

# 含时非厄米 $SU(1,1)$ 和 $SU(2)$ 系统下的Berry相位

古燕<sup>1)†</sup> 陆展鹏<sup>2)</sup>

1) (山西工程科技职业大学, 晋中 030619)

2) (忻州师范学院物理系, 忻州 034000)

本文研究了由 $SU(1,1)$ 和 $SU(2)$ 李代数生成元所构成的含时非厄米系统的Berry相位, 其分别对应于周期驱动外场下的一维谐振子及任意参数下的单个自旋粒子模型. 具体来说, 基于广义规范变换方法, 通过引入含时厄米的且非幺正的变换算符, 系统可变换为不显含时间的形式, 并可导出系统的精确解及其对应的非绝热Berry相位. 结果表明, 对于 $SU(2)$ 系统, 存在奇异点 $G_c(\omega) = \frac{\Omega \pm \omega}{2}$ , 在该点处等效本征值发散, Berry相位从实数变为复数, 对应厄米相的自发破缺. 而 $SU(1,1)$ 系统的能谱始终保持实数, Berry相位为纯实数, 无奇异点出现. 该对比揭示了 $SU(1,1)$ 非紧致群与 $SU(2)$ 紧致群结构对非厄米系统几何相位的根本性影响. 该研究结果为非厄米系统中Berry相位的理论分析提供了新的视角和理解.

关键词: 非厄米, Berry相位, 广义规范变换

PACS: 02.20.Sv, 03.65.Fd, 03.65.Ta, 03.65.Vf

## 1 引言

在标准量子理论中, 可观测的量与厄米算符相关联, 而时间演化规律是由厄米哈密顿算符所决定的<sup>[1]</sup>. 哈密顿算符的厄米性既确保了能量谱的实数性质, 也确保了时间演化的幺正性. 然而, 哈密顿算符的厄米性确保是实谱仅仅是充分条件而非必要条件. 非厄米哈密顿算符也会出现实能谱, 前提是该哈密顿算符需要满足一定的对称性, 如宇称时间对称性(即 $PT$ 对称)<sup>[2]</sup>. 随着实验技术的发展, 在超导<sup>[3,4]</sup>, 光学系统<sup>[5-8]</sup>, 微波腔<sup>[9]</sup>, 原子扩散<sup>[10]</sup> 和核磁共振<sup>[11]</sup>等各种实验中, 已经实现了 $PT$ 对称的非厄米系统. 近年来, 关于 $PT$ 对称非厄米谐振子系统的研究已取得诸多进展, 包括实谱的获得<sup>[12]</sup>, 二维含时系统的精确解<sup>[13]</sup>, 开放边界下奇异点处的行为<sup>[14]</sup>, 时变Dyson映射与度量的构造<sup>[15]</sup> 以及光力学系统中机械振子的动力学特性<sup>[16]</sup>等. 在非厄

\* 山西省基础研究计划自由探索类青年项目(批准号:202403021212025)

† 通信作者. E-mail: guyan@sxgkd.edu.cn

米系统中, 具有实能谱的除了 $PT$ 对称哈密顿算符外, 还有一类被称为赭厄米哈密顿算符, 其可以通过相似变换转换成厄米哈密顿算符<sup>[17-19]</sup>. 通常由非厄米哈密顿算符 $H$ 和 $H^\dagger$  的一对薛定谔方程来控制非厄米哈密顿算符的量子态时间演化<sup>[20]</sup>. 而 $H$ 和 $H^\dagger$  的态矢量之间需要通过合适的度规算符建立起联系<sup>[21,22]</sup>. 关于赭厄米系统的研究也有许多, 例如2020年, Cheniti<sup>[23]</sup> 提出了赭厄米系统的绝热定理和广义几何相位. 2023年, Zerimeche<sup>[24]</sup> 使用了赭厄米性关系将反 $PT$ 对称谐振子与倒置谐振子联系起来. 同年, 梁九卿等人发现, 在 $SU(1,1)$  和 $SU(2)$  的含时系统中, 可以通过引入广义规范变换将赭厄米哈密顿算符转化成厄米哈密顿算符<sup>[25]</sup>.

随着人们对非厄米量子系统产生日益浓厚的兴趣, 诸如Berry相位、绝热非阿贝尔几何相位以及非绝热阿贝尔几何相位等几何相位的概念已逐渐从厄米量子系统扩展到了非厄米量子系统. Berry相位是理解量子态在循环绝热演化过程的关键物理量. 当推广到具有 $PT$ 对称的非厄米系统时, Berry相位会变为复数. 例如, 梁世东等<sup>[26]</sup> 推广了复Berry相位以识别拓扑不变性, Singhal等<sup>[27]</sup>首次实现了实验测量, 此后非绝热非阿贝尔几何相位<sup>[28]</sup>及动力学相位差异引发的几何相位<sup>[29]</sup>相继被推广至非厄米系统.

之前的研究工作表明, 一个 $PT$ 对称的非厄米哈密顿算符可以规范等价于厄米哈密顿算符, 该哈密顿算符是由 $SU(1,1)$ 李代数生成元构成的<sup>[30,31]</sup>, 实际上该系统对应着一维周期驱动谐振子模型. 而对于具有赭厄米对称性的含时 $SU(2)$ 系统, 非厄米哈密顿算符中存在实谱<sup>[32]</sup>. 而利用广义规范变换方法, 可以对 $SU(1,1)$ 和 $SU(2)$ 系统的含时赭厄米哈密顿算符进行解析求解<sup>[25]</sup>. 基于以上的研究进展, 本文研究了周期驱动外场下的一维非厄米谐振子和复杂时变磁场中的自旋粒子两类系统的Berry相位. 通过广义规范变换方法对含时非厄米哈密顿量进行解析求解, 可以精确确定系统中奇异点的位置.

## 2 理论模型

本文考虑一个含时非厄米哈密顿算符, 其表示如下:

$$\hat{H}(t) = \Omega \hat{K}_0 + G \left( \hat{K}_+ e^{i\phi(t)} - \hat{K}_- e^{-i\phi(t)} \right), \quad (1)$$

其中 $\phi(t) = \omega t$ ,  $\omega$ 表示驱动频率,  $\Omega$ 和 $G$ 是实参数. 系统的哈密顿算符(1)可以由 $SU(1,1)$ 和 $SU(2)$ 李代数生成元 $\hat{K}_0, \hat{K}_+, \hat{K}_-$  构成, 其满足对易关系:

$$\begin{cases} [\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm \hat{K}_\pm, \\ [\hat{K}_+, \hat{K}_-] = D \hat{K}_0. \end{cases} \quad (2)$$

在对易关系(2)中,  $SU(1,1)$ 和 $SU(2)$ 系统分别对应着 $D = -2$ 和 $2$ , 且存在 $\hat{K}_0^\dagger = \hat{K}_0$ 和 $\hat{K}_\pm^\dagger = \hat{K}_\mp$ . 系统的哈密顿算符(1)是非厄米的哈密顿算符, 表示为

$$\hat{H}(t) \neq \hat{H}^\dagger(t) = \Omega \hat{K}_0 - G \left( \hat{K}_+ e^{i\phi(t)} - \hat{K}_- e^{-i\phi(t)} \right). \quad (3)$$

### 3 研究方法

为求解含时非厄米哈密顿算符 $\hat{H}(t)$ , 这里采用广义规范变换方法. 为此, 构造一个含时变换算符如下:

$$\hat{R}(t) = \exp \left[ -\frac{\eta}{2} \left( \hat{K}_+ e^{i\phi(t)} + \hat{K}_- e^{-i\phi(t)} \right) \right], \quad (4)$$

其中,  $\eta$ 为待定实参数. 含时变换算符 $\hat{R}(t)$ 是非么正算符(即满足关系式 $\hat{R}^\dagger \neq \hat{R}^{-1}$ ), 且是厄米算符(即 $\hat{R}^\dagger(t) = \hat{R}(t)$ ). 这里考虑对偶薛定谔方程(取自然单位,  $\hbar = 1$ ):

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_r = \hat{H}(t) |\psi\rangle_r, \quad (5)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_l = \hat{H}^\dagger(t) |\psi\rangle_l, \quad (6)$$

其 $|\psi\rangle_r$ 和 $|\psi\rangle_l$ 分别代表非厄米哈密顿算符 $\hat{H}(t)$ 的右矢态和左矢态. 通过含时变换算符 $\hat{R}(t)$ 的广义规范变换后得到等效哈密顿算符 $\hat{H}'(t)$ , 其变换后薛定谔方程表示为:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle_r = \hat{H}'(t) |\psi'\rangle_r, \quad (7)$$

其中 $|\psi'\rangle_r = \hat{R}(t) |\psi\rangle_r$ . 那么, 根据(5)和(7)推导出新规范下的等效哈密顿算符 $\hat{H}'(t)$ 表达式:

$$\hat{H}'(t) = \hat{R}(t) \hat{H}(t) \hat{R}^{-1}(t) - i \hat{R}(t) \frac{\partial}{\partial t} \hat{R}^{-1}(t). \quad (8)$$

为了化简(8), 这里需要借助对易关系式(2), 以及贝克-霍斯多夫-坎贝尔公式(the Baker-Hausdorff-Campbell formula), 能够推导出下列关系式<sup>[33]</sup>:

$$\hat{R}(t) \hat{K}_+ \hat{R}^{-1}(t) = \hat{K}_+ \cosh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \hat{K}_- e^{-2i\phi(t)} \sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \hat{K}_0 e^{-i\phi(t)} \sqrt{\frac{D}{2}} \sinh(\alpha), \quad (9)$$

$$\hat{R}(t) \hat{K}_- \hat{R}^{-1}(t) = \hat{K}_- \cosh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \hat{K}_+ e^{2i\phi(t)} \sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \hat{K}_0 e^{i\phi(t)} \sqrt{\frac{D}{2}} \sinh(\alpha), \quad (10)$$

$$\hat{R}(t) \hat{K}_0 \hat{R}^{-1}(t) = \hat{K}_0 \cosh(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{2D}} \sinh(\alpha) \left( \hat{K}_+ e^{i\phi(t)} - \hat{K}_- e^{-i\phi(t)} \right), \quad (11)$$

$$i\hat{K}(t) \frac{\partial}{\partial t} \hat{K}^{-1}(t) = \frac{d\phi}{dt} \left[ -2 \sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \hat{K}_0 - \frac{1}{\sqrt{2D}} \sinh(\alpha) \left( \hat{K}_+ e^{i\phi(t)} - \hat{K}_- e^{-i\phi(t)} \right) \right], \quad (12)$$

其中  $\alpha = \eta \sqrt{\frac{D}{2}}$ . 结合上述(8)至(12)式, 能够得到一个不含时的等效哈密顿算符:

$$\hat{H}' = 2\Gamma(\omega) \hat{K}_0, \quad (13)$$

其中  $\Gamma(\omega)$  表示为:

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \pm \frac{(\Omega + \omega)^2 + 2DG^2}{\sqrt{(\Omega + \omega)^2 - 2DG^2}} - \omega \right]. \quad (14)$$

以下辅助条件是导出等效哈密顿算符(13)所必需的:

$$G \cosh(\alpha) = -\frac{\Omega + \omega}{\sqrt{2D}} \sinh(\alpha). \quad (15)$$

该条件是使等效哈密顿算符  $\hat{H}'$  不含时的必要条件, 且要求  $\alpha$  为实数(对于  $SU(2)$  系统)或纯虚数(对于  $SU(1,1)$  系统). 等效哈密顿算符(13)的本征方程表示为:

$$\hat{H}' |n\rangle = \lambda_n |n\rangle. \quad (16)$$

借助(7)和(16)式, 可以得到原规范中薛定谔方程(5)含时形式的右矢态:

$$|\psi_n(t)\rangle_r = e^{-i\lambda_n t} \hat{K}^{-1}(t) |n\rangle \quad (17)$$

对偶薛定谔方程(5)和(6)中双正交的左矢态  $|\psi\rangle_l$  和右矢态  $|\psi\rangle_r$  满足归一化条件:

$${}_l\langle \psi | \psi \rangle_r = {}_r\langle \psi | \hat{\chi}^\dagger | \psi \rangle_r = {}_l\langle \psi | \hat{\chi}^{-1} | \psi \rangle_l = 1. \quad (18)$$

考虑到右矢态(17)是显含时间的形式, 此时(18)重新表示为:

$${}_l\langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle_r = {}_r\langle \psi_n(t) | \hat{\chi}^\dagger | \psi_m(t) \rangle_r = {}_l\langle \psi_n(t) | \hat{\chi}^{-1} | \psi_m(t) \rangle_l = \delta_{nm}. \quad (19)$$

为了满足归一化条件(19), 左矢态表示为:

$$|\psi_n(t)\rangle_l = e^{-i\lambda_n t} \hat{K}(t) |n\rangle. \quad (20)$$

借助度规算符<sup>[34]</sup>可以将含时的右矢态 $|\psi_n(t)\rangle_r$ 转化为左矢态 $|\psi_n(t)\rangle_l$ , 表示如下:

$$|\psi_n(t)\rangle_l = \hat{\chi}|\psi_n(t)\rangle_r. \quad (21)$$

此时, 度规算符是厄米算符 $\hat{\chi} = \hat{\chi}^\dagger$ , 其表示为:

$$\hat{\chi} = \hat{R}^2(t). \quad (22)$$

## 4 Berry相位

为了得到非厄米哈密顿算符(1)的Berry相位, 需要对偶薛定谔方程的右矢态(17)进一步分析. 根据(8)和(16)式, 右矢态(17)的精确解重新表示为:

$$\begin{aligned} |\psi_n(t)\rangle_r &= e^{-i \int_0^t \langle n | \hat{R} \hat{H} \hat{R}^{-1} - i \hat{R} \frac{\partial}{\partial t} \hat{R}^{-1} | n \rangle dt} \hat{R}^{-1}(t) | n \rangle \\ &= e^{-i \int_0^t \langle n | \hat{R} \hat{H} \hat{R}^{-1} | n \rangle dt} e^{i \gamma_n(T)} \hat{R}^{-1}(t) | n \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

该精确解(23)的指数相位因子的第一项为动力学相, 第二项 $\gamma_n(T)$ 被定义为Berry相位. 借助变换关系(12)和辅助条件(15), 得到一个周期 $T$ 的非绝热Berry相位的表达式:

$$\begin{aligned} \gamma_n(T) &= i \int_0^T \langle n | \hat{R} \frac{\partial}{\partial t} \hat{R}^{-1} | n \rangle dt \\ &= -2 \sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \oint \langle n | \hat{K}_0 | n \rangle d\phi \\ &= -2k_n \oint \sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) d\phi, \end{aligned} \quad (24)$$

该积分适用于周期 $T$ 内参数 $(\phi(t) = \omega t)$ 的非绝热演化, 且要求 $\hat{R}(t)$ 在周期始末回到同一规范(即 $\hat{R}(T) = \hat{R}(0)$ ). 其参数函数 $\sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)$ 表示为:

$$\sinh^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \pm \frac{\Omega + \omega}{2\sqrt{(\Omega + \omega)^2 - 2DG^2}} - \frac{1}{2}. \quad (25)$$

对于 $SU(1,1)$ 系统(即 $D = -2$ ), 根据双曲函数和三角函数的转换关系 $\sinh(i\eta) = i \sin(\eta)$ , 参数函数(25)简化为:

$$\sin^2 \left( \frac{\eta}{2} \right) = \pm \frac{\Omega + \omega}{2\sqrt{(\Omega + \omega)^2 + 4G^2}} + \frac{1}{2}. \quad (26)$$

对于 $SU(2)$ 系统(即 $D = 2$ ), 参数函数(25)简化为:

$$\sinh^2\left(\frac{\eta}{2}\right) = \pm \frac{\Omega + \omega}{2\sqrt{(\Omega + \omega)^2 - 4G^2}} - \frac{1}{2}. \quad (27)$$

左矢态(20)和右矢态(17)具有相同的Berry相位. 下面分别讨论这两个系统下Berry相位的具体表达式.

#### 4.1 $SU(1, 1)$ 系统

首先考虑 $SU(1, 1)$ 系统,  $SU(1, 1)$ 李代数生成元可用玻色子产生算符 $\hat{a}^\dagger$ 和湮灭算符 $\hat{a}$ 来表示, 其满足下列关系式<sup>[35]</sup>:

$$\begin{aligned} \hat{K}_0 &= \frac{1}{2} \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \\ \hat{K}_+ &= \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger)^2, \\ \hat{K}_- &= \frac{1}{2} (\hat{a})^2. \end{aligned} \quad (28)$$

谐振子的哈密顿算符 $\hat{K}_0$ 满足本征方程:

$$\hat{K}_0 |n\rangle = \frac{1}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle, \quad (29)$$

其本征值即为系统的能量, 且 $|n\rangle$ 表示Fock态,  $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle$ . 结合(13)和(29), 新规范变换下的等效哈密顿算符 $\hat{H}'$ 的本征值是:

$$\lambda_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \Gamma(\omega), \quad (30)$$

其 $\Gamma(\omega)$ 表示为:

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \pm \frac{(\Omega + \omega)^2 - 4G^2}{\sqrt{(\Omega + \omega)^2 + 4G^2}} - \omega \right]. \quad (31)$$

由此可知,  $SU(1, 1)$ 系统的非厄米哈密顿能谱恒为实数. 此时(13)式看作频率为 $\Gamma(\omega)$ 的谐振子哈密顿算符. 随着参数 $G$ 的增强, 谐振子等效频率 $\Gamma(\omega)$ 减小, 能量单调减少且没有任何奇异点出现. 因此, 奇异点不是非厄米系统的必然结果. 借助Berry相位表达式(24)和参数函数(26), 一个周期 $T(T = 2\pi/\omega)$ 的非绝热Berry相位具体表示为:

$$\gamma_n(T) = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( 1 \pm \frac{\Omega + \omega}{\sqrt{(\Omega + \omega)^2 + 4G^2}} \right). \quad (32)$$

这里表示Berry相位是实数. 非厄米 $SU(1, 1)$ 系统无奇异点是与 $SU(1, 1)$ 群的非紧致性密切相关. 非紧致群表

示空间是无限维的且无上界, 其生成元 $\hat{K}_\pm$ 的期望值无下界, 这使得系统对非厄米扰动具有更强的鲁棒性, 不会在有限参数下出现能谱的简并与复转变. 相反,  $SU(2)$ 作为紧致群, 表示空间有限维, 能谱有界, 更容易在临界参数处发生谱简并.

## 4.2 $SU(2)$ 系统

接着考虑 $SU(2)$ 系统, 将 $SU(2)$ 李代数生成元看作自旋算符. 此时非厄米哈密顿算符(1)重新表示为:

$$\hat{H}(t) = \Omega \hat{S}_z + G \left( \hat{S}_+ e^{i\phi(t)} - \hat{S}_- e^{-i\phi(t)} \right), \quad (33)$$

其用来描述复杂时变磁场中的自旋粒子. 自旋为 $j$ 时,  $\hat{S}_z$ 的本征方程定义为:

$$\hat{S}_z |j, n\rangle = n |j, n\rangle. \quad (34)$$

其本征值 $n = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ . 新规范变换下的等效哈密顿算符 $\hat{H}'$ 的本征值由下式给出:

$$\lambda_n = 2n\Gamma(\omega), \quad (35)$$

其 $\Gamma(\omega)$ 表示为:

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \pm \frac{(\Omega + \omega)^2 + 4G^2}{\sqrt{(\Omega + \omega)^2 - 4G^2}} - \omega \right]. \quad (36)$$

此本征值不同于 $SU(1,1)$ 系统(30), 在参数 $G$ 的奇异点处能量发散. 该奇异点是 $G_c(\omega) = \frac{\Omega + \omega}{2}$ . 当增大参数 $G$ 且超过奇异点后, Berry相位变为复数. 结果表明, 在 $SU(2)$ 系统中, 随着系统中参数 $G$ 增加到奇异点以上, 可以观察到谱相变, 即从完全实能谱转变为复能谱. 借助Berry相位表达式(24)和参数函数(27), 一个周期演化的非绝热Berry相位具体表示为:

$$\gamma_n(T) = 2\pi n \left( 1 - \frac{\Omega + \omega}{\sqrt{(\Omega + \omega)^2 - 4G^2}} \right). \quad (37)$$

在外场缓慢变化的极限下, 即 $\frac{d\phi(t)}{dt} = \omega \rightarrow 0$ , 绝热Berry相位是:

$$\gamma_n(T) = 2\pi n \left( 1 - \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 4G^2}} \right). \quad (38)$$

此时奇异点变为 $G_c = \Omega/2$ , 仍然存在复域.

## 5 物理讨论

这里我们讨论 $SU(2)$ 系统中奇异点的物理机制. 首先通过广义规范变换将原哈密顿量(1) 在新规范下变为不显含时的厄米哈密顿量(13), 变换关系简化为 $\hat{H}' = \hat{R}\hat{H}\hat{R}^{-1}$ , 且 $\hat{H}'^\dagger = \hat{R}^{-1}\hat{H}^\dagger\hat{R}$ . 因为 $\hat{H}' = \hat{H}'^\dagger$ , 结合已有的度规算符(22)可得到 $\hat{H}' = \hat{\chi}\hat{H}\hat{\chi}^{-1}$ , 这就是赝厄米条件. 在 $SU(2)$ 系统中, 根据辅助条件(15)得到:

$$\eta = \text{arctanh}\left(-\frac{2G}{\Omega + \omega}\right). \quad (39)$$

本文的 $SU(2)$ 非厄米系统属于赝厄米系统. 奇异点 $G_c(\omega) = \frac{\Omega + \omega}{2}$ 对应于赝厄米性破缺的临界点. 当 $G < G_c$ 时,  $\tanh(\eta) > -1$ ,  $\eta$ 是实参数. 存在正定度规算符 $\hat{\chi}$ 使得 $\hat{H}' = \hat{\chi}\hat{H}\hat{\chi}^{-1}$ . 此时系统可映射为厄米系统, 能谱为实数, Berry相位为实数. 当 $G$ 超过 $G_c$ 时,  $\tanh(\eta) < -1$ ,  $\eta$ 是复参数, 度规算符失去厄米性. 此时系统进入非赝厄米相, 不再等价于任何厄米系统, 能谱出现虚部, Berry相位变为复数. 为了更好地观察转变过程, 下面进行数值结果分析.

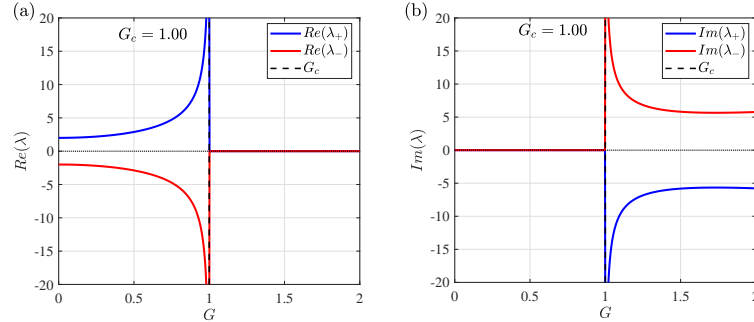


图1 (网刊彩色) 当 $n = 1$ ,  $\omega = 0$ ,  $\Omega = 2$ 时, 此时奇异点 $G_c = 1$ . (a)本征能量的实部 $Re(\lambda)$ 随着非厄米耦合强度 $G$ 的变化.  $Re(\lambda_+)$ 和 $Re(\lambda_-)$ 的变化趋势, 分别由蓝色和红色实线表示. (b)本征能量的虚部 $Im(\lambda)$ 随着非厄米耦合强度 $G$ 的变化.  $Im(\lambda_+)$ 和 $Im(\lambda_-)$ 的变化趋势, 分别由蓝色和红色实线表示. (a)和(b)图中黑色虚线代表由(35)式确定的系统的奇异点.

Fig. 1. (color line) (a) Variation of the real part of the eigenenergy  $Re(\lambda)$  with the non-Hermitian coupling strength  $G$ . The variation trends of  $Re(\lambda_+)$  and  $Re(\lambda_-)$  are represented by the blue solid line and red solid line, respectively. (b) Variation of the imaginary part of the eigenenergy  $Im(\lambda)$  with the non-Hermitian coupling strength  $G$ . The variation trends of  $Im(\lambda_+)$  and  $Im(\lambda_-)$  are represented by the blue solid line and red solid line, respectively. In figures (a) and (b), the black dashed lines denote the exceptional points of the system determined by Eq. (35). Other parameters:  $n = 1$ ,  $\omega = 0$ ,  $\Omega = 2$  and the exceptional point  $G_c = 1$ .

图1(a)和(b)清晰表明 $SU(2)$ 非厄米系统中赝厄米相转变. 图中黑色虚线是由(35)式定出的奇异点( $G_c = 1$ ). 图1(a)绘制了本征值的实部 $Re(\lambda)$ 随着非厄米耦合强度 $G$ 的变化趋势. 其中蓝线代表 $\lambda_+$ 的实部, 红线代表 $\lambda_-$ 的实部. 可以看到, 整个变化过程被这一条黑色虚线分成了两个不同的区域. 具体来说, 当 $0 < G < 1$ 时, 随着 $G$ 的增大,  $\lambda_+$ 和 $\lambda_-$ 的实部逐渐增大并分别趋于 $\pm\infty$ , 即本征值发散. 当 $G$ 增加到(1,2)区间内时,  $\lambda_+$ 和 $\lambda_-$ 的实部消失, 对应的值为0. 图1(b)绘制了本征值的虚部 $Im(\lambda)$ 随着非厄米耦合强度 $G$ 的变化

趋势. 其中蓝线代表 $\lambda_+$  的虚部, 红线代表 $\lambda_-$  的虚部, 黑色虚线代表奇异点 $G_c$  的位置. 具体来说, 当 $0 < G < 1$  时,  $\lambda_+$  和  $\lambda_-$  的虚部为0. 在 $G > 1$  处,  $\lambda$  的虚部开始分裂出一对相反的虚数. 结合图1(a)和(b)来看, 这直接对应了能谱从实谱变为复谱的转变.

图1(a)和(b)绘制了本征值的实部 $Re(\lambda)$ 和虚部 $Im(\lambda)$ 随着非厄米耦合强度  $G$  的变化趋势. 众所周知, 在非厄米系统中, Berry相位也会随着参数变化出现实-复转变. 分析 $SU(2)$ 系统的Berry相位(37) 的转变. 当  $G < G_c(\omega)$  时, 分母为正实数,  $\gamma_n(T)$  为实数, 对应于系统在周期演化中仅积累几何相位, 态矢量的模长保持恒定(在双正交归一化意义下). 当  $G > G_c(\omega)$  时, 分母变为纯虚数, Berry相位成为复数. Berry相位的虚部(不等于0)的物理意义在于: 系统在一个绝热循环过程中, 态矢量的模长发生指数变化. 具体来说, 右矢态(23) 的 $e^{i\gamma_n(T)}$ 中 $\gamma_n(T)$  的虚部贡献一个实指数因子, 表征增益(若为正)或衰减(若为负). 这反映了非厄米系统的非保守特性, 即能量不与环境交换, 但态的概率(或模长)不再守恒. 因此, Berry相位从实变复, 直接关联到系统耗散或增益行为的出现.

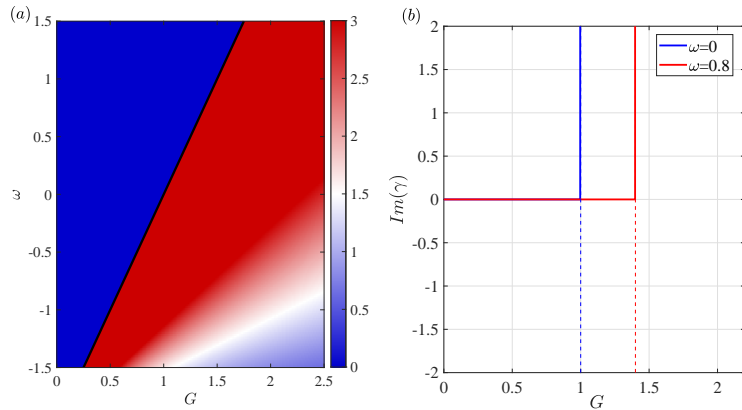


图2 (网刊彩色) 当参数 $n = 1, \Omega = 2$ 时, (a)Berry相位的虚部 $Im(\gamma)$ 随着驱动频率 $\omega$ 和非厄米耦合强度 $G$ 的变化. 图中的颜色条代表Berry相位的虚部 $Im(\gamma)$ 的大小. 黑色实线代表由奇异点构成的相边界, 其方程表示为 $G_c = \frac{|\Omega+\omega|}{2}$ . (b)Berry相位的虚部 $Im(\gamma)$ 随着非厄米耦合强度 $G$ 的变化. 驱动频率 $\omega = 0$ 和 $\omega = 0.8$ 时 $Im(\gamma)$ 的变化趋势, 分别由蓝色实线和红色实线表示. 图中蓝色虚线和红色虚线代表由(37)式确定的在不同驱动频率下 $SU(2)$ 非厄米系统的奇异点.

Fig. 2. (color line) (a) The imaginary part of the Berry phase  $Im(\gamma)$  varies with the driving frequency  $\omega$  and the non-Hermitian coupling strength  $G$ . The color bar in the figure represents the magnitude of  $Im(\gamma)$ . The black solid lines denote the phase boundaries composed of exceptional points, with the analytical expression  $G_c = \frac{|\Omega+\omega|}{2}$ . (b) The variation of  $Im(\gamma)$  with the non-Hermitian coupling strength  $G$ . The changing trends of  $Im(\gamma)$  at driving frequencies  $\omega = 0$  and  $\omega = 0.8$  are depicted by the blue solid line and red solid line, respectively. The blue dashed line and red dashed line correspond to the exceptional points of the  $SU(2)$  non-Hermitian system under different driving frequencies, which are determined by Eq.(37). Other parameters:  $n = 1$  and  $\Omega = 2$ .

图2展示了非厄米 $SU(2)$ 系统的Berry相位从厄米相到厄米破缺相转变的相图. 图2(a)绘制了参数空间 $(\omega, G)$ 中的Berry相位虚部 $Im(\gamma)$ 的变化趋势. 黑色实线代表相边界(奇异点), 其方程表示为 $G_c = \frac{|\Omega+\omega|}{2}$ . 整个转变过程被这条黑色实线分成了两个具有不同Berry相位的区域. 当 $0 < G < G_c$  时,  $Im(\gamma)$  对应的颜色为

深蓝色, 对应的值接近0. 这一显著特征对应着赝厄米相. 当  $G > G_c$  时,  $Im(\gamma)$  则呈现出大小不一的非零值, 从浅蓝色、白色到深红色对应的值逐渐增大. 这表示赝厄米相已经转变为赝厄米破缺相. 图2(b) 展示了固定  $\omega$  时  $Im(\gamma)$  随  $G$  的变化图. 当  $\omega$  取0时, 奇异点  $G_c = 1$ ; 当  $\omega$  取0.8时, 奇异点  $G_c = 1.4$ . 可以看到, 在奇异点  $G_c$  处, Berry 相位的虚部从零开始增长, 表明了系统哈密顿量在参数奇异点  $G_c$  两侧从“赝厄米相”(实Berry相位)过渡到“赝厄米破缺相”(复Berry相位).

## 6 结论

利用广义规范变换方法, 本文对  $SU(1, 1)$  和  $SU(2)$  李代数生成元构成的含时非厄米哈密顿算符进行了精确求解. 与传统量子力学不同, 这里构建了一个非么正但厄米的变换算符  $\hat{R}(t)$ , 而在传统量子力学中, 算符必须是么正算符. 本文以统一的方式推导了  $SU(1, 1)$  和  $SU(2)$  系统中非厄米哈密顿算符在规范变换下的等效形式. 通过求解对偶薛定谔方程得到了精确解和Berry相位. 结果发现, 非厄米  $SU(1, 1)$  系统的能谱恒为实数, 这表明  $SU(1, 1)$  系统的实能谱随参数  $G$  增强而单调减小, 不会出现奇异点. 但是非厄米  $SU(2)$  系统的能谱却存在复数, 这里存在一个奇异点  $G_c$ , 在该点上,  $SU(2)$  系统的所有本征态都处于代数简并状态, 系统不可对角化, 约当标准型中出现非平凡的Jordan块结构. 在参数  $G$  的值足够小的情况下,  $SU(2)$  系统的能量本征值始终为实数. 对应的  $SU(2)$  系统的Berry相位在奇异点  $G_c(\omega)$  处会发散, 超过该点后, Berry 相位就会从实数变成复数. 复Berry相位的虚部反映了态模长的指数变化, 对应增益或损耗主导的非保守动力学. 这正是赝厄米自发破缺的谱转变的典型标志: 系统哈密顿量在参数临界点两侧从“赝厄米相”(实谱)过渡到“赝厄米破缺相”(复谱). 这一对比揭示了非紧致群  $SU(1, 1)$  与紧致群  $SU(2)$  结构对非厄米系统几何相位的影响.

## 7 附录

在非厄米系统中, Berry相位的标准定义应基于双正交基, 即

$$\gamma_n = i \int_I \langle \psi_n(t) | \frac{d}{dt} | \psi_n(t) \rangle_r dt, \quad (40)$$

其中  $|\psi_n(t)\rangle_r$  和  $|\psi_n(t)\rangle_l$  分别为右矢态和左矢态, 满足双正交归一化条件  ${}_l\langle \psi_m(t) | \psi_n(t) \rangle_r = \delta_{mn}$ . 本文在(24)中给出的表达式, 实际上正是上述标准定义在本文具体变换下的等价形式. 在本文中, 右矢态和左矢态的精确解分别见式(17)和(20), 其中  $|n\rangle$  是变换后等效厄米哈密顿量  $\hat{H}'$  的本征态, 满足  $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$  且  $\hat{R}(t)$  是厄米但非

么正的变换算符. 此时双正交归一化条件自动满足:

$${}_l\langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle_r = \delta_{nm}. \quad (41)$$

将上述左右矢态代入标准Berry相位定义(40), 计算被积函数:

$${}_l\langle \psi_n(t) | \frac{d}{dt} | \psi_n(t) \rangle_r = e^{i\lambda_n t} \langle n | \hat{R}(t) \cdot \frac{d}{dt} \left( e^{-i\lambda_n t} \hat{R}^{-1}(t) | n \rangle \right) = -i\lambda_n + \langle n | \hat{R}(t) \frac{d\hat{R}^{-1}(t)}{dt} | n \rangle. \quad (42)$$

上式第一项 $-i\lambda_n$  在周期积分后产生 $-i\lambda_n T$ , 这属于动力学相位部分. 几何相位来源于第二项的积分:

$$\gamma_n = i \int_0^T \langle n | \hat{R} \frac{\partial}{\partial t} \hat{R}^{-1} | n \rangle dt. \quad (43)$$

这正是本文式(24)所给出的表达式. 由此可见, 本文所用的公式是严格从双正交基下的标准非厄米Berry相位定义出发, 通过左右矢态的具体形式推导得到的等价形式.

## 参考文献

- [1] Croke S 2015 *Phys. Rev. A* **91** 052113
- [2] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [3] Rubinstein J, Sternberg P, Ma Q 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 167003
- [4] Chtchelkatchev N M, Golubov A A, Baturina T I, Vinokur V M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 150405
- [5] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, Morandotti R, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902
- [6] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nature Phys.* **6** 192
- [7] Lin Z, Ramezani H, Eichelkraut T, Kottos T, Cao H, Christodoulides D N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 213901
- [8] Feng L, Ayache M, Huang J, Xu Y L, Lu M H, Chen Y F, Fainman Y, Scherer A 2011 *Science* **333** 729

- [9] Bittner S, Dietz B, Günther U, Harney H L, Miski-Oglu M, Richter A, Schäfer F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 024101
- [10] Zhao K F, Schaden M, Wu Z 2010 *Phys. Rev. A* **81** 042903
- [11] Zheng C, Hao L, Long G L 2013 *Philos. T. R. Soc. A* **371** 20120053
- [12] Bender C M 2019 *PT symmetry: In quantum and classical physics* (Singapore: World Scientific) pp11-17
- [13] Fring A, Frith T 2018 *J. Phys. A-Math. Theor* **51** 265301
- [14] Zhang K L, Wang P, Zhang G, Song Z 2018 *Phys. Rev. A* **98** 022128
- [15] Fring A, Frith T 2020 *Mod. Phys. Lett. A* **35** 2050041
- [16] Xu H, Lai D G, Qian Y B, Hou B P, Miranowicz A, Nori F 2021 *Phys. Rev. A* **104** 053518
- [17] Mostafazadeh A 2002 *Nucl. Phys. B* **640** 419
- [18] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 205
- [19] Mostafazadeh A 2007 *Phys. Lett. B* **650** 208
- [20] Znojil M 2008 *Phys. Rev. D* **78** 085003
- [21] Gong J B, Wang Q H 2013 *J. Phys. A* **46** 485302
- [22] Fring A, Moussa M H Y 2016 *Phys. Rev. A* **93** 042114
- [23] Cheniti S, Koussa W, Medjber A, Maamache M 2020 *J. Phys. A-Math. Theor.* **53** 405302
- [24] Zerimeche R, Moufok R, Amaouche N, Maamache M 2023 *Rev. Mex. Fis.* **69** 010401
- [25] Liu N, Gu Y, Liang J Q 2023 *Phys. Scr.* **98** 035109
- [26] Liang S D, Huang G Y 2013 *Phys. Rev. A* **87** 012118
- [27] Singhal Y, Martello E, Agrawal S, Ozawa T, Price H, Gadway B 2023 *Phys. Rev. Res.* **5** L032026
- [28] Lou X Y, Cheng Y S, Zhao P Z, Tong D M 2025 *Phys. Rev. A* **112** 022222
- [29] Yu H, Jiang T, Zhao L C 2026 *Phys. Rev. A* **113** 012227

- [30] Gu Y, Bai X M, Hao X L, Liang J Q 2022 *Results in Phys.* **38** 150061
- [31] Gu Y, Hao X L, Liang J Q 2022 *Ann. Phys. (Berlin)* **534** 2200069
- [32] Amaouche N, Sekhri M, Zerimeche R, Maamache M, Liang J Q 2022 *Physics Open* **13** 100126
- [33] Lai Y Z, Liang J Q, Muller-Kirsten H J W, Zhou J G 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 1773
- [34] Ju C Y, Miranowicz A, Chen G Y, Nori F 2019 *Phys. Rev. A* **100** 062118
- [35] Liang J Q, Wei L F 2020 *New Advances in Quantum Physics* (Beijing: Science Press) pp91

录用稿件，非最终出版稿

# The Berry phase in time-dependent non-Hermitian SU(1,1) and SU(2) systems

GU Yan <sup>1)†</sup> LU Zhanpeng <sup>2)</sup>

1) (Shanxi Vocational University of Engineering Science and Technology, Jinzhong, Shanxi 030619,  
China )

2) (Department of Physics, Xinzhou Normal University, Xinzhou 034000, China )

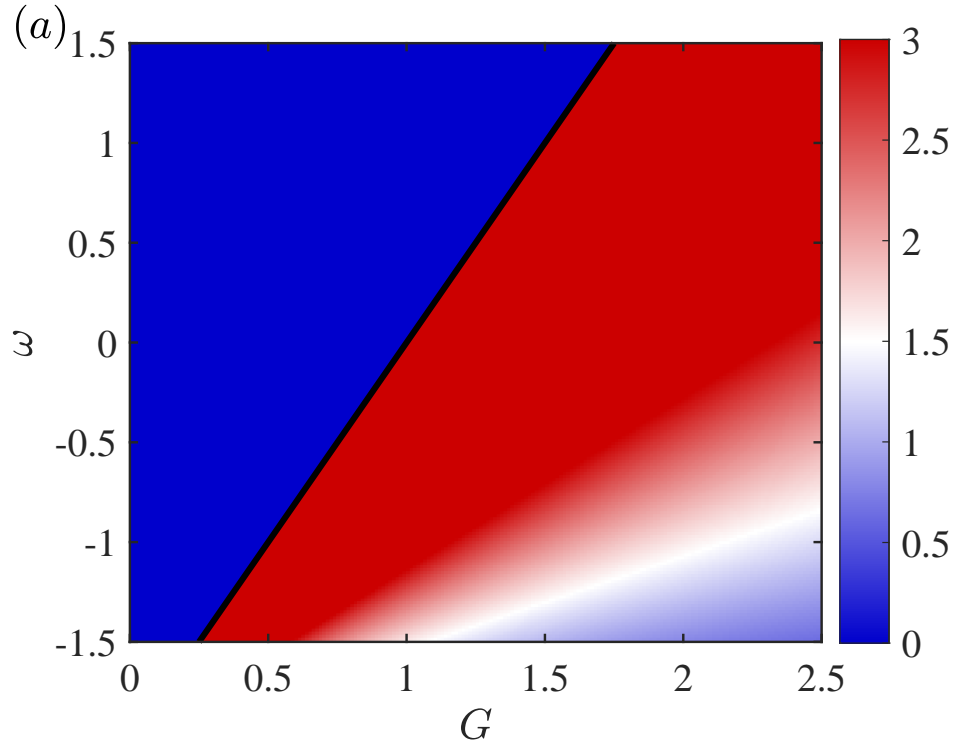
## Abstract

Based on the generalized gauge transformation method, this paper investigates time-dependent non-Hermitian Hamiltonians described by the generators of the  $SU(1,1)$  and  $SU(2)$  Lie algebras, corresponding to the harmonic oscillator system under a periodically driven external field and the single-spin system with arbitrary parameters, respectively. By introducing a time-dependent Hermitian but non-unitary transformation operator  $\hat{R}(t)$ , the original time-dependent Hamiltonian is transformed into a time-independent effective Hamiltonian  $\hat{H}'$ . Exact solutions of the dual eigenequations and the associated non-adiabatic Berry phases are derived. For the  $SU(2)$  system, an exceptional point occurs at  $G_c(\omega) = \frac{\Omega + \omega}{2}$ , where the eigenvalues of the effective Hamiltonian diverge and the Berry phase becomes complex. Specifically, for  $G < G_c$  the Berry phase  $\gamma_n(T)$  is real, while for  $G > G_c$  it acquires an imaginary part, signaling the spontaneous breaking of pseudo-Hermitian phase. In the slowly varying external field limit ( $\omega \rightarrow 0$ ), the non-adiabatic Berry phase reduces to the adiabatic counterpart. To more clearly reflect the variation of the Berry phase, we plot the phase diagram on the parameter plane of the driving frequency  $\omega$  and the non-Hermitian coupling strength  $G$  using the magnitude of the imaginary part of the Berry phase. The result is shown in Fig.(a).

---

\* Project is supported by the Fundamental Research Program of Shanxi Province, China, (Grant No. 202403021212025)

† Corresponding author. E-mail: guyan@sxgkd.edu.cn



From the above results, we can clearly see that the Berry phase reflects the transition from the pseudo-Hermitian phase to the pseudo-Hermitian broken phase, and the analytical results agree well with the numerical results. In contrast, for the non-Hermitian  $SU(1,1)$  system, the eigenvalues of the effective Hamiltonian remain real for all parameters, and no exceptional point appears. As the non-Hermitian coupling  $G$  increases, the effective oscillator frequency  $\Gamma(\omega)$  decreases monotonically without any singularity. The absence of exceptional points in the non-Hermitian  $SU(1,1)$  system is closely related to the non-compactness of the  $SU(1,1)$  group. The representation space of a non-compact group is infinite-dimensional and unbounded above, and the expectation values of the generators  $\hat{K}_{\pm}$  have no lower bound. This endows the system with greater robustness against non-Hermitian perturbations, preventing spectral degeneracy and the transition to complex eigenvalues at finite parameter values. In contrast,  $SU(2)$ , as a compact group, has a finite-dimensional representation space and a bounded spectrum, making it more susceptible to spectral degeneracy at critical parameter values. These results provide a clear comparison of the geometric phase behavior between compact and non-compact Lie algebraic structures in non-Hermitian systems.

**Keywords:** non-Hermitian, Berry phase, generalized gauge transformation

**PACS:** 02.20.Sv, 03.65.Fd,03.65.Ta, 03.65.Vf

录用稿件，非最终出版稿