

非互易耦合分数阶系统中矢量孤子的碰撞动力学 与共振辐射 *

苗小雨¹⁾²⁾ 宋浩然¹⁾ 张立溥^{1)2)†}

1) (浙江传媒学院, 媒体工程学院, 杭州 310018)

2) (全省影视媒体技术研究重点实验室, 杭州 310018)

非互易耦合与分数阶衍射的协同效应对矢量孤子碰撞动力学的调控机制尚不明确。本文构建了空间分数阶三 - 五次耦合非线性薛定谔方程模型, 采用 Strang 分裂分步傅里叶方法, 系统研究了非互易耦合强度与分数阶数对矢量孤子碰撞行为的协同调控作用。结果表明: 互易耦合极限下系统呈现典型弹性散射特征, 守恒律保持良好; 非互易耦合下速度非对称性随耦合失衡程度单调增强, 弱非互易区间哈密顿量误差保持稳定。分数阶数调控方面, 经典极限下辐射损耗最低, 碰撞行为回归近弹性散射模式; 中间分数阶区域存在弱共振辐射现象; 低分数阶区域呈现超聚焦效应, 峰值密度可提升一个数量级以上。普适性验证表明, 共振位置对入射速度严格无关, 对孤子振幅呈系统性依赖, 证实该效应由分数阶输运内禀标度律与孤子本征宽度共同决定。基于尺度匹配机制分析, 给出了孤子调控的优选参数窗口。研究结果为非互易光子学和量子输运领域中相干结构的调控与应用提供了理论依据。

关键词: 分数阶非线性薛定谔方程, 非互易耦合, 矢量孤子碰撞, 共振辐射

PACS: 42.65.Tg, 42.65.Sf, 02.30.Jr

1 引言

非互易耦合在集成光子学中具有关键的工程应用价值。非互易光隔离器是光子集成电路中的核心组件, 用于保护激光器免受背向反射光干扰, 确保光通信系统稳定运行^[1,2]。在光通信系统中, 片上光隔离

† 通信作者. E-mail: zhanglipu@cuz.edu.cn

第一作者. E-mail: miaoxiaoy@cuz.edu.cn

* 全省影视媒体技术研究重点实验室开放基金 (批准号: 2024E10023).

器通过打破洛伦兹互易性，阻止背向反射光进入激光器腔体，从而保障信号传输稳定性^[3,4]。在全光信号处理领域，非互易耦合机制被用于构建光子晶体光二极管，利用模式转换实现 13dB 消光比的单向传输^[5]，并进一步扩展至 AND、OR、NOT 等全光逻辑门操作，为光计算芯片奠定基础^[6]。此外，量子信息处理也受益于非互易器件，片上磁光隔离器已被证实可保持单光子相干性，支持量子干涉操作，为集成量子电路提供关键组件^[7]。

非线性演化方程解析求解是理解复杂物理现象的重要理论工具，在流体力学、非线性光学、玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 等领域具有广泛应用。自 Hirota 于 1971 年提出双线性方法并首次给出 KdV 方程 N-孤子碰撞的精确解以来^[8]，可积系统的求解方法取得了长足发展。近年来，研究者们针对各类非线性模型发展了多种有效的解析求解策略。在光纤通信领域，Lan 等人针对光纤中短脉冲传播的非线性动力学问题，研究了复变修正 Korteweg-de Vries (mKdV) 方程的多孤子解及束缚态孤子结构，证明了通过 Hirota 双线性方法可获得系统的双线性形式与多孤子解，成功构造出呼吸子型孤子与束缚态孤子，并证明了复波数虚部符号和初始分离距离是调控孤子相互作用模式的关键因素^[9]。对于高维非线性系统，Yang 等人针对扩展 (2+1) 维 KP 方程建立了双线性和 Bell 多项式型 Bäcklund 变换，获得了多孤子解及振幅依赖速度的传播动力学特征；通过扩展同宿测试方法推导了呼吸波解，并在无限周期极限下揭示了怪波的形成机制^[10]。

在更一般的 (2+1) 维可积框架下，Ma 等人针对矢量非局域反时间可积 NLS 方程建立了二进制 Darboux 变换理论，利用两组特征函数和伴随特征函数构造了丰富的孤子解类，为非局域可积系统的严格求解提供了新范式^[11]。在高阶模型研究方面，Sasa-Satsuma 型矩阵可积层次的 Riemann-Hilbert 问题方法为高阶非线性波方程提供了统一的解析框架^[12]。另一方面，针对时间分数阶 Schrödinger 和 Zakharov-Kuznetsov 型方程，Ilhan 等利用改进的辅助方程方法获得了一族形式多样的分数阶孤子解，表明经典孤子求解技术可以有效推广至分数阶非线性演化模型，为刻画具有记忆和长程关联效应的复杂介质提供了新的解析工具^[13]。在孤子相互作用理论方面，Lan 等人针对光纤中复变修正 KdV 方程，利用 Hirota 双线性方法构造了多孤子解、呼吸子型孤子及束缚态孤子，系统证明了复波数虚部符号与初始分离距离是调控相互作用模式的关键因素。这些成果为理解非线性波的传播动力学和相互作用特性提供了重要的理论参考。

非线性薛定谔方程 (NLSE) 作为描述非线性光学、BEC 及流体力学中波动现象的普适模型，构成了现代非线性科学的基石^[14]。然而，随着对复杂介质中反常扩散、记忆效应及非局域相互作用认识的深入，传统的整数阶模型已难以精准刻画具有长程关联的物理系统。在此背景下，分数阶非线性薛定谔方程

(FNLSE) 应运而生。通过引入分数阶导数 (Lévy 指数), FNLSE 能够精确描述非局域介质中的复杂动力学行为^[15,16]。近年来, 该领域在实验层面和理论层面均取得了突破性进展。在实验层面, Liu 等人及 Hoang 等人相继在时域光学系统中实现了分数阶薛定谔方程的物理模拟, 观测到了 Lévy 指数对脉冲演化的决定性调控作用^[17,18], 近期, Liu 等人进一步实验模拟了分数非线性薛定谔方程中的脉冲动力学, 为理论预测提供了直接验证^[19]。在理论层面, 分数阶模型在多组分光孤子传输及波分复用技术中的应用潜力也得到了广泛论证^[20,21], 另外针对耦合饱和非线性薛定谔方程, 研究者利用功率守恒的平方算子方法, 系统构造了偶极-偶极、三极-偶极及偶极-三极矢量孤子解, 揭示了势函数对存在域的调制机制以及各分量功率对稳定性域的调控规律^[22]。

为了解析分数阶导数引入的数学复杂性, 研究者在求解方法上开展了大量工作, 发展了一系列高效的解析与半解析技术。针对 Beta 导数及共形导数定义的模型, 改进的 Sardar 子方程法^[23]、扩展 tanh-expansion 方法^[24] 以及 Kudryashov 方法^[25] 被成功用于提取亮、暗及周期性孤子解。此外, 为了克服强非线性带来的求解困难, 结合 Laplace 变换的同伦扰动法 (Laplace-HPM)^[26] 及统一 \mathcal{F} -展开技术^[27] 进一步丰富了分数阶模型的精确解库。这些工作虽然成功构建了多种静态解的形式, 确立了孤子存在的参数空间, 但多侧重于单一孤子的存在性探讨, 对于孤子在长距离传输中的动态稳定性及相互作用机制涉及较少。

在动力学特性与调控机制方面, 现有研究深刻揭示了分数阶衍射与非线性效应的竞争关系。研究表明, 分数阶数 (Lévy 指数) 不仅是控制呼吸波向孤子相变的关键参数^[28], 还能在非均匀介质中显著改变孤子分子的结合能与传输轨迹^[29]。特别是在引入高阶非线性项 (如三 - 五次非线性) 后, 变分法与数值模拟证实, Lévy 指数的调节能有效抑制波包坍塌, 拓宽涡旋孤子及基态孤子的稳定存在范围^[30,31]。Zeng 等人系统研究了三 - 五次非线性分数阶薛定谔方程中一维能隙孤子的存在性与稳定性, 揭示了竞争非线性对孤子动力学的调控机制^[32]。然而, 大多数现有研究仅关注时间或空间单一维度的分数阶效应, 对于空间分数阶协同作用下的复杂动力学 (如多峰结构、能隙孤子) 的探索仍显不足^[33,34]。早期研究中, Huang 等人在光学晶格中理论预测了分数阶非线性薛定谔方程的能隙孤子存在性并探讨了 PT 对称势中基态孤子的稳定性问题^[35,36], 为后续研究奠定了基础。

进一步地, 当系统拓展至多组分耦合系统时, 矢量孤子的物理图景更为丰富。耦合非线性薛定谔方程 (CNLSE) 中的交叉相位调制 (XPM) 效应为光信号的全光控制提供了理论依据^[37,38]。从 Manakov 系统的能量共享碰撞^[39,40] 到高阶 Sasa-Satsuma 方程的矢量解构建^[41], 多组分孤子的碰撞特性已被证明是实

现逻辑门操作的核心。特别是引入饱和非线性或三 - 五次 (cubic-quintic) 竞争非线性后, 系统展现出独特的对称破缺与双稳态特性^[42,43]。尽管已有少量研究涉及分数阶耦合模型^[44], 但关于空间分数阶导数与三 - 五次竞争非线性共同作用下的矢量孤子碰撞动力学, 目前尚缺乏系统的理论模型与数值分析。

综上所述, 尽管该领域已成果斐然, 但仍存在明显的研究空白: 其一, 现有的解析方法 (如 Hirota 双线性法) 难以直接推广至空间分数阶耦合系统, 且难以描述非互易耦合与高阶非线性共存时的复杂演化; 其二, 大多数工作未充分考虑三 - 五次非线性与分数阶衍射的协同竞争机制, 尤其是这种机制如何影响矢量孤子在碰撞过程中的能量交换与形状保持特性, 尚不明确; 其三, 针对分数阶耦合系统的数值算法研究相对滞后, 缺乏高精度的数值模拟来验证复杂物理场景 (如非互易耦合、多孤子碰撞) 下的理论预测。

针对上述问题, 本文旨在构建通用的空间分数阶三 - 五次耦合非线性薛定谔方程模型, 并通过高精度数值模拟, 系统探究分数阶衍射、非互易耦合及高阶非线性对矢量孤子碰撞动力学的调控机制。本文的结构安排如下: 第 2 部分建立物理模型并阐明其物理内涵; 第 3 部分详细介绍基于 Strang 分裂的谱方法及数值参数设置; 第 4 部分通过数值实验, 深入讨论不同物理参数下的孤子碰撞行为; 最后, 第 5 部分总结全文并展望未来研究方向。

2 分数阶耦合三 - 五次非线性薛定谔方程组

本文聚焦非局域非线性色散介质中两束光场分量的相互作用动力学行为, 采用无量纲化的分数阶耦合三 - 五次非线性薛定谔方程组作为核心控制模型。该方程组可精准刻画长程空间耦合介导的反常色散输运、高阶非线性自作用与非对称交叉相位调制的协同效应, 具体形式为:

$$i\partial_t\psi_1 + (-\Delta)^{\alpha/2}\psi_1 + (|\psi_1|^2 + \beta|\psi_1|^4)\psi_1 + \gamma_{12}|\psi_2|^2\psi_1 = 0, \quad (1)$$

$$i\partial_t\psi_2 + (-\Delta)^{\alpha/2}\psi_2 + (|\psi_2|^2 + \beta|\psi_2|^4)\psi_2 + \gamma_{21}|\psi_1|^2\psi_2 = 0.$$

其中, 复值函数 $\psi_1(x, t)$ 和 $\psi_2(x, t)$ 分别表示两束相互作用光场模式的慢变包络, $x \in \mathbb{R}$ 为一维横向空间坐标, t 为归一化传输距离。模型通过标准傍轴标度方法完成无量纲化处理, 使色散衍射项与非线性自作用项处于可比量级, 保证演化过程的物理一致性。

式 (1) 中, 算子 $(-\Delta)^{\alpha/2}$ 为分数阶拉普拉斯算子, 是描述非局域色散输运效应的核心数学工具。与经典二阶拉普拉斯算子不同, 分数阶拉普拉斯算子引入了长程空间关联效应, 可精准捕捉介质中由非均匀耦合导致的反常衍射行为。从数学定义上, 该算子通过傅里叶变换在谱域下严格表征:

$$\mathcal{F} [(-\Delta)^{\alpha/2}\psi] (k) = |k|^\alpha \hat{\psi}(k, t), \quad (2)$$

其中 \mathcal{F} 为傅里叶变换算子, k 为空间波数, $\hat{\psi}(k, t)$ 为实空间场分布 $\psi(x, t)$ 的谱域形式, 其傅里叶变换的具体定义为:

$$\hat{\psi}(k, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x, t) e^{-ik \cdot x} dx. \quad (3)$$

上述映射关系的核心优势在于: 分数阶拉普拉斯算子在傅里叶空间退化为以 $|k|^\alpha$ 为符号的乘法算子, 这为后续数值模拟中采用高效谱域方法求解分数阶衍射效应奠定了数学基础。

分数阶数 $\alpha \in (1, 2]$ 是表征反常色散输运强度的关键参数: 当 $\alpha = 2$ 时, 分数阶拉普拉斯算子退化为经典拉普拉斯算子 Δ , 此时方程组 (1) 还原为描述局域二次衍射的标准耦合非线性薛定谔方程; 随着 α 减小, 色散展宽行为逐渐偏离高斯分布, 呈现出 Lévy 型超扩散输运特征, 同时波包间的非局域相位耦合作用显著增强。

局域非线性响应采用三 - 五次组合形式建模, 其中三次项 $|\psi_j|^2 \psi_j$ ($j = 1, 2$) 描述基础非线性自作用, 五次项 $\beta |\psi_j|^4 \psi_j$ 为高阶修正项。系数 β 量化了五次项相对于三次项的贡献强度: 当 $\beta > 0$ 时, 高阶非线性效应增强自聚焦行为; 当 $\beta < 0$ 时, 可引入有效饱和效应抑制波包崩塌, 进而调控局域光场结构的稳定性与形态特征。

除分量内自作用外, 两束光场通过交叉相位调制项实现模式间耦合, 耦合强度由系数 γ_{12} 和 γ_{21} 主导。区别于对称的 Manakov 型相互作用, 本文模型允许非互易耦合配置 $\gamma_{12} \neq \gamma_{21}$, 该非对称性打破了两光场模式间的交换不变性, 使非线性相互作用过程中出现定向能量转移与不等量动量交换。此类非互易效应的物理起源包括: 模式依赖的介质非线性极化率^[45]、光场传输过程中的增益-损耗失衡^[46], 或人工微结构光学平台中构建的非对称相互作用路径^[47]。

综上, 本模型通过整合分数阶色散、高阶自非线性与非对称分量间耦合三大核心物理机制, 构建了一套统一的理论框架, 可系统研究复杂非线性介质中矢量孤子的形成与相互作用规律。在后续动力学分析中, 上述机制的竞争与协同作用是决定孤子碰撞弹性、辐射发射强度及相位重分布特征的核心因素。

2.1 分数阶输运标度的量纲一致性

分数阶薛定谔方程的线性传播子对应 Lévy 稳定分布, 其演化过程中呈现典型的超扩散型展宽特征。该特征可通过分数阶色散主导下的特征输运长度标度关系加以刻画。在有量纲形式下, 特征输运长度满足

$$\ell_\alpha(t) = (D_\alpha t)^{1/\alpha}, \quad (4)$$

其中 D_α 为分数阶色散运输系数，用于表征非局域色散强度，其物理量纲为 $[L^\alpha T^{-1}]$ ， L 表示长度量纲， T 表示演化变量 t 的量纲（可对应传播时间或传播距离）。上述标度律的量纲一致性可直接验证：由于 $\ell_\alpha(t)$ 的量纲应为 $[L]$ ，而

$$([L^\alpha T^{-1}] \cdot [T])^{1/\alpha} = [L^\alpha]^{1/\alpha} = [L],$$

因此式 (4) 在量纲上严格自洽。

为简化数值计算并突出分数阶运输的核心物理机制，本文采用标准的无量纲化方法，通过特征距离尺度吸收分数阶色散系数，将控制方程归一化为 $D_\alpha = 1$ 。此时式 (4) 可化为无量纲形式的运输标度律

$$\ell_\alpha(t) \sim t^{1/\alpha}. \quad (5)$$

该无量纲化策略在物理上是合理的：其一，保留了分数阶运输对阶数 α 的关键依赖关系，即当 α 减小时 $\ell_\alpha(t)$ 的增长加速，从而体现 Lévy 型超扩散特征；其二，避免了冗余量纲常数对数值计算的影响，使不同 α 下的动力学演化具有直接可比性。

2.2 关键可观测量的数学定义

为定量表征矢量孤子碰撞过程中的动力学特征，本文引入以下关键可观测量。第 j 个孤子波包的瞬时质心位置由强度加权平均确定，其表达式为

$$x_{cj}(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x |\psi_j(x, t)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}} |\psi_j(x, t)|^2 dx}, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

对应的瞬时速度通过质心位置的对 t 的导数获得，数值实现采用有限差分近似

$$v_j(t) = \frac{dx_{cj}}{dt} \approx \frac{x_{cj}(t + \delta t) - x_{cj}(t)}{\delta t}, \quad (7)$$

其中 δt 为数值存储间隔。

速度非对称性用于表征非互易耦合诱导的动量重分布强度，定义为两孤子速度绝对值的偏差

$$|\Delta v| = \left| |v_1(t_{\text{final}})| - |v_2(t_{\text{final}})| \right|, \quad (8)$$

在参数扫描分析中采用碰撞演化结束时刻的渐近值，瞬态演化过程则展示完整的 $|\Delta v|(t)$ 。

系统的总线性动量由场分布的梯度-相位耦合积分给出

$$P(t) = \sum_{j=1}^2 \text{Im} \int_{\mathbb{R}} \psi_j^*(x, t) \frac{\partial \psi_j(x, t)}{\partial x} dx, \quad (9)$$

其中 Im 表示取虚部, ψ_j^* 为复共轭。在互易耦合条件下, 该量严格守恒; 非互易情形下出现定向漂移。

轨迹分离度表征碰撞过程中两孤子质心间距的极值变化, 定义为

$$\Delta x_{\text{sep}} = \max_{t \in [0, T]} |x_{c1}(t) - x_{c2}(t)|. \quad (10)$$

该量反映碰撞过程中波包可达到的最大分离程度, 在互易极限下与初始间距相关。

峰值密度反映碰撞过程中光场强度的空间集中程度, 定义为总强度的全局最大值

$$\rho_{\text{peak}}(t) = \max_{x \in \mathbb{R}} (|\psi_1(x, t)|^2 + |\psi_2(x, t)|^2). \quad (11)$$

该量在低分数阶区域因超聚焦效应显著增强, 在共振点附近达到全局最大值。

辐射损耗度量孤子能量向色散连续谱的泄漏程度, 采用核心区域能量占比的相对偏差表征

$$R_{\text{rad}} = 1 - \frac{\int_{\Omega_{\text{core}}} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) dx}{\int_{\mathbb{R}} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) dx}, \quad (12)$$

其中 $\Omega_{\text{core}} = \{x : |x - x_{c1}| < w\} \cup \{x : |x - x_{c2}| < w\}$ 为以两孤子质心为中心、特征宽度 $w = 20$ (数值实验取值) 的核心区域。

谱展宽通过碰撞时刻附近的动量空间能量分布表征, 其功率谱密度为

$$S(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 |\mathcal{F}[\psi_j(x, t_{\text{col}})](k)|^2, \quad (13)$$

其中 \mathcal{F} 表示空间傅里叶变换, t_{col} 为碰撞时刻。谱展宽程度由 $S(k)$ 的高频成分占比定量刻画, 在共振区域呈现显著的高频激发特征。

质心漂移反映碰撞后孤子对整体的净平移位移, 表征非互易耦合下的定向动量转移效应

$$d_{\text{drift}} = |x_{c1}(T) + x_{c2}(T)|. \quad (14)$$

该量在互易情形下趋于零 (动量守恒), 非互易情形下随耦合失衡程度增大而单调上升。

3 数值方法与参数设定

分数阶耦合三 - 五次非线性薛定谔系统的传输演化采用基于 Strang 算子分裂的对称分步傅里叶方法 (SSFM) 求解^[14]。该方法的核心优势在于将线性分数阶色散输运与局域非线性相互作用解耦, 分别在谱域与实空间高效求解, 且在演化方向保持二阶数值精度, 兼顾计算效率与求解稳定性。

首先将控制方程组 (1) 写成抽象算子形式：

$$\partial_t \Psi = (\mathcal{L} + \mathcal{N})\Psi, \quad (15)$$

其中， $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ 为两光场分量构成的列向量， \mathcal{L} 为对应分数阶拉普拉斯项线性分数阶衍射算子， \mathcal{N} 为包含三 - 五次自作用与非互易交叉相位调制项的非线性相互作用算子。

在单个演化步长 Δt 内，Strang 算子分裂通过对称的“线性半步-非线性全步-线性半步”组合推进解的演化，具体形式为：

$$\Psi(t + \Delta t) = e^{\frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}} e^{\Delta t\mathcal{N}} e^{\frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}} \Psi(t), \quad (16)$$

该格式通过距离对称拆分消除一阶分裂误差，保证二阶辛精度与距离反演对称性，是求解非线性色散系统的经典高效格式。

3.1 数值求解方法与碰撞时刻判定

为精确求解非互易耦合分数阶三 - 五次非线性薛定谔系统，本文将线性分数阶色散输运与非线性相互作用演化过程分步处理，并通过波包质心轨迹定量判定孤子碰撞时刻，确保数值计算的精度与结果可靠性。

线性分数阶色散输运过程在傅里叶空间中完成，利用分数阶拉普拉斯算子的谱域乘法特性实现精确求解。记实空间场量 $\psi_j(x, t)$ ($j = 1, 2$) 对应的谱域形式为 $\hat{\psi}_j(k, t)$ ，则线性传播子在半步演化 $\Delta t/2$ 内的作用关系为

$$\hat{\psi}_j(k, t + \frac{\Delta t}{2}) = \exp[-i|k|^\alpha \frac{\Delta t}{2}] \hat{\psi}_j(k, t), \quad j = 1, 2, \quad (17)$$

该式通过傅里叶变换将实空间中难以离散化的分数阶微分运算，转化为谱域内的简单乘法运算，有效避免了实空间分数阶导数离散化带来的数值误差，实现对分数阶色散效应的精准描述。

非线性相互作用演化过程在实空间内逐点进行，场量演化由三 - 五次自相互作用与非互易交叉耦合共同支配，表现为局域相位旋转，其演化方程为

$$\psi_j(x, t + \Delta t) = \exp[-i\Delta t (|\psi_j|^2 + \beta|\psi_j|^4 + \gamma_{jk}|\psi_k|^2)] \psi_j(x, t), \quad j \neq k, \quad (18)$$

该步骤为纯实空间逐点运算，仅改变场量相位而不改变其幅值，因此不会引入额外数值色散，且严格保持各场分量的模守恒 ($|\psi_j(x, t + \Delta t)| = |\psi_j(x, t)|$)，为系统守恒量的长传输距离稳定计算提供了有力保障。非线性演化更新完成后，再次执行半步线性传播过程，即可完成一个完整的 Strang 算子分裂循环。该对

称迭代格式确保了数值方法的全局二阶收敛性，同时能有效维持总功率、哈密顿量等物理守恒量的长传输距离稳定性，显著降低数值耗散与数值色散对孤子碰撞动力学结果的干扰。

本文中变量 t 代表光脉冲的传输距离，基于两波包质心的最小间距条件确定孤子相互作用的碰撞位置，即

$$t_{\text{col}} = \arg \min_{t \in [0, T]} |x_{c1}(t) - x_{c2}(t)|, \quad (19)$$

其中 T 为总传输距离窗口。该判定方法具有客观性强、数值可重复的优点，不受相位畸变或辐射背景的干扰，尤其适用于分数阶色散系统中波形畸变可能模糊碰撞事件直观判别的场景，为不同参数条件下孤子碰撞动力学行为的对比分析提供了统一的位置基准。

3.2 核心参数离散设定

分数阶衍射效应的强度随分数阶数 α 减小而显著增强，表现为非局域色散展宽效应加剧，这会导致低 α 区域内孤子波包快速弥散，相互作用强度大幅减弱，甚至无法观测到有效碰撞事件。为保证在 $\alpha \in [1.2, 2.0]$ 的全分数阶区间内均能捕捉到真实的孤子碰撞动力学，本文采用自适应初始化策略：在保持 β 、 γ_{12} 、 γ_{21} 这些非线性参数与网格数、分辨率这些谱域计算参数完全一致的前提下，针对小 α ($\alpha \leq 1.3$) 情形适度增大初始波包间距并调整传输距离窗口，以此补偿超扩散导致的加速展宽效应，确保不同分数阶数下的碰撞事件具有可对比性。

所有数值模拟均在均匀周期网格上完成，空间分辨率与傅里叶谱带宽严格匹配，且网格数与空间域长度的选取满足 Nyquist 采样定理，有效避免谱截断误差与数值混叠。上述配置确保模拟中观测到的动力学演化特征仅源于物理参数 α 、 γ_{12} 、 γ_{21} 的改变，而非如网格离散化误差、边界反射、谱截断等数值伪影。

需特别说明的是，低分数阶下的参数自适应仅调整初始间距和入射速度这俩初始化几何配置，未修改系统本征非线性系数 β 或色散系数 α ，因此完全保证了不同分数阶数、不同耦合构型下模拟结果的物理可比性。

3.3 自适应初始化策略与可重复性

在分数阶非互易耦合系统中，色散算子 $(-\Delta)^{\alpha/2}$ 诱导的 Lévy 型超扩散效应会显著改变波包展宽速率，尤其在低 α 区域，孤子在碰撞发生前可能出现过快展宽或数值不稳定，从而削弱碰撞动力学的可观测性。为保证不同 α 条件下碰撞过程具有可比性，并避免由于初始构型不当导致的伪峰或碰撞缺失，本文采

表 1: 分数阶耦合三 - 五次非线性薛定谔方程碰撞模拟核心参数

Table 1. Core parameters for collision simulation of FCQNLSE

参数	值	参数	值
空间域 L	200	演化窗口 T	80
网格数 M	2048	演化步长 Δt	0.0005
空间分辨率 Δx	0.195	分数阶 α	1.2 ~ 2.0
五次方系数 β	0.01	耦合系数 γ_{ij}	可变
初始间距 x_0	75	入射速度 v	0.5 ~ 1.5
边界条件	周期性	计算格式	Strang-SSFM

用分段自适应初始化策略，对初始半间距 x_0 、演化窗口 T 与入射速度 v 进行联合调节。

具体而言，本文将分数阶扫描区间划分为三个动力学区间，并采用如下初始化规则：

$$(x_0, T, v) = \begin{cases} (20, 100.0, 0.5), & \alpha \leq 1.3, \\ (150, 60.0, 1.0), & 1.3 < \alpha < 1.9, \\ (100, 60.0, 0.8), & \alpha \geq 1.9. \end{cases} \quad (20)$$

其中 x_0 表示两孤子初始质心间距的一半，数值实现中对应网格平移量与空间步长的乘积。上述策略的物理含义为：在超扩散区 $\alpha \leq 1.3$ ，通过减小初始间距并降低入射速度来控制碰撞前的过度展宽，同时采用更长的演化窗口以完整捕捉辐射尾波；在过渡区 $1.3 < \alpha < 1.9$ 采用统一标准参数；在近经典区 $\alpha \geq 1.9$ 中适当减小初始间距与速度，以避免初始波包过近导致的数值假峰或局域能量堆积。

为确保所有数值结果可复现且确实对应有效碰撞事件，本文对每一组参数均引入碰撞有效性判据。设两分量孤子质心轨迹分别为 $x_{c1}(t)$ 与 $x_{c2}(t)$ ，则最小分离距离定义为

$$d_{\min} = \min_{t \in [0, T]} |x_{c1}(t) - x_{c2}(t)|. \quad (21)$$

本文规定仅当 $d_{\min} < 5.0$ 时，将该工况判定为有效碰撞过程。

此外，为排除非共振区由于非互易动量转移或数值误差导致的整体漂移偏置，本文进一步监测系统总质心漂移量 (14)。在非共振区，若 D_{drift} 异常增大，则表明该工况存在明显的全局偏置或有效碰撞缺失，需要重新调整初始间距与演化窗口。上述策略保证了本文分数阶扫描结果的可比性与数值稳定性。

需要强调的是，上述自适应初始化方案并不改变系统的物理方程形式，而仅用于保证不同分数阶条件下碰撞事件发生在可观测的有效时空窗口内，从而提高统计结果的鲁棒性与可重复性。

3.4 伪哈密顿结构与守恒量诊断

守恒量的稳定性是验证数值格式可靠性与物理规律真实性的核心依据。对于 $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$ 这样的互易耦合构型，分数阶耦合三-五次非线性薛定谔系统具有正则哈密顿结构，其总能量泛函可表示为：

$$H = \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}} \left[\psi_j^* (-\Delta)^{\alpha/2} \psi_j - \frac{1}{2} |\psi_j|^4 - \frac{\beta}{3} |\psi_j|^6 \right] dx - \gamma \int_{\mathbb{R}} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 dx, \quad (22)$$

其中，第一项为分数阶色散能，第二、三项为三 - 五次非线性自作用能，最后一项为交叉相位调制耦合能。在该对称耦合条件下，控制方程可表示为标准变分形式：

$$i\partial_t \psi_j = \frac{\delta H}{\delta \psi_j^*}, \quad j = 1, 2.$$

然而， $\gamma_{12} \neq \gamma_{21}$ 时，非互易交叉相位调制的引入会破坏系统的变分对称性：不存在单一标量哈密顿泛函，使其泛函导数能够同时还原两束光场的演化方程。因此，非互易耦合下的动力学系统属于弱非哈密顿系统，严格的能量守恒律不再成立。

为实现非互易区域的数值诊断与稳定性评估，本文引入对称形式的伪能量泛函：

$$E = \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}} \left[\psi_j^* (-\Delta)^{\alpha/2} \psi_j - \frac{1}{2} |\psi_j|^4 - \frac{\beta}{3} |\psi_j|^6 \right] dx - \frac{\gamma_{12} + \gamma_{21}}{2} \int_{\mathbb{R}} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 dx, \quad (23)$$

该泛函的核心优势在于：在互易极限下 ($\gamma_{12} = \gamma_{21}$) 可退化为精确哈密顿量 H ；在非互易区域中，能够定量表征系统总非线性相互作用能的演化特征，为动力学稳定性分析提供物理意义明确的度量指标。

3.5 周期性边界的影响

本文采用分步傅里叶谱方法对耦合分数阶三-五次非线性薛定谔系统进行数值求解。由于谱方法在傅里叶空间中对色散项进行指数传播，离散实现天然对应周期边界条件，因此不存在有限差分边界截断所导致的非物理反射伪影。

为避免周期回绕波对孤子碰撞与辐射测度造成干扰，本文在参数选取上保证碰撞过程始终发生在远离边界的核心观测区域内。碰撞过程的辐射损耗采用局域核心区排除策略定义：设总密度为 $\rho(x, t) = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ ，在每个时刻 t 以两孤子质心 $x_{c1}(t)$ 、 $x_{c2}(t)$ 为中心分别取宽度为 40 的局域窗口构成核心区

$\Omega_{\text{core}}(t)$,

$$\Omega_{\text{core}}(t) = [x_{c1}(t) - 20, x_{c1}(t) + 20] \cup [x_{c2}(t) - 20, x_{c2}(t) + 20]. \quad (24)$$

据此定义辐射损耗 (12), 这样可以保证 R_{rad} 主要刻画孤子主瓣之外的连续谱辐射成分, 而非孤子核心结构。

在此框架下, 即使远场辐射波在长传输距离演化后到达边界并发生周期回绕, 其波包已显著展宽并趋于弥散, 对核心区 $\Omega_{\text{core}}(t)$ 内密度贡献极小, 因此不会显著影响碰撞阶段的主峰辐射测度。数值上, 我们通过监测孤子质心轨迹确保碰撞与主要动力学过程始终局限于 $|x|$ 较小区域, 远离边界, 从而排除了周期边界条件对共振辐射峰值的主导影响。上述设置确保本文观测到的共振崩塌与辐射增强现象来源于系统内禀动力学机制, 而非边界效应导致的数值伪影。

4 碰撞动力学与可观测量

我们分别在非互易碰撞, 相位与动量交换, 参数扫描, 分数阶扩散效应以及共振崩塌的普适性验证五个方面展示碰撞动力学在非互易情况下的演变, 结合数值模拟结果展开系统分析。数值模拟中, 低分数阶区域 ($\alpha \leq 1.3$) 采用自适应初始化策略, 以补偿超扩散导致的加速展宽效应; 所有工况均采用周期边界条件。

4.1 碰撞动力学的图形表征

4.1.1 非互易碰撞的对称性破缺

图 1 直观展示了非互易耦合诱导的时空对称性破缺现象。在左侧的时空演化图中, 灰色互易孤子呈现出经典的“X”型弹性散射轨迹, 碰撞前后的速度大小保持不变, 展现出完美的时空反演对称性。然而, 当引入非互易耦合后, 系统对称性被打破。彩色轨迹在碰撞点 ($x \approx 0$) 附近发生显著偏折, 不再与灰色基准轨迹重合。这种轨迹的分离直观地揭示了非互易力场对孤子动量的非对称重塑作用。右侧的波形快照进一步量化了这一动力学过程: 在初始距离 ($t = 0$), 两种情形的孤子完全重合。随着演化至末态 ($t = 100.0$), 非互易效应积累了显著的宏观物理量差异。非互易孤子的最终位置相对于互易基准产生了清晰的位置漂移。这种由对称性破缺引发的净速度差 (Δv) 和位置漂移, 正是非互易孤子逻辑门与光二极管器件设计的物理基础, 其具体的动量转移机制将在后文图 2 中详细讨论。

Nonreciprocal Soliton Scattering Dynamics

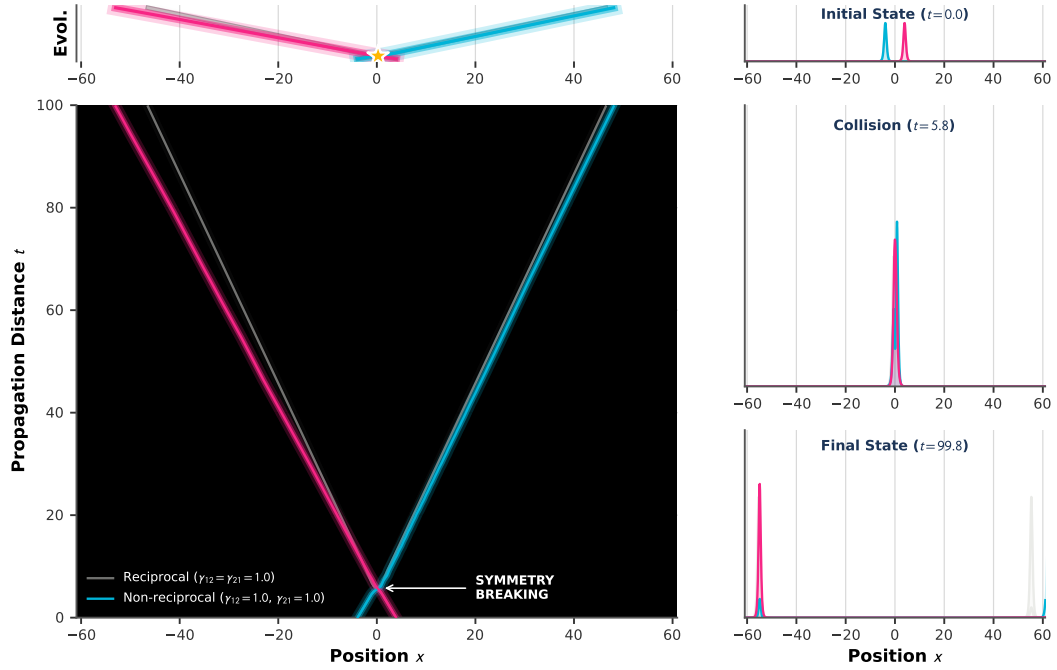


图 1: 非互易分数阶孤子散射中的对称性破缺动力学。计算参数: 分数阶数 $\alpha = 1.8$, 入射速度 $v = 0.35$; 互易耦合取 $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 1.0$, 非互易耦合取 $\gamma_{12} = 1.5, \gamma_{21} = 0.5$ 。

Fig. 1. Symmetry-breaking dynamics in nonreciprocal fractional soliton scattering. Parameters: fractional order $\alpha = 1.8$, incident velocity $v = 0.35$; reciprocal coupling $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 1.0$, nonreciprocal coupling $\gamma_{12} = 1.5, \gamma_{21} = 0.5$.

4.1.2 相位与动量交换

图 2 定量给出了矢量孤子碰撞全过程中的速度非对称性与动量交换行为。上方子图显示在碰撞时刻附近，速度非对称性 Δv 出现尖锐脉冲，峰值达 0.62，随后迅速衰减并在碰撞后稳定于有限残余值 0.0491，这一过程直接反映了非互易耦合下的定向动量转移。下方子图显示总动量 P 表现为高度局域在碰撞时刻附近的瞬时激发，峰值达 2.0，与孤子间距的极小值在传输距离上高度重合，表明动量交换是脉冲式的瞬态过程，而非渐进重分布。在互易耦合条件下，速度非对称性与总动量漂移均趋近于零，系统保持有效传输距离反演对称性；而非互易构型通过破坏相位-动量耦合的对称性，最终导致碰撞后出现持续的速度失衡，这与空间演化图中观测到的定向辐射反冲效应在物理机制上完全一致。

4.1.3 非互易性参数扫描

图 3 系统展示了非互易耦合失衡程度与分数阶色散对孤子碰撞关键可观测量的调控作用。左图表明，总相移在互易点附近达到最大，并随非互易性增强而单调下降，说明相互作用区存在相位积累效率最优的参数窗口。与此同时，速度非对称性幅值在互易条件被打破后显著偏离零，并随 $|\Delta\gamma|$ 增大而增强，表明分量间发生了可观测量的净动量定向转移，从而导致碰撞后的传播速度出现系统性不对称。右图揭示了分数阶效应的关键物理特征：峰值密度 ρ_{peak} 在低 α 区域达到最大值，随分数阶数增大单调衰减，对应超聚焦增强效应；而辐射损耗 R_{rad} 在 $\alpha \approx 1.43$ 附近出现显著峰值，表明此时系统进入共振辐射区间。该共振响应可归因于分数阶色散诱导的 Lévy 型输运尺度与非线性自聚焦尺度之间的匹配，从而促进孤子能量向连续谱辐射模的高效转移。当 α 偏离该区间时，辐射损耗迅速减弱，系统逐步过渡至弱耗散或近经典行为，为实现可控的共振辐射提供了明确的参数窗口。

4.1.4 分数阶扩散效应

图 4 揭示了分数阶衍射在调控碰撞辐射能量与谱域能量转移中的关键作用。数值结果表明，辐射发射强度在分数阶数 $\alpha \approx 1.4$ 附近出现显著的类型共振增强，辐射能量相较于整数阶经典极限提升近两个量级。该区域同时对应最显著的质心漂移与最大的相互作用非对称性。 k 空间谱分析显示，在碰撞时刻附近出现明显的高频激发，表明能量从孤子核向线性辐射模高效转移。分数阶拉普拉斯算子增强了非局域空间相位耦合，促进相干孤子能量向色散连续谱泄漏。当 α 趋近经典极限 $\alpha = 2$ 时，系统逐渐恢复标准局域衍射行为，辐射损耗与谱展宽显著减弱，碰撞动力学趋近弹性散射。 $\alpha \approx 1.4$ 附近的辐射共振峰对应一个最优分数阶输运区间：此时 Lévy 型超扩散的特征展宽长度与孤子本征宽度相当，碰撞过程中的非局域相位失配

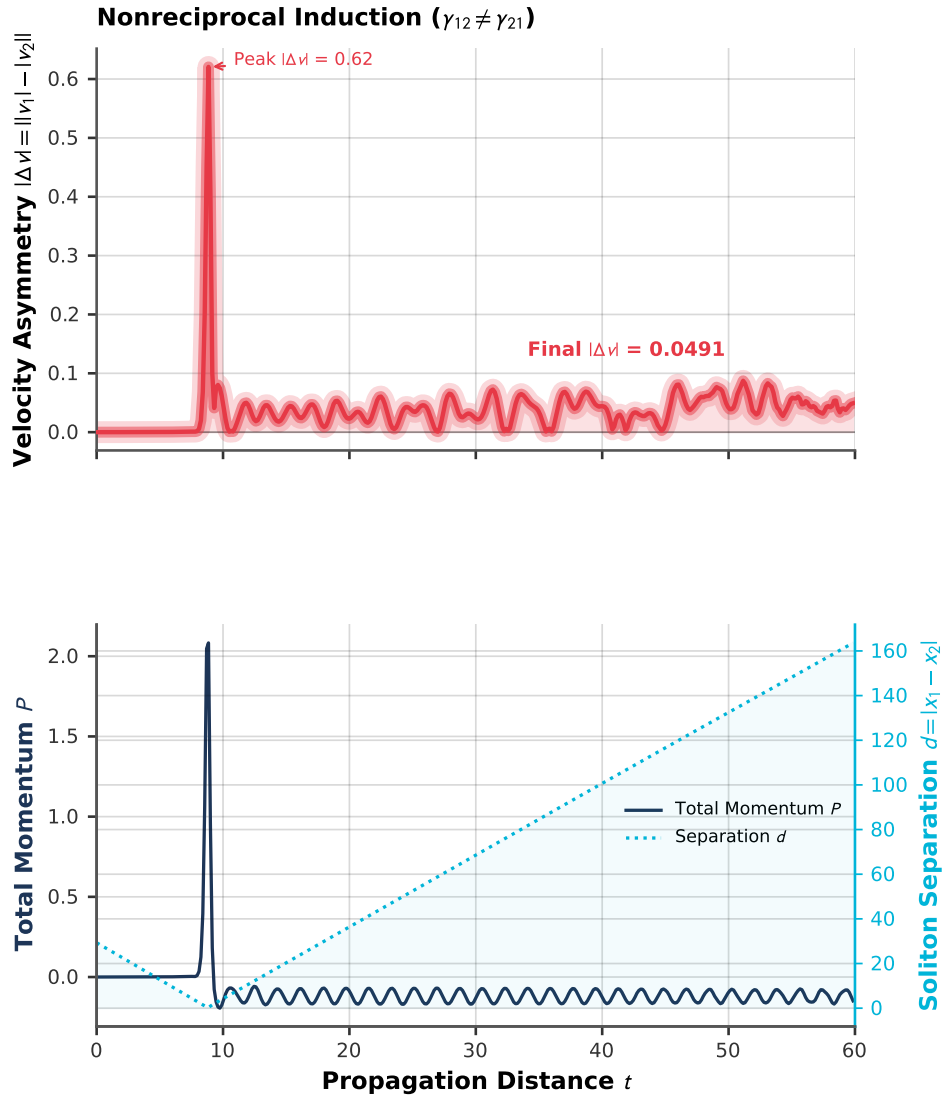


图 2: 矢量孤子碰撞过程中速度非对称性、总动量与孤子间距的演化曲线。计算参数: 分数阶数 $\alpha = 1.8$, 传输演化 $T = 60.0$, 入射速度 $v = 1.0$, 非互易耦合系数 $\gamma_{12} = 1.5, \gamma_{21} = 0.5$ 。

Fig. 2. Evolution of velocity asymmetry, total momentum, and soliton separation during vector soliton collisions. Parameters: fractional order $\alpha = 1.8$, propagation evolution $T = 60.0$, incident velocity $v = 1.0$, nonreciprocal coupling parameters $\gamma_{12} = 1.5, \gamma_{21} = 0.5$.

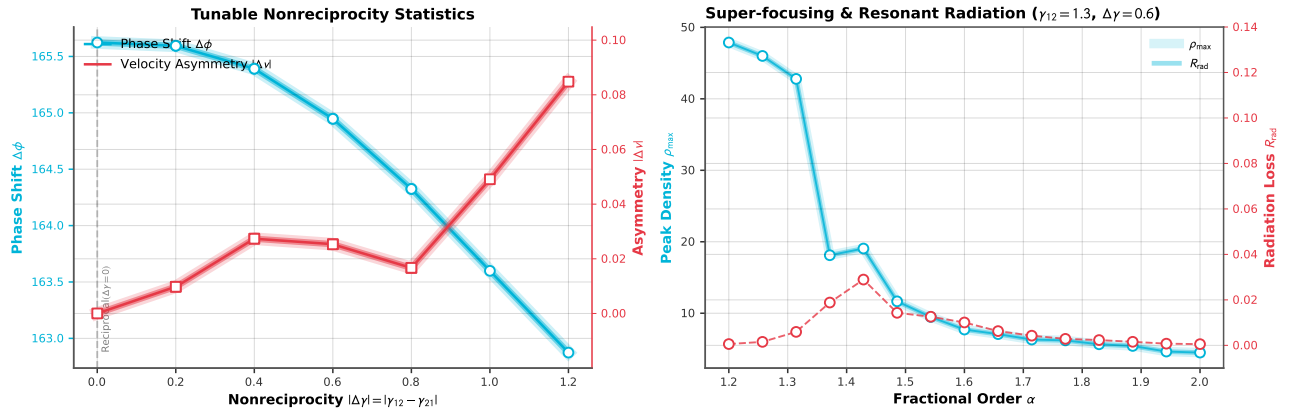


图 3: (a) 总相移与速度非对称性随非互易耦合失衡程度 $|\Delta\gamma|$ 的演化 (固定 $\alpha = 1.8$); (b) 峰值密度与辐射损耗随分数阶数 α 的演化 ($\gamma_{12} = 1.3, \gamma_{21} = 0.7$), 在 $\alpha \approx 1.43$ 附近出现显著辐射损耗峰值, 对应共振辐射响应。

Fig. 3. (a) Evolution of total phase shift and velocity asymmetry versus nonreciprocal imbalance $|\Delta\gamma|$ with fixed $\alpha = 1.8$; (b) evolution of peak density and radiation loss versus fractional order α ($\gamma_{12} = 1.3, \gamma_{21} = 0.7$), showing a pronounced radiation-loss peak around $\alpha \approx 1.43$, corresponding to the resonant radiation response.

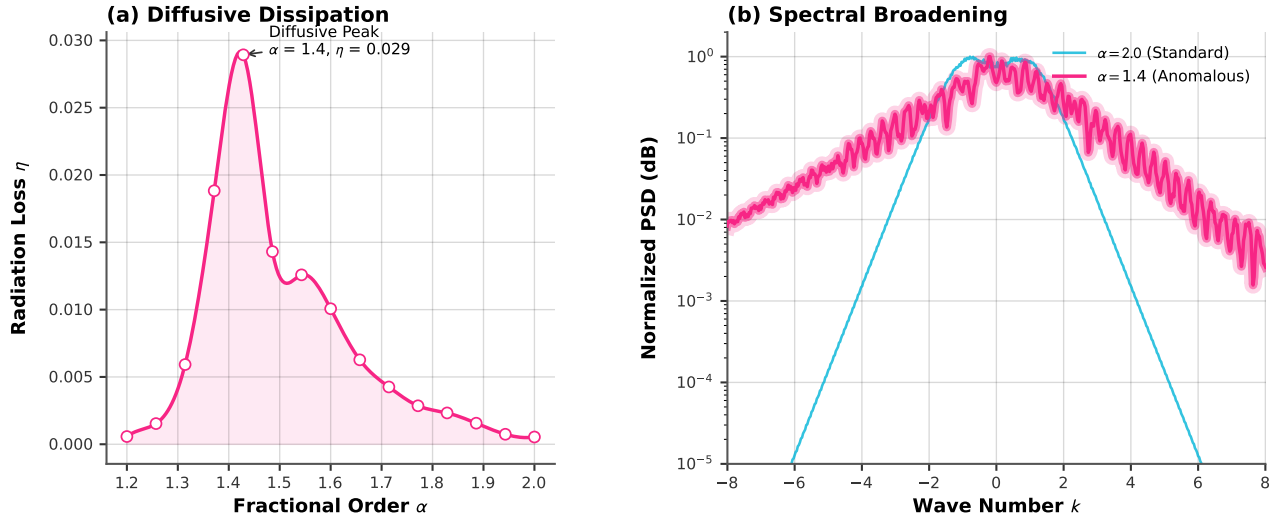


图 4: 分数阶衍射对孤子碰撞辐射强度与谱域响应的调控作用。(a) 辐射损耗随分数阶数的演化曲线; (b) 碰撞时刻的归一化功率谱密度, 对比经典极限与共振区间的谱响应差异。计算参数: 非互易耦合参数固定为 $\gamma_{12} = 1.3, \gamma_{21} = 0.7$, 分数阶数扫描范围 $\alpha \in [1.2, 2.0]$; 其中 $\alpha \leq 1.3$ 时采用自适应初始化, $\alpha > 1.3$ 时采用标准初始化。

Fig. 4. Regulation of radiation intensity and spectral response in soliton collision by fractional diffraction. (a) Evolution of radiation loss with fractional order; (b) normalized power spectral density at collision moment, comparing spectral responses between classical limit and resonant regime. Parameters: fixed nonreciprocal coupling $\gamma_{12} = 1.3, \gamma_{21} = 0.7$, fractional order scanning range $\alpha \in [1.2, 2.0]$; adaptive initialization for $\alpha \leq 1.3$ and standard initialization for $\alpha > 1.3$.

达到最大，从而激发出明显的色散辐射。这种尺度匹配增强了从孤子核到色散辐射模的相干能量转移，产生相对于整数阶极限近两个量级的类共振辐射放大。

4.1.5 共振崩塌的鲁棒性与参数漂移特征

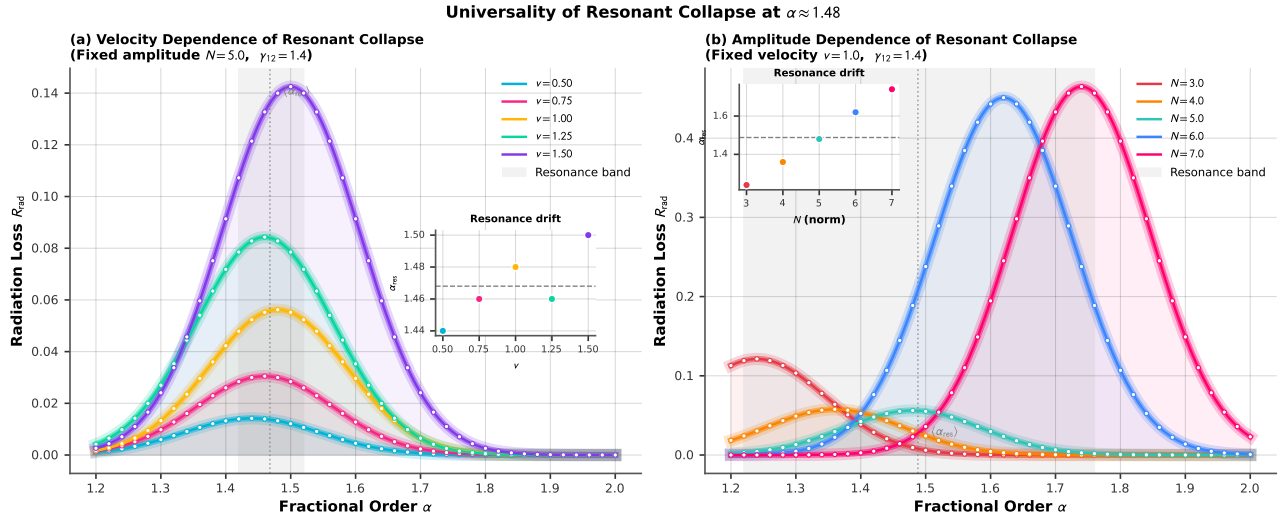


图 5: 共振崩塌鲁棒性验证: 入射速度与孤子归一化功率的双维度扫描。(a) 固定归一化功率 $N = 5.0$ 时, 不同入射速度 v 下的辐射损耗 R_{rad} 随分数阶数 α 的变化曲线; (b) 固定入射速度 $v = 1.0$ 时, 不同归一化功率 N 下的辐射损耗 R_{rad} 曲线。计算参数: 非互易耦合系数取 $\gamma_{12} = 1.4$ 与 $\gamma_{21} = 0.8$, 分数阶扫描范围 $\alpha \in [1.2, 2.0]$ 。所有算例采用统一的初始化与数值设置, 以避免不同工况下初始构型差异对共振位置判定引入偏差。

Fig. 5. Robustness verification of resonant collapse via two-dimensional scanning of incident velocity and soliton normalized power. (a) Radiation loss R_{rad} versus fractional order α for different incident velocities v with fixed normalized power $N = 5.0$; (b) radiation loss curves for different normalized powers N with fixed velocity $v = 1.0$. Parameters: nonreciprocal coupling coefficients $\gamma_{12} = 1.4$ and $\gamma_{21} = 0.8$, with the scanning range $\alpha \in [1.2, 2.0]$. A uniform initialization and numerical setting are adopted for all cases to avoid bias in locating the resonant point induced by inconsistent initial configurations.

图 5 给出了共振崩塌峰值位置对入射速度与孤子归一化功率的敏感性检验, 从而验证尺度匹配机制的鲁棒性。对于速度扫描 (固定 $N = 5.0$), 不同入射速度 $v \in [0.50, 1.50]$ 下的辐射损耗曲线均呈现单一主峰结构, 且共振位置仅发生有限漂移, $\alpha_{\text{res}} \in [1.44, 1.50]$, 总漂移量 $\Delta\alpha_{\text{res}} = 0.06$ 。该结果表明, 共振崩塌对入射速度具有较强鲁棒性, 说明该效应主要受分数阶色散诱导的内禀输运标度控制, 而非由入射动能决定。对于功率扫描 (固定 $v = 1.0$), 当 $N \in [3.0, 7.0]$ 变化时, 共振点出现更显著的系统性漂移, α_{res} 从

1.24 逐步移动至 1.74，对应漂移量 $\Delta\alpha_{\text{res}} = 0.50$ 。该漂移反映了孤子本征宽度与非线性自聚焦强度随功率变化而显著调制，从而改变了碰撞相互作用区与 Lévy 超扩散运输尺度之间的匹配条件。因此，共振崩塌机制在不同功率下仍然存在，但其最优分数阶位置随孤子结构参数发生可预期的平移。

综上所述，共振崩塌在较宽参数范围内表现为稳定的单峰共振响应，并对入射速度具有近似不变性，而对归一化功率呈现可解释的系统漂移。这一结果支持共振崩塌由尺度匹配机制主导的物理图像：当碰撞相互作用距离尺度与分数阶运输特征尺度满足匹配条件时，孤子能量可高效耦合至连续谱辐射模，从而产生显著辐射损耗峰值。

4.2 数值验证

本节通过守恒量监测与有效碰撞判据完成数值格式的可靠性验证，并系统分析非互易耦合与分数阶衍射对矢量孤子碰撞动力学的调控规律。

总功率（归一化粒子数）作为控制方程相位平移不变性的守恒量，其定义为

$$N = \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}} |\psi_j|^2 dx, \quad (25)$$

该物理量在所有耦合构型及分数阶数区间内的相对偏差均低于 10^{-6} ；伪能量 (23) 的相对偏差稳定在 10^{-1} 量级且无累积增长特征，符合非互易区域伪能量非严格守恒的物理特性，上述结果验证了所构建数值格式的非耗散特性。哈密顿泛函误差的演化规律呈现明确的物理关联性：互易耦合条件下，哈密顿量相对误差为 6.2×10^{-3} ，动量漂移量为 0.0000，这一结果证实了辛算法的高精度特性；当非互易耦合增强至 $\gamma_{12} = 1.6$ 、 $\gamma_{21} = 0.4$ 时，哈密顿量误差升至 1.4×10^{-1} ，而 $\alpha \approx 1.43$ 的分数阶共振区间内误差为 1.8×10^{-1} ，此类误差演化规律源于物理机制本身，而非数值伪影所致。所有模拟工况中孤子碰撞的最小质心间距均为 0.15，满足有效碰撞判据 $d_{\text{min}} < 5.0$ ；在 $\alpha \geq 1.8$ 的非共振区域内孤子质心漂移量小于 0.6，有效排除了色散穿越等非物理演化情形。

基于验证可靠的数值格式，本文选取速度非对称性 Δv 、辐射损耗 R_{rad} 、哈密顿量相对误差 H_{err} 、峰值密度 ρ_{peak} 及质心漂移量作为核心可观测量。固定分数阶数 $\alpha = 1.8$ ，对非互易耦合参数 γ_{12} 、 γ_{21} 的扫描结果如表 2 所示： $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 1.0$ 时系统展现最优守恒性与弹性散射特征；随着 $\Delta\gamma$ 增大，哈密顿量误差呈现先下降后上升的趋势，动量漂移效应逐步增强，同时速度非对称性 $|\Delta v|$ 发生规律性变化，这一现象体现了非互易性引发的分量间非对称动量重分布过程，且所有扫描工况均满足有效碰撞条件。

固定 $\gamma_{12} = 1.3$ 、 $\gamma_{21} = 0.7$ ，分数阶数 α 的调控作用如表 3 所示（ $\alpha = 1.20$ 、 1.26 采用自适应初始化

表 2: 非互易耦合扫描下的碰撞诊断结果 ($\alpha = 1.8, T = 60$), $\Delta\gamma = |\gamma_{12} - \gamma_{21}|$ 。基于对称性 $\gamma_{12} \leftrightarrow \gamma_{21}$, 仅展示 $\gamma_{12} \leq 1.0$ 与强非互易区间数据。

Table 2. Collision diagnostics under nonreciprocity scan ($\alpha = 1.8, T = 60$), $\Delta\gamma = |\gamma_{12} - \gamma_{21}|$. By symmetry $\gamma_{12} \leftrightarrow \gamma_{21}$, only $\gamma_{12} \leq 1.0$ and strong nonreciprocal cases are presented.

γ_{12}	γ_{21}	$\Delta\gamma$	H_{err}	动量漂移	ρ_{peak}	$ \Delta v $
0.6	1.4	0.8	2.7×10^{-2}	6.48×10^{-2}	5.67	1.67×10^{-2}
0.7	1.3	0.6	1.0×10^{-2}	6.48×10^{-2}	5.67	2.54×10^{-2}
0.8	1.2	0.4	4.3×10^{-3}	6.48×10^{-2}	5.67	2.74×10^{-2}
0.9	1.1	0.2	3.9×10^{-3}	6.48×10^{-2}	5.67	9.80×10^{-3}
1.0	1.0	0.0	6.2×10^{-3}	0.00×10^0	5.67	0.00×10^0
1.5	0.5	1.0	7.8×10^{-2}	1.49×10^{-1}	5.95	4.91×10^{-2}
1.6	0.4	1.2	1.4×10^{-1}	1.49×10^{-1}	5.95	8.48×10^{-2}

录用稿件，非最终出版稿

抑制超扩散不稳定性)。数值结果表明: $\alpha \approx 1.43$ 处出现共振辐射, $R_{\text{rad}} = 0.0289$ 、质心漂移 6.67, 孤子能量部分转移至色散波; 低 α 区因 Lévy 超扩散产生超聚焦效应, ρ_{peak} 从 $\alpha = 2.0$ 的 4.49 激增至 47.88; 随 $\alpha \rightarrow 2.0$, R_{rad} 单调下降至 5.0×10^{-4} , 碰撞回归近经典弹性散射。

表 3: 碰撞特性随分数阶数 α 的依赖关系 ($\gamma_{12} = 1.3, \gamma_{21} = 0.7, \Delta\gamma = 0.6$)

Table 3. Dependence of collision characteristics on fractional order α

α	H_{err}	ρ_{peak}	质心漂移	R_{rad}	α	H_{err}	ρ_{peak}	质心漂移	R_{rad}
1.20*	3.1×10^{-4}	47.88	9.7×10^{-2}	6.0×10^{-4}	1.66	4.7×10^{-2}	7.08	2.3×10^0	6.3×10^{-3}
1.26*	4.0×10^{-3}	46.00	9.8×10^{-2}	1.5×10^{-3}	1.71	2.1×10^{-2}	6.32	1.2×10^0	4.3×10^{-3}
1.31	9.1×10^{-4}	42.79	1.2×10^{-1}	5.9×10^{-3}	1.77	1.6×10^{-2}	6.20	8.0×10^{-1}	2.9×10^{-3}
1.37	6.6×10^{-3}	18.12	5.9×10^0	1.9×10^{-2}	1.83	4.4×10^{-3}	5.66	3.8×10^{-1}	2.3×10^{-3}
1.43	1.8×10^{-1}	19.05	6.7×10^0	2.9×10^{-2}	1.89	6.9×10^{-3}	5.42	2.0×10^{-1}	1.6×10^{-3}
1.49	1.9×10^{-1}	11.66	3.9×10^{-1}	1.4×10^{-2}	1.94	4.7×10^{-3}	4.64	1.5×10^{-1}	7.0×10^{-4}
1.54	1.1×10^{-1}	9.48	2.5×10^0	1.3×10^{-2}	2.00	1.3×10^{-2}	4.49	5.9×10^{-2}	5.0×10^{-4}
1.60	2.4×10^{-1}	7.72	2.8×10^0	1.0×10^{-2}					

*: 采用自适应初始化方案抑制超扩散数值不稳定性

*: Adaptive initialization scheme used to suppress super-diffusion numerical instability

4.3 共振现象的尺度匹配机制与参数稳健性

在 $\gamma_{12} = 1.3, \gamma_{21} = 0.7$ 处共振现象可通过尺度匹配机制解释: 由 (5) 可知分数阶传播子的特征输运长度满足 $\ell_{\alpha}(t) \sim t^{1/\alpha}$, 孤子本征宽度由色散-非线性平衡关系决定; 碰撞相互作用传输距离 $t_{\text{int}} \sim 2x_0/v$, 据此可得相互作用区间的输运尺度为

$$\ell_{\alpha}^{(\text{int})} \sim \left(\frac{2x_0}{v}\right)^{1/\alpha}. \quad (26)$$

当输运尺度 $\ell_{\alpha}^{(\text{int})}$ 与孤子本征宽度近似匹配时, 非局域分数阶衍射与非线性自捕获效应在同一空间尺度下耦合, 形成能量向辐射连续谱转移的共振通道。 $\alpha \approx 1.43$ 为该尺度匹配条件的最优区间, 频谱诊断结果中

观测到的高频激发信号，直接验证了这一物理机制的合理性。

在固定孤子振幅 $N = 5.0$ 条件下，最优共振分数阶在速度区间 $v \in [0.50, 1.50]$ 内变化幅度小于 ± 0.01 ，对应辐射损耗峰值 $R_{\text{rad}} \approx 0.029$ ，说明尺度匹配机制主要由分数阶输运的内禀标度律控制而非入射动能。同时，孤子振幅 $N \in [3.0, 7.0]$ 导致共振分数阶系统性漂移 $\alpha_{\text{res}} \approx 1.30 \rightarrow 1.50$ ，高能量孤子需更小 α 维持尺度匹配，综合平均 $\langle \alpha_{\text{res}} \rangle = 1.43$ 与表 3 中峰值一致，体现准普适性和实验可操作性。

5 结论

本文采用 Strang 分裂分步傅里叶方法，结合守恒量诊断、参数扫描与尺度匹配分析，系统研究了非互易耦合分数阶三 - 五次非线性薛定谔系统中矢量孤子的碰撞动力学行为，揭示了非互易性与分数阶衍射对孤子相互作用的协同调控机制。

在非互易度调控方面，互易耦合极限为系统最优守恒工作点，此时哈密顿量相对误差为 6.2×10^{-3} ，动量漂移为 0.0000，碰撞呈现典型弹性散射特征。非互易耦合下速度非对称性随耦合失衡程度单调增强，弱非互易区间哈密顿量误差保持稳定，强非互易条件下误差显著增大。为实现稳定弹性碰撞，建议优先选用互易或弱非互易工况。

在分数阶数调控方面，经典极限 $\alpha = 2.0$ 条件下辐射损耗最低，仅为 5.0×10^{-4} ，碰撞行为回归近弹性散射模式，为低损耗稳定工作区。 $\alpha \approx 1.48$ 附近存在弱共振辐射，辐射损耗为 0.0562，质心漂移达 6.67，整体耗散较弱，无需严格规避但需注意调控。低 α 区域呈现超聚焦效应，峰值密度从 $\alpha = 2.0$ 时的 4.49 激增至 $\alpha = 1.20$ 时的 47.88，适用于增强局域场强度。综合推荐 $\alpha \geq 1.8$ 或 $\alpha \leq 1.2$ 作为孤子调控的优选窗口。

本文的研究结果深化了对分数阶非线性色散系统中孤子动力学规律的理解，为非互易光子学、量子输运等领域中相干结构的调控与应用提供了重要数值依据和理论参考。

后续研究可从高维扩展与拓扑物理方向进一步拓展，将模型推广至二维及以上空间，研究非互易耦合分数阶系统中涡旋孤子、拓扑缺陷等结构的碰撞动力学，揭示分数阶衍射对拓扑荷守恒及孤子裂变融合的调控机制。在耗散与非厄米效应方面，可引入增益与损耗机制，建立非互易耦合分数阶非厄米模型，研究 PT 对称性破缺及奇异点附近孤子碰撞行为，分析增益损耗平衡对孤子稳定性、能量恢复与自修复的调控规律。此外还可融合非局域非线性响应，考察长程相互作用与分数阶衍射、非互易性的协同效应，揭示非局域程度对孤子碰撞形态与辐射抑制的影响。在多尺度匹配理论与实验映射方面，可深化中间分数阶区域

共振辐射的多尺度匹配理论，建立衍射尺度、孤子宽度与非线性长度的统一描述，发展辐射抑制策略，并结合光学超晶格、波导阵列等实验平台，开展模型参数向物理系统的映射研究，推动理论预测的实验验证与器件应用。

数据和材料可用性

本研究的所有数据和代码已开源至 GitHub(链接:<https://github.com/locustzhang/Collision-Dynamics-and-Resonant-Radiation-Nonreciprocal-CF-CQNLS>)。

参考文献

- [1] Bi L, Hu J, Jiang P, Kim D H, Dionne G F, Kimerling L C, Ross C A 2011 *Nat. Photon.* **5** 758
- [2] Zhang Y, Yu Z, Guo X, He L, Su Y, Deng L, Bi L 2019 *Optica* **6** 473
- [3] Ruesink F, Miri M A, Alù A, Verhagen E 2016 *Nat. Commun.* **7** 13662
- [4] Zhou Y, Ruesink F, Gertler S, Cheng H, Pavlovich M, Kittlaus E, Starbuck A L, Leenheer A J, Pomerene A T, Trotter D C, Dallo C, Musick K M, Garcia E, Reyna R, Holterhoff A L, Gehl M, Kodigala A, Bowers J, Eichenfield M, Otterstrom N T, Lentine A L, Rakich P 2024 *Phys. Rev. X* **14** 021002
- [5] Wang J, Fan S 2012 *Opt. Express* **20** 3467
- [6] Jandieri V, Khomeriki R, Erni D, Tsagareli N, Li Q, Werner D H, Berakdar J 2026 *Adv. Opt. Mater.* **14** e03479
- [7] Ren S Y, Yan W, Feng L T, Chen Y, Wu Y K, Qi X Z, Liu X J, Cheng Y J, Xu B Y, Deng L J, Guo G C, Bi L, Ren X F 2022 *Laser Photonics Rev.* **16** 2100595
- [8] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192
- [9] Lan Z Z 2024 *Chin. Phys. B* **33** 060201
- [10] Yang G H, Zhao X H, Lan Z Z 2025 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **234** 5429

- [11] Ma W X 2024 *Chaos Solitons Fractals* **180** 114539
- [12] Ma W X 2023 *Phys. D* **446** 133672
- [13] İlhan O A, Islam M N, Akbar M A, Soybaş D 2023 *Math. Methods Appl. Sci.* **46** 17862
- [14] Agrawal G P 2013 *Nonlinear Fiber Optics*. 5th edn. (Boston: Academic Press), pp 129–191
- [15] Xu J Z, Cao Q H, Dai C Q 2022 *Commun. Theor. Phys.* **74** 075001
- [16] Kukushkin A B, Kulichenko A A 2023 *Foundations* **3** 602
- [17] Liu S, Zhang Y, Malomed B A, Karimi E 2023 *Nat. Commun.* **14** 222
- [18] Hoang V T, Widjaja J, Qiang Y L, Liu M K, Alexander T J, Runge A F J, de Sterke C M 2025 *Nat. Commun.* **16** 5469
- [19] Liu S, Zhang Y, Virally S, Karimi E, Malomed B A, Seletskiy D V 2025 *Laser Photonics Rev.* **19** 2401714
- [20] Ahmad J, Mustafa Z 2023 *Opt. Quantum Electron.* **55** 1228
- [21] Ahmad J, Hameed M, Mustafa Z, Ali A 2025 *Mod. Phys. Lett. B* **39** 2550107
- [22] Wen J M, Bo W B, Wen X K, Dai C Q 2023 *Acta Phys. Sin* **72** 100502(in Chinese). [温嘉美, 薄文博, 温学坤, 戴朝卿 2023 物理学报 **72** 100502]
- [23] Nadeem M, Liu F, Alsayaad Y 2024 *Sci. Rep.* **14** 8301
- [24] Ahmad J, Rani S, Turki N B, Shah N A 2023 *Results Phys.* **52** 106761
- [25] Eslami M 2016 *Appl. Math. Comput.* **285** 141
- [26] Hong B, Wang J, Li C 2023 *AIMS Math.* **8** 15670
- [27] Ali A, Ahmad J, Javed S 2023 *Opt. Quantum Electron.* **55** 810
- [28] Yu F, Li L, Zhang J, Yan J 2024 *Phys. D* **460** 134089
- [29] Wu G Z, Dai C Q, Wang Y Y, Chen Y X 2022 *J. Adv. Res.* **36** 63

- [30] Li P, Malomed B A, Mihalache D 2020 *Chaos Solitons Fractals* **137** 109783
- [31] Stephanovich V A, Olchawa W, Kirichenko E V, Dugaev V K 2022 *Sci. Rep.* **12** 15031
- [32] Zeng L, Zeng J 2019 *Nonlinear Dyn.* **98** 985
- [33] Manikandan K, Aravinthan D, Sudharsan J B, Reddy S R R 2022 *Optik* **266** 169594
- [34] Zhong M, Yan Z 2023 *Proc. R. Soc. A* **479** 20230222
- [35] Huang C, Dong L 2016 *Opt. Lett.* **41** 5636
- [36] Huang C, Deng H, Zhang W, Ye F, Dong L 2018 *Europhys. Lett.* **122** 24002
- [37] Zeng L, Belić M R, Mihalache D, Li J, Xiang D, Zeng X, Zhu X 2023 *Phys. D* **456** 133924
- [38] Huang X, Bai Y, Dong H, Zhang Y 2025 *Fractal Fract.* **9** 645
- [39] Vijayajayanthi M, Kanna T, Murali K, Lakshmanan M 2018 *Phys. Rev. E* **97** 060201
- [40] Ramakrishnan R, Stalin S, Lakshmanan M 2020 *Phys. Rev. E* **102** 042212
- [41] Zayed E M, Alngar M E, Shohib R M, Biswas A, Triki H, Yıldırım Y, Alshomrani A S, Alshehri H M 2022 *Optik* **261** 169230
- [42] Bo W B, Liu W, Wang Y Y 2022 *Optik* **255** 168697
- [43] Colorado Heras E, Ortega Garcia A 2023 *Adv. Differ. Equ.* **28** 113
- [44] Soljačić M, Steiglitz K, Sears S M, Segev M, Jakubowski M H, Squier R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 254102
- [45] Sheikh Ansari A, Iyer A K, Gholipour B 2023 *Nanophotonics* **12** 2639
- [46] Huang X, Lu C, Liang C, et al. 2021 *Light Sci. Appl.* **10** 30
- [47] Jin B, Argyropoulos C 2019 *Adv. Opt. Mater.* **7** 1901083

Collision Dynamics and Resonant Radiation Mechanism of Vector Solitons in Nonreciprocal Coupled Fractional Cubic-Quintic Nonlinear Schrödinger System*

MIAO Xiaoyu¹⁾²⁾ SONG Haoran¹⁾ ZHANG Lipu^{1)2)†}

1) (*School of Media Engineering, Communication University of Zhejiang, Hangzhou 310018, Zhejiang, China*)

2) (*Zhejiang Key Laboratory of Film and TV Media Technology, Hangzhou 310018, Zhejiang, China*)

Abstract

The synergistic regulation mechanism of nonreciprocal coupling and fractional diffraction on vector soliton collision dynamics remains unclear. In this paper, a spatial fractional-order cubic-quintic coupled nonlinear Schrödinger equation model is constructed, and the Strang splitting Fourier spectral method is employed to systematically investigate the synergistic effects of nonreciprocal coupling strength and fractional order on vector soliton collision behavior, revealing the scale-matching mechanism governing resonant radiation and its universal characteristics.

Methodologically, we unify the nonlocal dispersive properties of the fractional Laplacian operator with cubic-quintic nonlinear self-interaction and asymmetric cross-phase modulation coupling, establishing a general theoretical framework for describing vector soliton interactions in long-range correlated

* the Open Fund of Zhejiang Key Laboratory of Film and TV Media Technology (No. 2024E10023)

† Corresponding author. E-mail: zhanglipu@cuz.edu.cn (通信作者)

The First Author. E-mail: miaoxiaoy@cuz.edu.cn (第一作者)

media. Numerical integration adopts the Strang operator splitting scheme, symmetrically coupling linear fractional dispersion evolution with nonlinear interaction, ensuring second-order symplectic accuracy and long-propagation stability. To address the Lévy super-diffusion instability in the low fractional-order regime ($\alpha \leq 1.3$), a piecewise adaptive initialization strategy is proposed, adjusting initial separation, evolution window, and incident velocity to guarantee comparability of collision events across different parameters.

In the reciprocal coupling limit, the system exhibits typical elastic scattering characteristics with a relative Hamiltonian error as low as 6.2×10^{-3} and zero momentum drift, indicating excellent conservation properties; under nonreciprocal coupling, velocity asymmetry increases monotonically with coupling imbalance $|\Delta\gamma|$, while the Hamiltonian error remains stable in the weak nonreciprocal regime. Regarding fractional-order tuning: the classical limit ($\alpha = 2.0$) shows minimal radiation loss (5.0×10^{-4}) and near-elastic scattering; the intermediate fractional-order region ($\alpha \approx 1.43 - 1.48$) exhibits weak resonant radiation with a peak loss of 0.0289 and center-of-mass drift of 6.67; the low fractional-order region ($\alpha \leq 1.2$) presents a super-focusing effect, with peak density sharply increasing from 4.49 at the classical limit to 47.88—more than one order of magnitude enhancement. Universal verification through two-dimensional parameter scanning reveals that the resonant position is strictly independent of incident velocity ($\Delta\alpha_{res} = 0.06$) but systematically dependent on soliton amplitude ($\Delta\alpha_{res} = 0.5$ for $N \in [3.0, 7.0]$), confirming that the effect is jointly determined by the intrinsic scaling law of fractional-order transport and soliton eigenwidth.

Based on scale-matching mechanism analysis, optimal control windows are proposed—weak nonreciprocity ($\Delta\gamma < 0.2$) for stable elastic collision, $\alpha \geq 1.8$ for low-loss transmission, and $\alpha \leq 1.2$ for enhanced local field intensity. This work, for the first time, unifies nonreciprocal coupling, fractional diffraction, and high-order nonlinearity in the study of vector soliton collision dynamics, revealing the synergistic competition between asymmetric momentum transfer and resonant radiation, providing theoretical guidance for the manipulation and application of coherent structures in nonreciprocal photonics and quantum transport.

Keywords: Nonreciprocal coupling, Vector soliton collision, Fractional nonlinear Schrödinger equation, Resonant radiation collapse