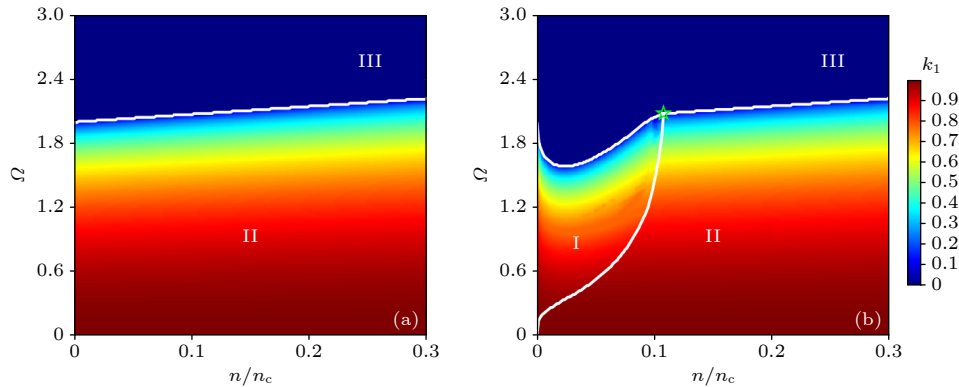


图 4 自旋-轨道耦合 BEC 系统随粒子数密度变化的基态相图 (a) $g_L = 0$; (b) $g_L = 4$. 图中白色实线为相邻量子相边界. 其他参数: $g_{11} = 0.48$, $g_{12} = 0.5$, $n_c \approx 37.5$

Fig. 4. Ground-state phase diagrams of the spin-orbit-coupled BEC system as a function of particle density. The white solid lines indicate boundaries between adjacent quantum phases. Panels (a) and (b) correspond to LHY interaction strengths of $g_L = 0$ and $g_L = 4$, respectively. Other parameters are $g_{11} = 0.48$, $g_{12} = 0.5$, $n_c \approx 37.5$.

基态相的分布区域, 条纹相区域明显增大, 占据了部分平面波相或零动量相的区域. 在 $G_2 < 0$ 的系统中, LHY 项也会产生类似的影响, 如图 4(b) 所示. 在图 4(a) 中, 系统中的粒子数密度不影响基态相的分布, 但考虑 LHY 相互作用后, 在粒子数密度较小时, 系统出现了条纹相, 随着粒子数密度的增加, 条纹相转变为平面波相, 图中绿色五角星为系统三相点, 该三相点位置与 (19) 式数值计算结果一致. 图 5 还给出了 $G_2 < 0$ 系统三相点的数值计算结果, 随着 LHY 相互作用的增加, 三相点向粒子数密度增大的方向移动, 和系统相图变化一致. 在平均场框架下, $G_2 < 0$ 系统中没有三相点, 图 4、图 5 中横轴粒子数密度仍利用 $G_2 > 0$ 的临界粒子数密度 n_c 做归一化. LHY 相互作用的引入, 使 $G_2 < 0$ 系统出现了条纹相, 可以认为 LHY 相互作用对组分内相互作用产生了一定的补偿, 等效于 $G_2 > 0$ 的系统. 并且当粒子数密度较小时, 调节拉曼耦合强度, 系统可以出现平面波相、条纹相和零动量相的连续相变, 这为 BEC 系统的相变提供了更丰富的调控手段.

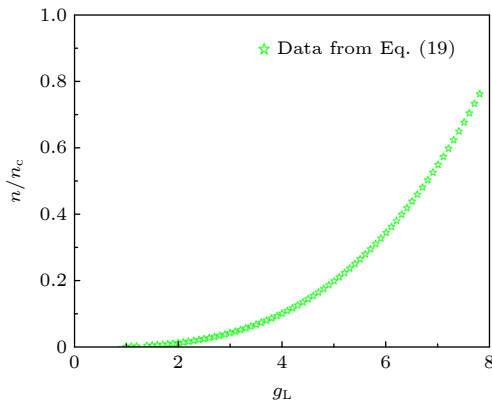


图 5 系统三相点随 LHY 相互作用系数变化的数值计算结果. 图中绿色五角星为 (19) 式的数值结果. 图中参数 $g_{11} = 0.48$, $g_{12} = 0.5$, $n_c \approx 37.5$

Fig. 5. Numerical results of the tricritical points of the system as a function of the LHY interaction coefficient. The green pentagrams represent the numerical results of Eq. (19). $g_{11} = 0.48$, $g_{12} = 0.5$, $n_c \approx 37.5$.

接下来, 综合考虑多种相互作用对 $G_2 < 0$ 系统基态的影响, 图 6 给出了不同组分内相互作用强度下, 系统基态随 LHY 相互作用的变化. 调节 LHY 作用的强度, 系统会出现从平面波相、条纹相到零动量相的连续量子相变, 且组分内相互作用 g_{11} 和组分间相互作用 g_{12} 差值越小, 条纹相区域越大.

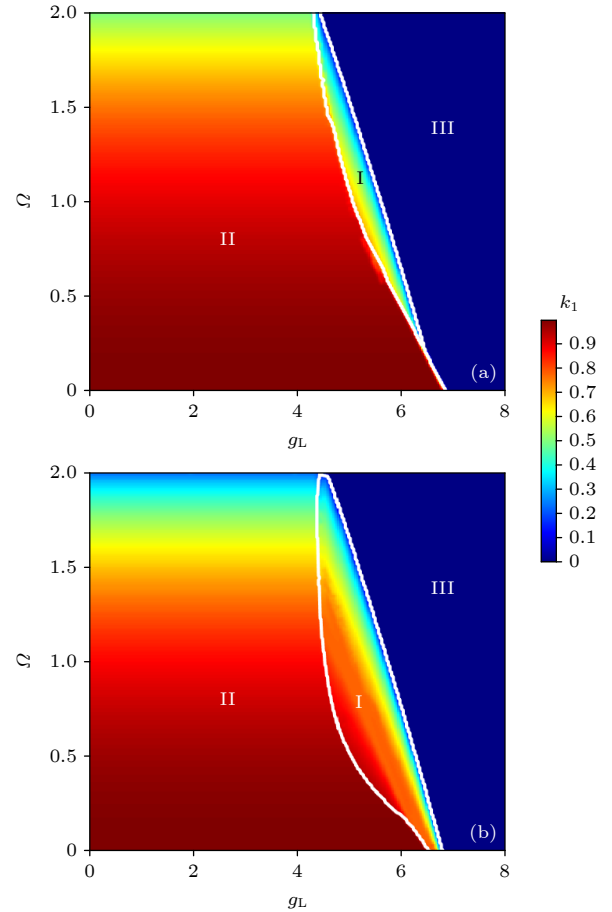


图 6 自旋-轨道耦合 BEC 系统随 LHY 相互作用变化的基态相图 (a) $g_{11} = 0.44$; (b) $g_{11} = 0.49$. 其他参数: $g_{12} = 0.5$, $n = 5$

Fig. 6. Ground-state phase diagrams of the spin-orbit-coupled BEC system as a function of the LHY interaction strength: (a) $g_{11} = 0.44$; (b) $g_{11} = 0.49$. The other parameters: $g_{12} = 0.5$, $n = 5$.

4 结 论

基于平均场框架, 在一维自旋-1/2 的自旋-轨道耦合 BEC 系统中引入李黄杨高阶修正, 研究了系统的基态量子相和其相变行为. LHY 修正在 GP 方程中引入了新的非线性相互作用项, 通过变分法拟设波函数得到系统能量, 进而得到了量子相边界和三相点满足的方程. LHY 相互作用使零动量相分成两种, 条纹相、平面波相区域也明显调制. 量子相区域的改变使系统中可以同时出现两个三相点, 并可以通过调节粒子数密度、拉曼耦合强度和 LHY 相互作用等多种手段实现连续的量子相变. LHY 相互作用也使 $G_2 < 0$ 的非线性系统中出现了条纹相, 丰富了系统的量子相. 条纹相兼具超流性与周期性晶格结构, 为超固态等新奇量子态的研究

提供了载体, LHY 相互作用的引入扩大了条纹相的存在区域, 也为 BEC 系统的量子相和相变研究提供了更灵活的调控手段.

参考文献

- [1] Galitski V, Spielman I B 2013 *Nature* **494** 49
- [2] Zhang Y P, Mossman M E, Busch T, Engels P, Zhang C W 2016 *Front. Phys.* **11** 118103
- [3] Liu X J, Borunda M F, Liu X, Sinova J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 046402
- [4] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [5] Long T, Li Y M, Luo X X, Liao Q, Li F 2024 *Chin. J. Lasers* **51** 1800002 (in Chinese) [龙腾, 李一鸣, 罗筱璇, 廖清, 李峰 2024 *中国激光* **51** 1800002]
- [6] Zhai Y J, Chen Y Y, Zhang Y P 2023 *Acta Opt. Sin.* **43** 2102001 (in Chinese) [翟云佳, 陈园园, 张永平 2023 *光学学报* **43** 2102001]
- [7] Wang C, Gao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [8] Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225301
- [9] Chen Y Y, Lyu H, Xu Y, Zhang Y P 2022 *New J. Phys.* **24** 12
- [10] Zhang S, Jo G B 2019 *J. Phys. Chem. Solids* **128** 75
- [11] Lan Z, Öhberg P 2014 *Phys. Rev. A* **89** 023630
- [12] Zheng F, Chen Y Y 2025 *Acta Opt. Sin.* **45** 0902001 (in Chinese) [方正, 陈园园 2025 *光学学报* **45** 0902001]
- [13] Wang L, Liu J S, Li J, Zhou X L, Chen X R, Liu C F, Liu W M 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 010303 (in Chinese) [王力, 刘静思, 李吉, 周晓林, 陈向荣, 刘超飞, 刘伍明 2020 *物理学报* **69** 010303]
- [14] Li Y, Martone G I, Pitaevskii L P, Stringari S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 235302
- [15] Wang H, He X Y, Li S, Liu B 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100309 (in Chinese) [王欢, 贺夏瑶, 李帅, 刘博 2023 *物理学报* **72** 100309]
- [16] Ji S C, Zhang L, Xu X T, Wu Z, Deng Y J, Chen S, Pan J W 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 105301
- [17] Khamsehchi M A, Zhang Y P, Hammer C, Busch T, Engels P 2014 *Phys. Rev. A* **90** 063624
- [18] Bersano T M, Hou J, Mossman S, Gokhroo V, Luo X W, Sun K, Zhang C W, Engels P 2019 *Phys. Rev. A* **99** 051602
- [19] Li J R, Lee J, Huang W, Burchesky S, Shteynas B, Top C, Alan O, Jamison, Ketterle W 2017 *Nature* **543** 91
- [20] Pitaevskii L P 1961 *J. Exp. Theor. Phys.* **13** 451
- [21] Gross E P 1961 *Il Nuovo Cimento* **20** 454
- [22] Bogolubov N N 1947 *J. Phys. USSR* **11** 23
- [23] Petrov D S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 155302
- [24] Lee T D, Huang K, Yang C N 1957 *Phys. Rev.* **106** 1135
- [25] Larsen D M 1963 *Ann. Phys.* **24** 89
- [26] Petrov D S <https://ebooks.iospress.nl/volumearticle/71818> [2026-1-31]
- [27] Chin C, Grimm R, Julienne P, Tiesinga E 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1225
- [28] Saqlain S, Mithun T, Carretero-González R, Kevrekidis P G 2023 *Phys. Rev. A* **107** 033310
- [29] Petrov D S, Astrakharchik G E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 100401
- [30] Luo Z H, Pang W, Liu B, Li Y Y, Malomed B A 2020 *Front. Phys.* **16** 32201
- [31] Li Y Y, Luo Z H, Liu Y, Chen Z P, Huang C Q, Fu S H, Tan H S, Malomed B A 2017 *New J. Phys.* **19** 113043
- [32] Gangwar S, Ravisankar R, Muruganandam P, Mishra P K 2022 *Phys. Rev. A* **106** 063315
- [33] Gangwar S, Ravisankar R, Muruganandam P, Mishra P K 2023 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **56** 165302
- [34] Zhang Y, Su X, Chen H, Hong Y Y, Li J H, Wen L H 2023 *Results Phys.* **54** 107067
- [35] Kartashov Y V, Zezyulin D A 2024 *Phys. Rev. A* **110** L021304

Ground-state properties of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates with Lee-Huang-Yang corrections^{*}

WU Jixuan CHEN Yuanyuan[†]

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

(Received 10 February 2026; revised manuscript received 5 March 2026)

Abstract

We investigate the effects of the Lee-Huang-Yang (LHY) correction on the ground-state phases of a one-dimensional spin-1/2 Bose-Einstein condensate system with spin-orbit coupling. The LHY interaction, originating from quantum fluctuations beyond the mean-field approximation, introduces an additional nonlinear term into the Gross-Pitaevskii equation, fundamentally altering the ground-state phase diagram. Using a variational method with a trial wave function, we derive the system's ground-state energy and obtain analytical expressions for the stripe phase, plane-wave phase, and zero-momentum phase. The phase boundaries and tricritical points are determined by solving the energy minimization conditions. Numerically, we solve the same Hamiltonian via Newton iteration and construct phase diagrams using momentum and polarization as order parameters. Our results show that the LHY correction introduces a uniform, density-dependent energy shift across all phases but more profoundly modulates the stripe phase. Notably, it gives rise to a new zero-momentum phase, denoted as phase III ($\beta = 1/4$), which emerges only at low densities and exhibits a more complex energy expression than the conventional phase III ($\beta = 0$). Increasing LHY interaction significantly expands the stripe phase and phase III ($\beta = 1/4$) regions at the expense of the plane-wave phase, causing the latter to nearly vanish. This reorganization leads to a new triple point at low densities. The triple point initially connects to phase III ($\beta = 1/4$) and transitions to phase III ($\beta = 0$) as LHY interaction strengthens. In systems where intraspecies interactions exceed interspecies interactions ($g_{11} > g_{12}$), the LHY modulation extends both stripe and zero-momentum phases into regimes with smaller intraspecies interactions. In the opposite regime, where intraspecies interactions are weaker ($g_{11} < g_{12}$), the LHY effect shrinks the plane-wave phase, expands the zero-momentum phases, and induces the emergence of a stripe phase, creating additional triple points. In this regime, a smaller disparity between the two intraspecies interactions favors the formation of a larger stripe-phase region. As LHY interaction increases, the system undergoes a continuous quantum phase transition from plane-wave phase to stripe phase to zero-momentum phase. Theoretically, the stripe phase emerges because the LHY correction alters the curvature of the ground-state energy landscape, disrupting the original phase distribution. Physically, this suggests that strong LHY interaction can compensate for weaker intraspecies interactions. The LHY-induced expansion of the stripe-phase region provides enhanced control for investigating exotic states such as supersolids and quantum phase transitions in spin-orbit-coupled BEC systems.

Keywords: Bose-Einstein condensate, spin-orbit coupling, Lee-Huang-Yang corrections, ground-state phases

DOI: [10.7498/aps.75.20260234](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260234)

CSTR: [32037.14.aps.75.20260234](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20260234)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12374247).

[†] Corresponding author. E-mail: cyuyan@shu.edu.cn

李黄杨修正下自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚系统的基态性质

吴季琰 陈圆圆

Ground-state properties of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates with Lee-Huang-Yang corrections

WU Jixuan CHEN Yuanyuan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 120301 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20260234

CSTR: 32037.14.aps.75.20260234

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20260234>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

自旋-轨道耦合二分量玻色-爱因斯坦凝聚系统的孤子解

Soliton solutions of the spin-orbit coupled binary Bose-Einstein condensate system

物理学报. 2023, 72(10): 106701 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222319>

自旋-轨道耦合玻色凝聚体中的自旋频谱动力学响应

Dynamical response of spin frequency spectrum in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate

物理学报. 2025, 74(9): 096701 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241783>

旋转自旋-轨道角动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的基态性质

Ground state properties of rotating spin-orbital-angular-momentum coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2025, 74(19): 190303 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250542>

可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿动力学

Tunneling dynamics of tunable spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2022, 71(21): 210302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220697>

自旋-轨道耦合玻色爱因斯坦凝聚中多能级绝热消除理论

Adiabatic elimination theory of multi-level system in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate

物理学报. 2023, 72(21): 216701 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231052>

螺旋自旋-轨道耦合三分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态

Ground state of three-component Bose-Einstein condensate with helicoidal spin-orbit coupling

物理学报. 2025, 74(17): 170302 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250587>