

# 基于 LBM 的多热源受限圆腔内热对流的非线性特征演化研究\*

谢淦昊, 赵明<sup>†</sup>

(上海理工大学能源与动力工程学院, 上海 200093)

## 摘要

受限空间热对流的流动与传热特性具有对空间几何构型的强烈依赖性和复杂性。本文基于格子 Boltzmann 方法针对菱形分布的四个等温热源的圆形封闭腔内热对流进行数值研究, 并通过相空间重构、功率谱分析及最大李雅普诺夫指数进行非线性特征演化规律的研究, 刻画出所研究系统的混沌演化路径。研究发现, 该系统从对称稳态出发, 依次经历超临界叉式分岔和超临界 Hopf 分岔, 进入非对称稳态和单周期振荡状态。随着瑞利数进一步增加, 系统发生异宿分岔引发异宿爆炸而转变为混沌态, 并伴随热源附近流型的转变。随后, 系统进入一个拟周期窗口, 并在该窗口内观测到锁频现象, 以及频率解锁与环面破裂, 最终再次进入混沌状态。

**关键词:** 混沌; 多热源; 热对流; 格子 Boltzmann 方法

**PACS:** 47.52.+j;47.27.te;47.20.Ky;47.20.Bp

**基金:** 国家自然科学基金(批准号: 51306120)资助的课题。

同等贡献作者。

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: lightzm@usst.edu.cn

第一作者. E-mail: 2765654672@qq.com

# 1 引言

不依赖外部动力传热机制中的热对流（或自然对流）广泛存在于电子冷却<sup>[1]</sup>、建筑节能<sup>[2]</sup>、相变储能<sup>[3]</sup>等紧凑空间工程场景中。受限空间内热对流因腔体外形、热源布局及浮升力的强耦合作用，其流动和传热特征呈现复杂性，且具有强烈的构型依赖性<sup>[4]</sup>。探究其非线性动力学特征的演化行为及流动模式的转变，不仅成为揭示其深层物理机制的核心，也可以帮助人们加深对复杂流动的理解。

在如方腔、环形腔等简单构型中，其随瑞利数（Rayleigh number，简记为 Ra）主导的流动失稳路径已被系统研究。如 Angeli 等人<sup>[5]</sup>综述了受限空间内热对流的非线性行为通常会通过 Ruelle-Takens、Feigenbaum 和 Pomeau-Manneville 三条路径过渡到混沌。Mizushima 等人<sup>[6]</sup>基于线性稳定性理论研究了不同半径比对环腔的分岔类型转变。Rashid 等人<sup>[7]</sup>通过有限体积法进行数值模拟，利用相图和功率谱密度（Power Spectral Density，简记为 PSD）刻画了侧壁分别为冷源和热源的方腔随 Ra 变化的 Feigenbaum 路径。尹慧等人<sup>[8]</sup>采用有限差分法对不同倾斜角方腔自然对流进行非线性分析，发现在倾斜角为  $70^\circ - 90^\circ$  时存在解的分岔。上述研究初步揭示了具有简单构型的受限空间内热对流失稳的影响机制，针对复杂多热源热对流系统的非线性动力学研究还有待补充。

系统内部存在多个离散热源时，其动力学复杂性显著增强。余端民等人<sup>[9]</sup>利用格子 Boltzmann 方法（Lattice Boltzmann method，简记为 LBM）研究了不同开缝度对双羽流生成、合并机制及系统整体换热能力的影响规律。赵明等人<sup>[10]</sup>通过 LBM 进行数值模拟，并采用相图和 PSD 揭示了开缝圆环腔内热对流遵循 Ruelle-Takens-Newhouse 的混沌转捩路径。Mun 等<sup>[11,12]</sup>采用浸没边界-有限体积法对多组菱形分布的四热源热对流系统进行了研究，发现几何排列对冷、热壁

面平均努塞尔数（Average Nusselt number，简记为 $\overline{Nu}$ ）的影响较小，但会诱发流动模式的不对称性。这些研究共同证实，受限空间内多热源热对流系统的流动模式的转变与演化路径强烈依赖于系统的具体构型与控制参数。

然而现有关于受限空间内热对流的非线性动力学的研究，大多聚焦于几何构型单一或热边界简单的系统，对于兼具多热源布局与强曲壁约束的复杂结构，其非线性动力学行为与分岔特性的研究尚存在明显空白<sup>[4]</sup>。基于此，本文采用格子 Boltzmann 方法，针对抽象出的二维菱形分布的四个等温热源的圆形封闭腔进行研究，系统分析其热对流稳定性的非线性动力学演化路径。LBM 因其计算效率高、易于并行化实现<sup>[13]</sup>，且在求解 Boussinesq 近似的热对流这类弱可压缩问题上具有良好效果，成为本研究理想的数值工具。通过固定几何参数，本文系统刻画了随 Ra 变化时，热力学系统从稳态、经分岔演化至混沌的完整路径，揭示了流动模式转变的非线性动力学机制，从而为描述该类复杂约束下的多热源热对流系统的传热机理提供理论基础。

## 2 问题描述

### 2.1 物理模型

物理模型如图 1 所示，封闭腔体为圆形，半径为  $R_0$ ，壁面为恒定温度  $T_c$  的冷源，壁面速度为 0。四个圆形热源半径为  $R_1$ ，以模型几何中心为对称点呈菱形分布且对角线长度  $d$  相等，取值为  $1.4(R_0 - R_1)$ ，壁温恒定  $T_h$ ，壁面速度为 0。圆腔与热源半径比值为  $R_0 / R_1 = 5$ 。重力加速度为  $g$ ，方向竖直向下。定义无量纲温度  $\theta = (T - T_h) / (T_h - T_c)$ 。圆心 O 为监测点。

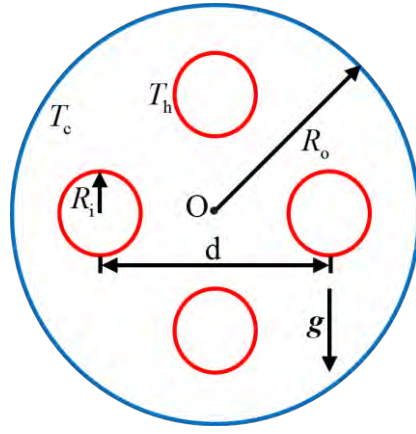


图 1 物理模型示意图

Fig.1. Physical model diagram

## 2.2 LBM 模型

本文采用郭照立等人<sup>[14]</sup>提出的基于 Boussinesq 假设的耦合的格子 BGK 模型进行求解。速度场采用 D2G9 模型，其离散速度  $\mathbf{e}_\alpha$  和权重系数  $\omega_\alpha$  为标准形式：

$$\mathbf{e}_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ c \left( \cos[(\alpha-1)\frac{\pi}{2}], \sin[(\alpha-1)\frac{\pi}{2}] \right) & \alpha = 1,2,3,4 \\ \sqrt{2}c \left( \cos[(2\alpha-1)\frac{\pi}{4}], \sin[(2\alpha-1)\frac{\pi}{4}] \right) & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (1)$$

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 4/9 & \alpha = 0 \\ 1/9 & \alpha = 1,2,3,4 \\ 1/36 & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (2)$$

式中， $c = \delta_x / \delta_t = 1$ ， $\delta_x$  和  $\delta_t$  对应网格步长和时间步长。其中时间步长在格子单位中为 1，后续图形中的时间数据采样间隔为 500 个时间步。

基于 Boussinesq 假设的模型外力项  $F_\alpha$  定义如下：

$$F_\alpha = \frac{1}{2c} (\delta_{\alpha 2} + \delta_{\alpha 4}) \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{G} \quad (3)$$

此式中， $\delta$  为克罗内克符号，有效外力  $\mathbf{G} = -\beta(T - T_0)\mathbf{g}$ ， $\beta$  为热胀系数。

故而  $f_\alpha$  的演化方程如下：

$$f_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{e}_\alpha \delta_t, t + \delta_t) - f_\alpha(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\tau_f} [f_\alpha(\mathbf{r}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{r}, t)] + \delta_t F_\alpha \quad (4)$$

其中,  $\tau_f$  为无量纲松弛时间。平衡态分布函数  $f_\alpha^{eq}$  为:

$$f_\alpha^{eq} = \begin{cases} \rho - \frac{5p}{3c^2} + \rho \omega_\alpha \left[ \frac{3\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right] & \alpha = 0 \\ \frac{p}{3c^2} + \rho \omega_\alpha \left[ \frac{3\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right] & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{p}{12c^2} + \rho \omega_\alpha \left[ \frac{3\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right] & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (5)$$

其中密度  $\rho$ 、速度  $\mathbf{u}$ 、压力  $p$  可由分布函数的矩计算得到:

$$\rho = \sum_{\alpha=0}^8 f_\alpha, \rho \mathbf{u} = \sum_{\alpha=0}^8 \mathbf{e}_\alpha f_\alpha, p = \rho \frac{3c^2}{5} \left[ \sum_{\alpha=1}^8 f_\alpha + s_0(\mathbf{u}) \right] \quad (6)$$

温度场采用 D2Q4 离散模型求解, 其演化方程为:

$$T_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{e}_\alpha \delta_t, t + \delta_t) - T_\alpha(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\tau_T} [T_\alpha(\mathbf{r}, t) - T_\alpha^{eq}(\mathbf{r}, t)] \quad (7)$$

平衡态分布函数  $T_\alpha^{eq}$  为:

$$T_\alpha^{eq} = \frac{T}{4} \left[ 1 + 2 \frac{\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right] \quad (8)$$

宏观温度由下式计算:

$$T = \sum_{\alpha=1}^4 T_\alpha \quad (9)$$

通过 Chapman-Enskog 多尺度展开, 可恢复描述热对流的 Boussinesq 方程组:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g} \beta (T - T_0) \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}T) = \nabla \cdot (\chi \nabla T) \quad (12)$$

式中  $\nu$  为运动黏度系数、 $\chi$  为热扩散系数。

热对流问题常采用无量纲参数描述问题, 普朗特数 (Prandtl number, 简记为

Pr) 定义为:  $\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$ ; Ra 定义为:  $\text{Ra} = \frac{g\beta\Delta TH^3 \text{Pr}}{\nu^2}$ ; 马赫数 (Mach number, 简

记为  $Ma$ ) 定义为:  $Ma = \frac{u_c}{c_s}$ 。其中,  $H$  为特征长度,  $u_c$  为特征速度, 定义为:

$$H = \frac{2(R_o^2 - 4R_i^2)}{R_o + 4R_i}, u_c = \sqrt{g\beta\Delta TH} \quad (13)$$

取  $Ma = 0.1$  满足不可压缩, 取  $Pr = 0.706$ 。由上述无量纲参数可定义无量纲松弛时间  $\tau_f$ 、 $\tau_T$  为:

$$\tau_f = \frac{1}{2} + \frac{MaH\sqrt{3Pr}}{c^2\delta_i\sqrt{Ra}}, \tau_T = \frac{1}{2} + \frac{2MaH}{c^2\delta_i\sqrt{3RaPr}} \quad (14)$$

### 2.3 边界处理及 $\overline{Nu}$ 计算

采用郭照立等人<sup>[15]</sup>提出的结合非平衡外推格式和空间插值的曲面处理方法处理曲面边界。以速度边界为例, 边界节点的分布函数可表示为:

$$f_\alpha^+(\mathbf{r}_b, t) = f_\alpha^{+,eq}(\mathbf{r}_b, t) + f_\alpha^{+,neq}(\mathbf{r}_b, t) \quad (15)$$

式中, 平衡态分布边界宏观量构造, 非平衡态部分通过流体节点分布函数插值得到。该格式在时空上均具有二阶精度, 且数值稳定性良好<sup>[13]</sup>。具体方式为:

$$f_\alpha^{+,neq}(\mathbf{r}_b, t) = \begin{cases} f_\alpha(\mathbf{r}_f, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{r}_f, t) & q \geq 0.75 \\ q[f_\alpha(\mathbf{r}_f, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{r}_f, t)] + (1-q)[f_\alpha(\mathbf{r}_{ff}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{r}_{ff}, t)] & q < 0.75 \end{cases} \quad (16)$$

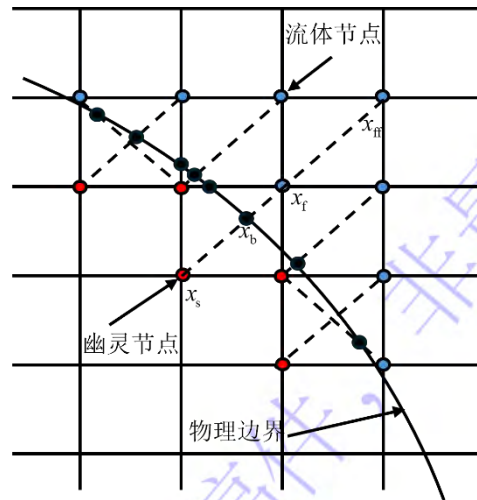


图 2 曲边边界示意图

Fig.2. Schematc diagram of curved edges model

因模型关于坐标轴对称, 将第一象限对应方向插值系数映射至其余三个象限,

避免浮点舍入误差影响物理模型的对称性。

局部努塞尔数(Local Nusselt Number, 简记为  $Nu_L$ ) 定义为<sup>[16]</sup>:

$$Nu_L = \frac{hH}{\chi} = - \left. \frac{\partial \Theta}{\partial N} \right|_{\text{wall}} \quad (17)$$

因模型边界为曲面边界, 本文沿壁面内法线方向匀选取 5 个采样点, 通过双线性插值获得温度值并对最小二乘法拟合的径向温度分布进行求导, 可得到壁面温度梯度:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\text{wall}} = \pm \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_w} = \pm(2ar_w + b) \quad (18)$$

式中正负号依壁面法向方向定义 (外壁取负, 内壁取正)。

沿整个圆周均匀选取多个角度计算  $Nu_L$ , 得到局部努塞尔数分布  $Nu_L(\phi)$ , 再通过积分平均可得  $\overline{Nu}$  为:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Nu_L(\phi) d\phi \quad (19)$$

内壁面  $\overline{Nu}$  本质上是各局部热源贡献的算术和, 外壁面  $\overline{Nu}$  反映了系统的整体换热效能, 本文下面给出的努塞尔数均为外壁面  $\overline{Nu}$ 。

## 2.4 模型验证

上述双分布模型的数值方案通过 C++ 编程实现, 并与文献[17]实验结果进行对比验证。验证算例的几何模型、边界条件及无量纲参数均参照实验参数进行设置。表 1 列出了不同  $Ra$  下, 计算所得平均表面导热系数(Average surface heat transfer coefficient, 简记为  $\overline{Keq}$ )与文献[17]实验所得  $\overline{Keq}$  的对比。结果显示, 两者在所有对比工况下均吻合良好, 最大相对误差不超过 4%, 程序验证可靠。

表 1  $\overline{Keq}$  与文献对比结果

Table 1. Comparison of  $\overline{Keq}$  with literature results

$Ra$	本文	文献[17]	误差/%	$Ra$	本文	文献[17]	误差/%
------	----	--------	------	------	----	--------	------

$6.19 \times 10^4$	3.32	3.30	0.50	$1.30 \times 10^6$	6.69	6.80	1.58
$2.25 \times 10^5$	4.39	4.55	3.57	$1.70 \times 10^6$	7.05	7.15	1.39
$1.06 \times 10^6$	6.47	6.52	0.72	$2.14 \times 10^6$	7.44	7.44	0.001

本研究采用均匀网格进行计算。表 2 网格无关性验证结果表明：三套不同密度网格所得到的  $\overline{Nu}$  最大相对误差均在 5% 以内，且逐级加密网格之间的相对误差随网格加密呈现收敛趋势。在  $Ra = 8 \times 10^4$  的定常状态下，各网格结果差异很小；而在更高的  $Ra$  下，如图 3a 和 b 所示，网格  $401 \times 401$  已很好收敛，网格  $201 \times 201$  与其他网格吸引子拓扑结构仍然保持一致性。综合来看网格  $201 \times 201$  虽然演化速度明显快于加密的网格，但并不改变非线性演化的定性特征。考虑到需要大量参数扫描，且本文主要讨论的是流态演化的定性规律，因此目前的网格精度是可以接受的。

表 2  $\overline{Nu}$  网格无关性验证结果

Table 2. Results of Grid Independence Test for  $\overline{Nu}$

Ra	201×201		401×401		801×801	
	$\overline{Nu}$	相对误差/%	$\overline{Nu}$	相对误差/%	$\overline{Nu}$	相对误差/%
$8 \times 10^4$	3.52	0.643	3.51	0.084	3.50	—
$4 \times 10^5$	5.40	2.03	5.29	1.07	5.23	—
$8 \times 10^5$	6.36	3.89	6.11	0.70	6.07	—

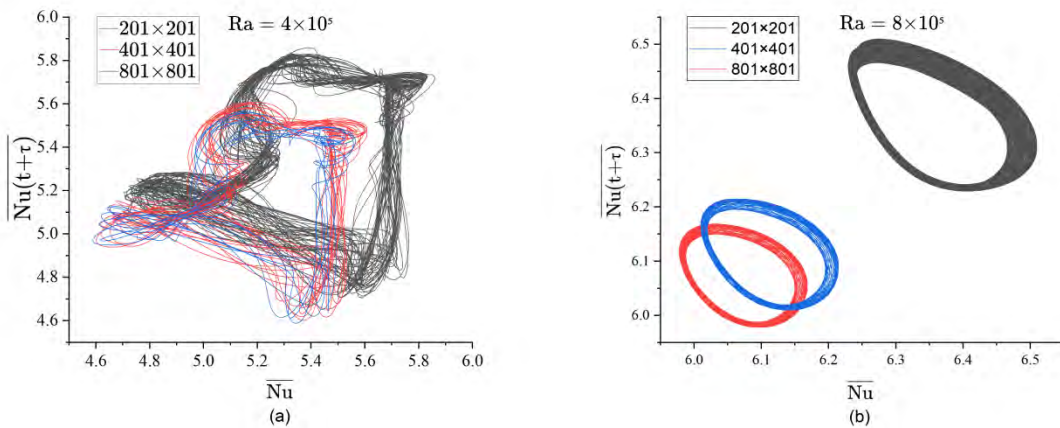


图 3 不同网格  $\overline{Nu}$  相空间重构 (a)  $Ra = 4 \times 10^5$ ; (b)  $Ra = 8 \times 10^5$

Fig.3. Phase space reconstruction diagram of  $\overline{Nu}$  from different grids

(a)  $Ra = 4 \times 10^5$ ; (b)  $Ra = 8 \times 10^5$

## 2.5 非线性动力学分析方法

采用功率谱密度、相图和最大李雅普诺夫指数 (Largest Lyapunov Exponent , 简记为 LLE) 作为系统随 Ra 变化的非线性行为的分析方法。选取几何中心点作为监测点, 该点与四个热源等距, 可削弱单一热源的局部边界效应; 且位于垂直中心线及环流分隔线附近, 其水平速度涨落与方向切换对系统环流拓扑变化敏感, 是捕捉非线性演化的理想观测点。

具体分析方法如下:

(1) 相图分析: 取  $\overline{Nu}$  进行相空间重构判断系统周期性。对于混沌态下的非线性分析, 取监测点水平速度  $u$  与垂直速度  $v$  绘制二维相图。对于可能发生的异宿分岔, 利用  $u$  进行相空间重构, 以判断分岔类型。

(2) 功率谱密度分析: 对系统  $\overline{Nu}$  的时间序列进行 PSD 分析, 以识别系统的特征频率及其演化。采用 Cooley-Tukey 算法及矩形窗。

(3) 最大李雅普诺夫指数计算: 采用 Wolf 算法计算 LLE。该算法通过追踪相空间中相邻轨道的指数发散率来量化系统的混沌特性<sup>[18]</sup>。由于数值模拟的离散性及有限精度, LLE 的计算值难以严格为零, 故以 LLE 显著大于零作为系统进入混沌的判据。采用自相关法计算计算延迟时间; 使用 Cao 方法确定嵌入维度; 演化时间取 5 倍相邻周期或拟周期 Ra 的 PSD 幅值最大的峰对应的时间。计算结果见表 3。

表 3 不同 Ra 下的 LLE  
Table 3. LLE at Different Ra

Ra	LLE	Ra	LLE
$1.1 \times 10^5$	-0.0021	$7 \times 10^5$	-0.004
$1.75 \times 10^5$	0.0019	$8.25 \times 10^5$	0.0038
$2.75 \times 10^5$	0.0099	$8.5 \times 10^5$	0.0003
$3 \times 10^5$	0.0036	$8.75 \times 10^5$	0.0019
$4 \times 10^5$	0.0642	$9.2 \times 10^5$	0.0043
$6 \times 10^5$	0.4274	$9.5 \times 10^5$	0.1574

### 3 结果与讨论

图 4 和图 5 整体示出了 Ra 在  $8.5 \times 10^4$  和  $9 \times 10^5$  范围内, 温度云图 (图 4) 和

流线（图 5）的变化过程。图 6 为系统中心点  $u$  的极值随瑞利数  $Ra$  演化的分岔图。图中清晰展示了系统从稳态到混沌的完整演化路径。由于系统在超临界叉式分岔后产生两个完全对称的分支，本文仅展示其中一个分支。以下各节将结合相图、功率谱及 LLE 分析，详细阐述各分岔区间内的动力学特征。

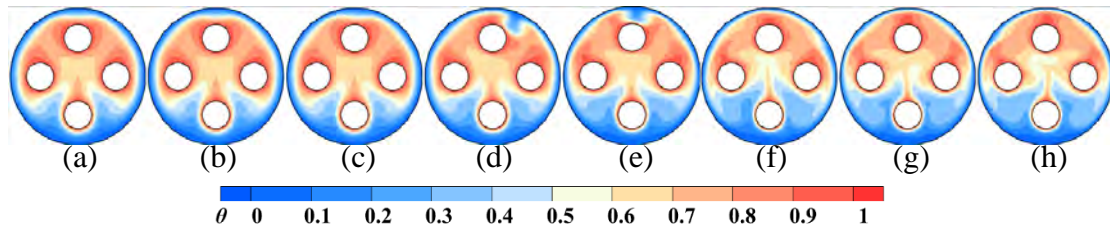


图 4 不同  $Ra$  的温度云图(a)  $Ra = 8.5 \times 10^4$ ; (b)  $Ra = 9 \times 10^4$ ; (c)  $Ra = 9.5 \times 10^4$ ; (d)  $Ra = 1.75 \times 10^5$ ; (e)  $Ra = 3.1 \times 10^5$ ; (f)  $Ra = 6 \times 10^5$ ; (g)  $Ra = 8 \times 10^5$ ; (h)  $Ra = 9 \times 10^5$

Fig.4. Temperature contours at different  $Ra$ :(a)  $Ra = 8.5 \times 10^4$  ;(b)  $Ra = 9 \times 10^4$  ;

(c)  $Ra = 9.5 \times 10^4$  ;(d)  $Ra = 1.75 \times 10^5$  ;(e)  $Ra = 3.1 \times 10^5$  ;(f)  $Ra = 6 \times 10^5$  ;(g)  $Ra = 8 \times 10^5$  ;  
(h)  $Ra = 9 \times 10^5$

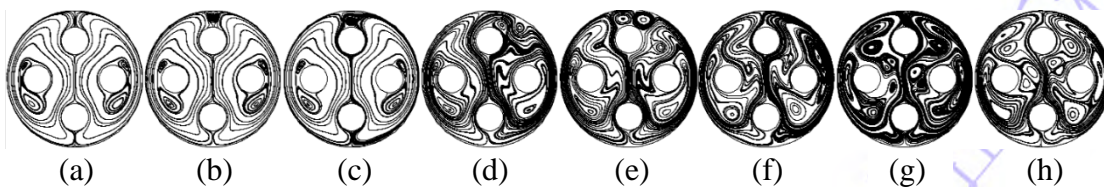


图 5 不同  $Ra$  的流线图(a)  $Ra = 8.5 \times 10^4$ ; (b)  $Ra = 9 \times 10^4$ ; (c)  $Ra = 9.5 \times 10^4$ ; (d)  $Ra = 1.75 \times 10^5$ ; (e)  $Ra = 3.1 \times 10^5$ ; (f)  $Ra = 6 \times 10^5$ ; (g)  $Ra = 8 \times 10^5$ ; (h)  $Ra = 9 \times 10^5$

Fig.5. Streamlines at different  $Ra$ :(a)  $Ra = 8.5 \times 10^4$  ;(b)  $Ra = 9 \times 10^4$  ;

(c)  $Ra = 9.5 \times 10^4$  ;(d)  $Ra = 1.75 \times 10^5$  ;(e)  $Ra = 3.1 \times 10^5$  ;(f)  $Ra = 6 \times 10^5$  ;(g)  $Ra = 8 \times 10^5$  ;  
(h)  $Ra = 9 \times 10^5$

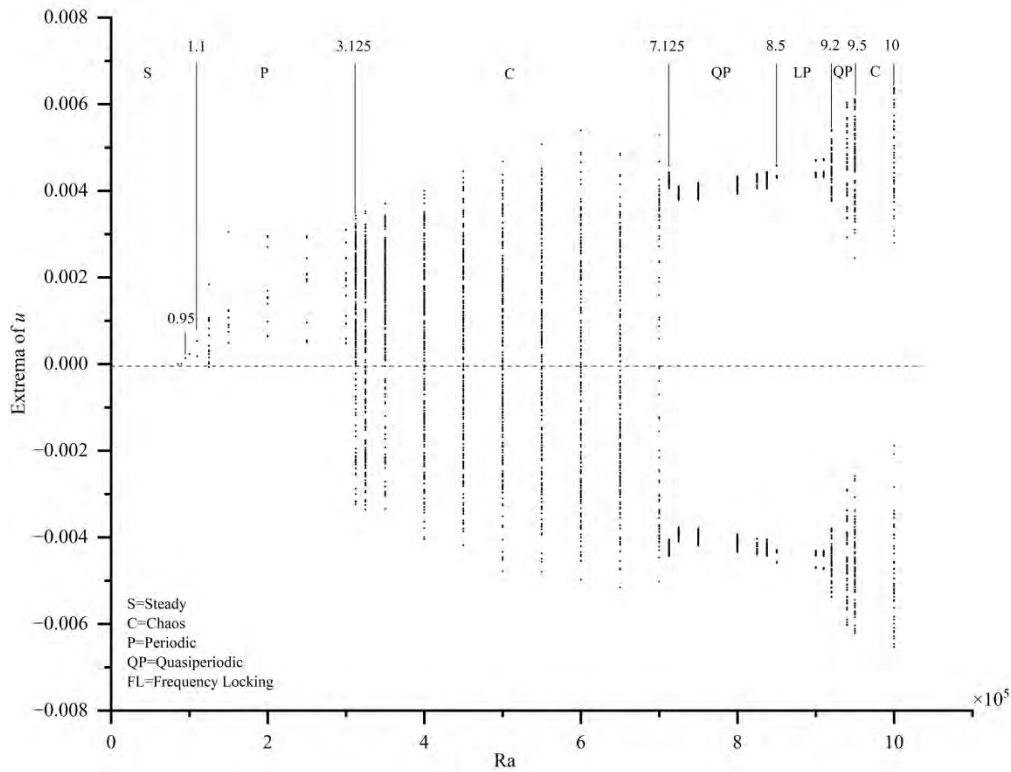


图 6 速度分量  $u$  的极值随瑞利数  $Ra$  的分岔图

Fig. 6. Bifurcation diagram of the extrema of velocity component  $u$  versus Rayleigh number  $Ra$

### 3.1 稳态解

如图 6 所示，在  $Ra = 8.5 \times 10^4$  时，系统处于定常态。由图 4a 和图 5a 可知， $Ra = 8.5 \times 10^4$  时系统温度场与流场均以竖直中心线镜像对称，形成稳定的双环流结构。上热源及左右热源与壁面间的狭窄区域呈现出一维线性温度分布，与文献[19]观察到的“伪扩散”现象物理本质一致，表明在整体对流主导的系统中，局部强几何约束仍可诱发扩散主导的传热机制。图 7 也相应示出了，系统  $\overline{Nu}$  于稳定后不再发生变化。

回到图 5b，可以观测到，在  $Ra = 9 \times 10^4$  时圆腔顶部壁面竖直中心线附近产生一对相向旋转的亚稳态涡胞，流场与温度场仍保持对称状态。随  $Ra$  增大，一个涡发展，另一个涡耗散湮灭，最终形成单一涡胞（图 5c），等温线向一侧倾斜（图 4c）。由于边界条件与插值系数均严格对称，该过程对应一次无外部偏

置的超临界叉式分岔，对称性自发破缺，最终收敛分支由初始场决定，在随机扰动下以等概率选择不同分支，具有路径依赖性。

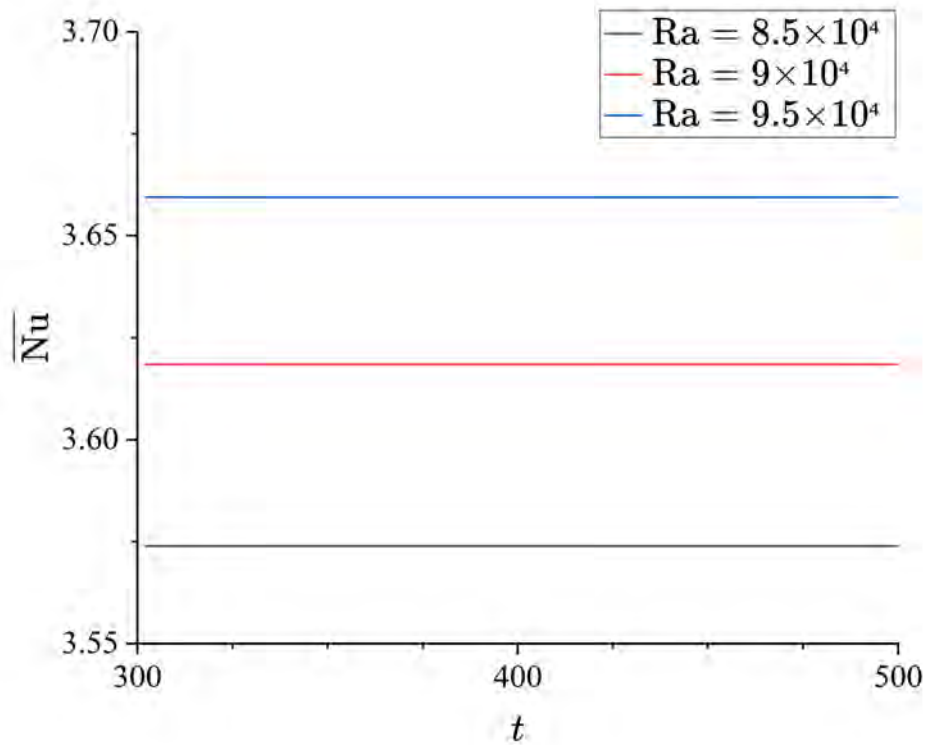


图 7 不同  $Ra$  下  $\overline{Nu}$  的时间演化

Fig.7. Time evolutions of  $\overline{Nu}$  at different  $Ra$

### 3.2 周期解

由图 6 可见， $Ra = 1.1 \times 10^5$  时系统已由定常态演化为稳定的周期振荡态。该振荡表现为上热源主导的涡胞周期性运动：大涡胞先扩展并与主环流贯通，随后脱离并回缩。此时，图 8 系统  $\overline{Nu}$  周期性振荡，图 9a 系统 PSD 图谱的峰构成为  $f_0$  的基频峰以及其整数  $2f_0$ 、 $3f_0$  等的倍谐波峰，图 10 系统  $\overline{Nu}$  重构轨迹及图 11 系统  $u-v$  相图轨迹均表现为一个的极限环。且以高  $Ra$  终场作为初始场获得的解无滞后现象。这些特征共同确认，系统在  $Ra \approx 1.1 \times 10^5$  附近经历了一个超临界 Hopf 分岔（Supercritical Hopf bifurcation，简记为 Hopf 分岔）进入单周期振荡。

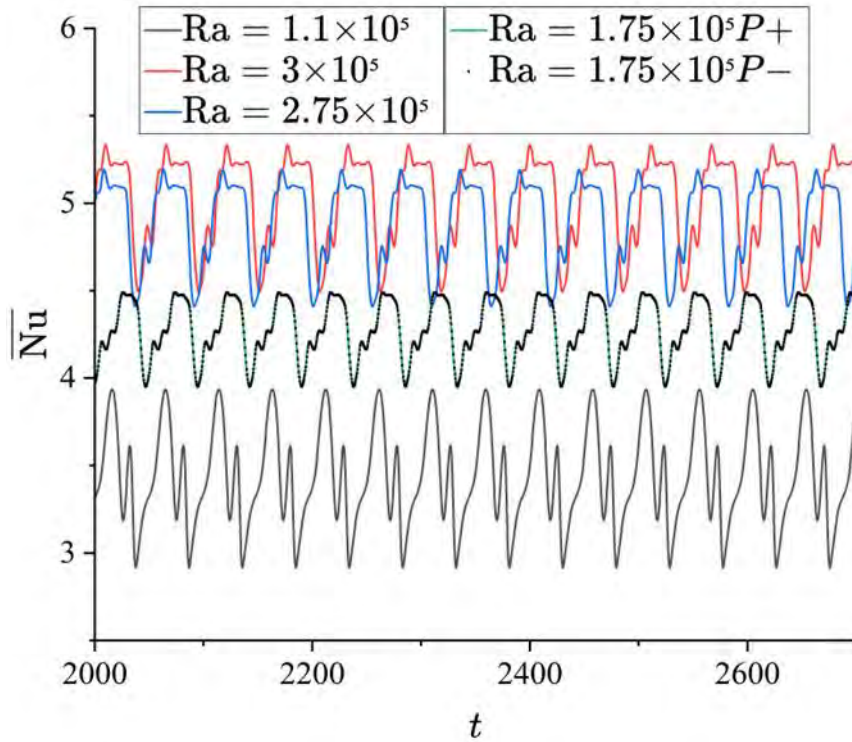


图 8 不同 Ra 下  $\overline{Nu}$  的时间演化

Fig.8. Time evolutions of  $\overline{Nu}$  at different Ra

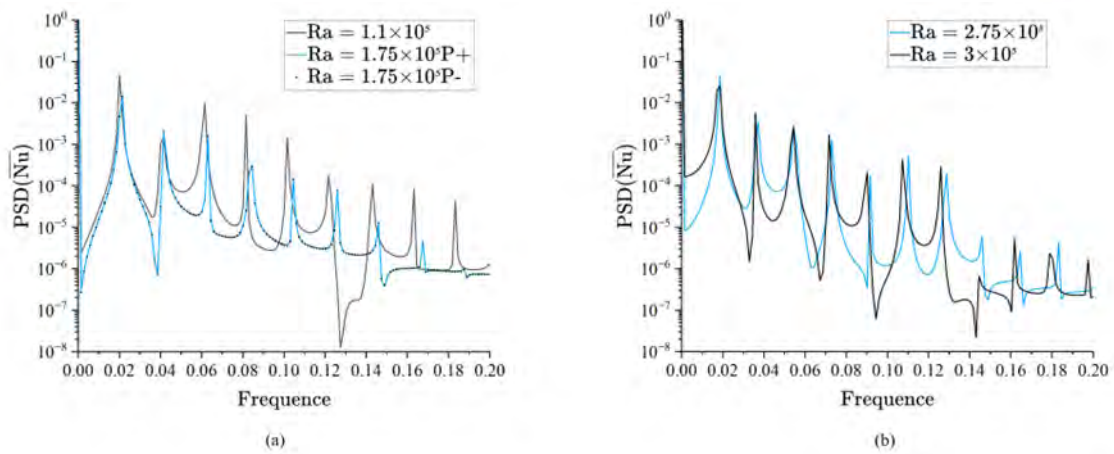


图 9 (a)  $\overline{Nu}$  在  $Ra = 1.1 \times 10^5$  和  $Ra = 1.75 \times 10^5$  下的 PSD;

(b)  $\overline{Nu}$  在  $Ra = 2.75 \times 10^5$  和  $Ra = 3 \times 10^5$  下的 PSD

Fig.9. (a) PSD of  $\overline{Nu}$  at  $Ra = 1.1 \times 10^5$  and  $Ra = 1.75 \times 10^5$ ;

(b) PSD of  $\overline{Nu}$  at  $Ra = 2.75 \times 10^5$  and  $Ra = 3 \times 10^5$

观测图 5d 可知，经 Hopf 分岔后系统随 Ra 增加由涡核伸缩逐渐发展为同时向对称破缺方向移动的单侧双涡运动模式。Ra 继续增加，观测图 5e 可见，流场

中左右热源羽流另一侧开始生成一个小涡，系统流动复杂性增加，相应的图 11 内  $u-v$  相图轨迹的拓扑结构变得更复杂。且系统振荡周期随  $Ra$  的变化呈现非单调性：在 Hopf 分岔初期，周期随  $Ra$  增加而缩短，表现为图 8 中  $\overline{Nu}$  振荡周期缩短及图 9a 中 PSD 图谱中主频频率增大；而在形成稳定的单侧涡对运动后，周期转而随  $Ra$  增加而延长，表现为图 8 中  $\overline{Nu}$  振荡周期延长及图 9b 中 PSD 图谱主频频率减小。尽管  $u-v$  相图拓扑随  $Ra$  增加趋于复杂，但  $\overline{Nu}$  重构轨迹拓扑结构仍为单一的极限环，且 PSD 图谱始终由基频峰及其谐波峰主导。这些特征共同表明，在单侧双涡运动模式的  $Ra$  区间内，系统维持单周期极限环振荡。

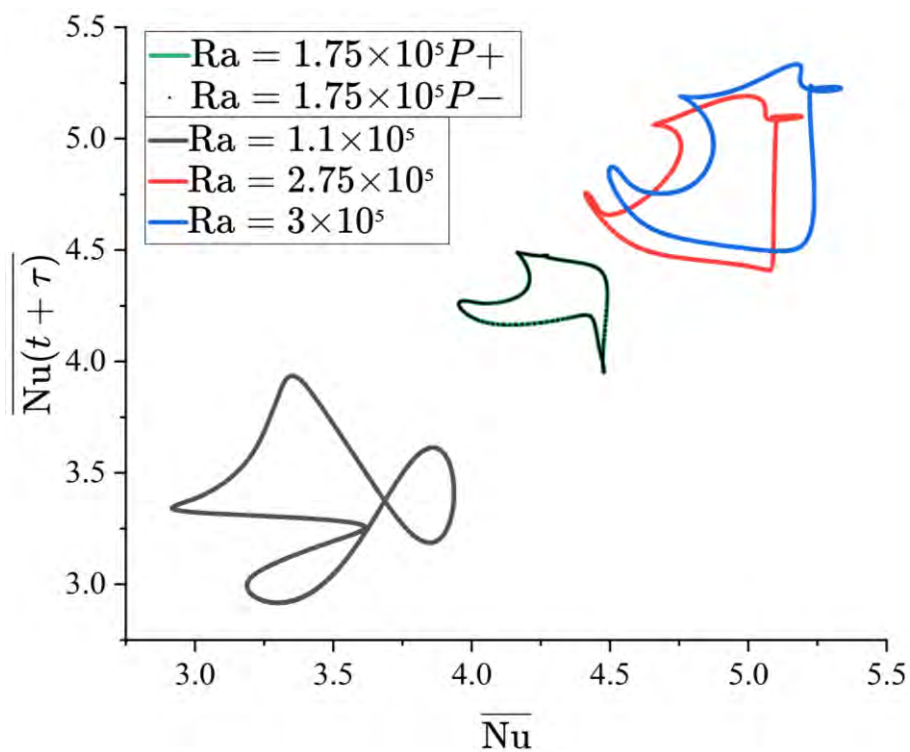


图 10 不同  $Ra$  下  $\overline{Nu}$  相空间重构

Fig.10. Phase space reconstruction diagram of  $\overline{Nu}$  at different  $Ra$

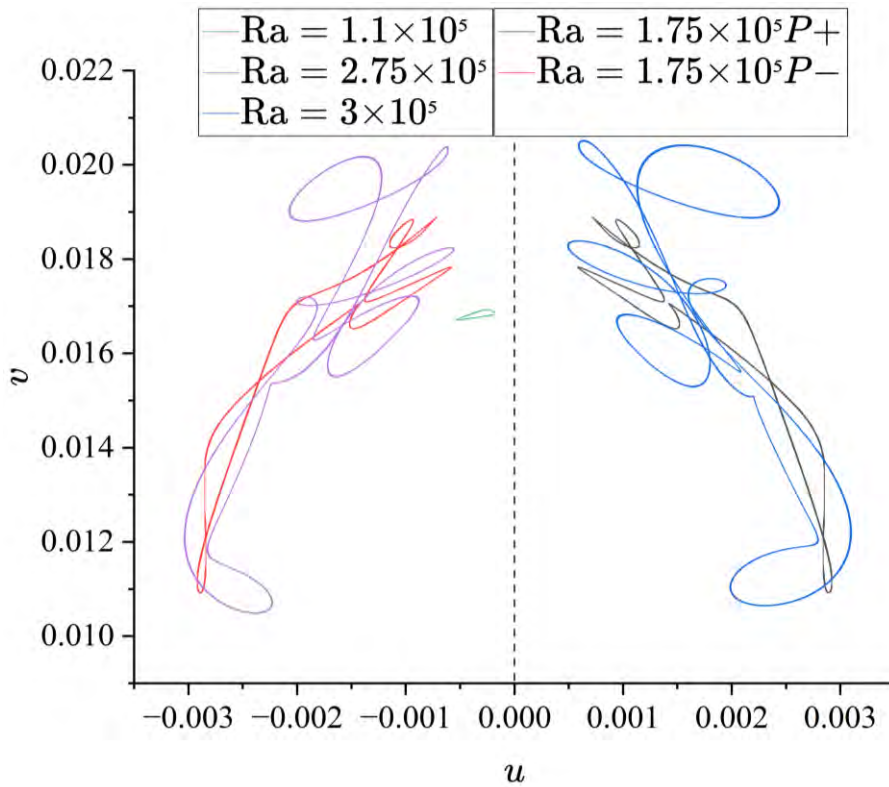


图 11 不同 Ra 下中心点  $u-v$  相图

Fig.11.  $u-v$  phase diagram of center point at different Ra

因系统存在一对的镜像对称的稳定解，即  $P_+$  及  $P_-$ ，取  $Ra = 1.75 \times 10^5$  的两个分支进行非线性分析。可发现其对应的  $\overline{Nu}$  时间序列（图 8）、PSD 图谱（图 9a）、相空间重构的吸引子形态（图 10）完全一致，图中对应两个分支的点和线完全重合。仅在以  $u = 0$  为对称轴的  $u-v$  相图（图 11）上呈现镜像对称。这表明，除空间指向相反外，两个分支的解具有完全相同的非线性动力学行为。因此，在后续分析中仅选取其中一个分支进行深入研究。

### 3.3 异宿分岔与混沌转变

当  $Ra$  数增至  $3.15 \times 10^5$  时，系统动力学发生本质改变。由图 6 得知，系统对称性开始恢复，表现为上热源双涡开始随机且间歇地朝另一侧运动，且随  $Ra$  增加频次增加直至近乎相等。取  $Ra = 4 \times 10^5$  进行分析， $u-v$  相图（图 12）的轨迹呈现出复杂的交叉结构，并通过狭窄的通道连接着两个对应失稳前两个分支方

向的高密度区域，这一拓扑结构符合异宿轨道的特征。PSD 图谱（图 13）由离散谱峰演化为宽频连续谱且  $LLE=0.0642$ ，确认了系统进入混沌状态。

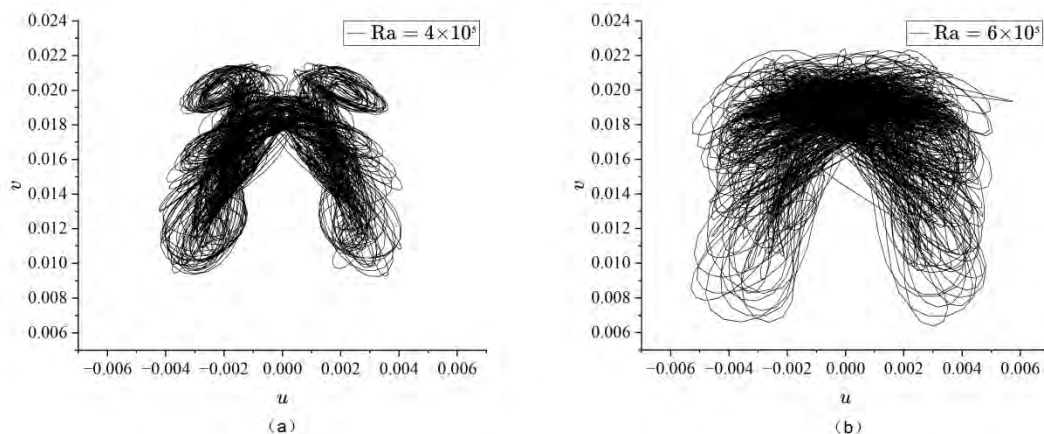


图 12 不同 Ra 中心点  $u-v$  相图 (a)  $Ra = 4 \times 10^5$  ; (b)  $Ra = 6 \times 10^5$

Fig.12.  $u-v$  phase diagram of center point at different Ra

(a)  $Ra = 4 \times 10^5$  ; (b)  $Ra = 6 \times 10^5$

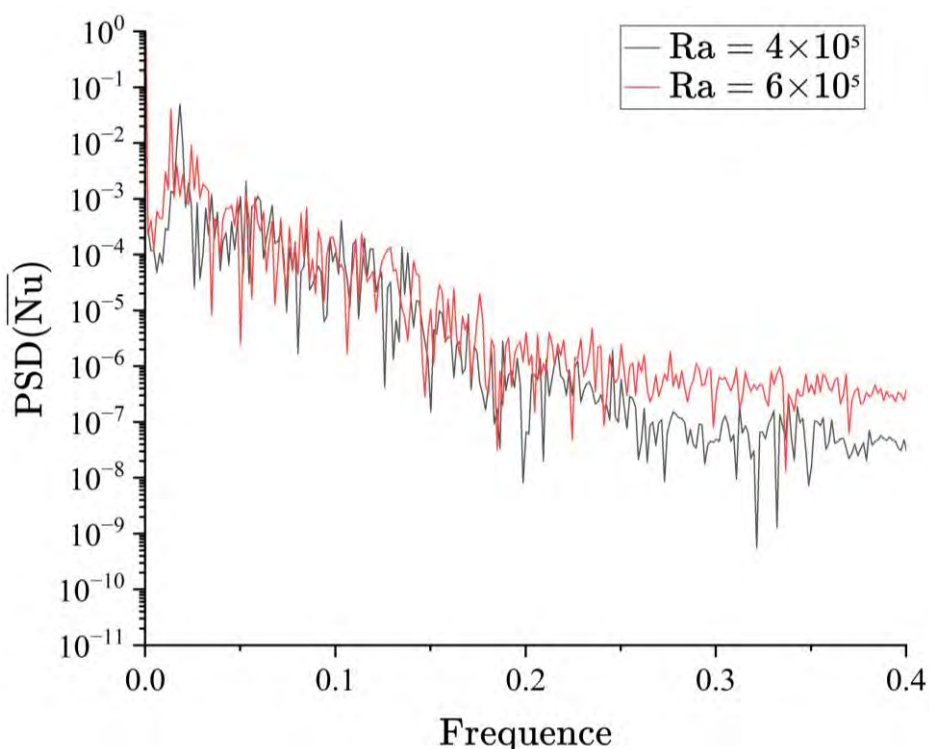


图 13 在  $Ra = 4 \times 10^5$  和  $Ra = 6 \times 10^5$  下  $\overline{Nu}$  的 PSD

Fig.13. PSD of  $\overline{Nu}$  at  $Ra = 4 \times 10^5$  and  $Ra = 6 \times 10^5$

为更直观揭示其动力学拓扑，以水平速度  $u$  重构相空间，如图 14 所示。结果表明，混沌轨迹聚集在四个主要轨迹丛。轨迹只在相邻轨迹丛间穿梭，形成

一个方形的连接网络。这直观地印证了混沌运动源于在两个不稳定状态之间的异宿游走机制。

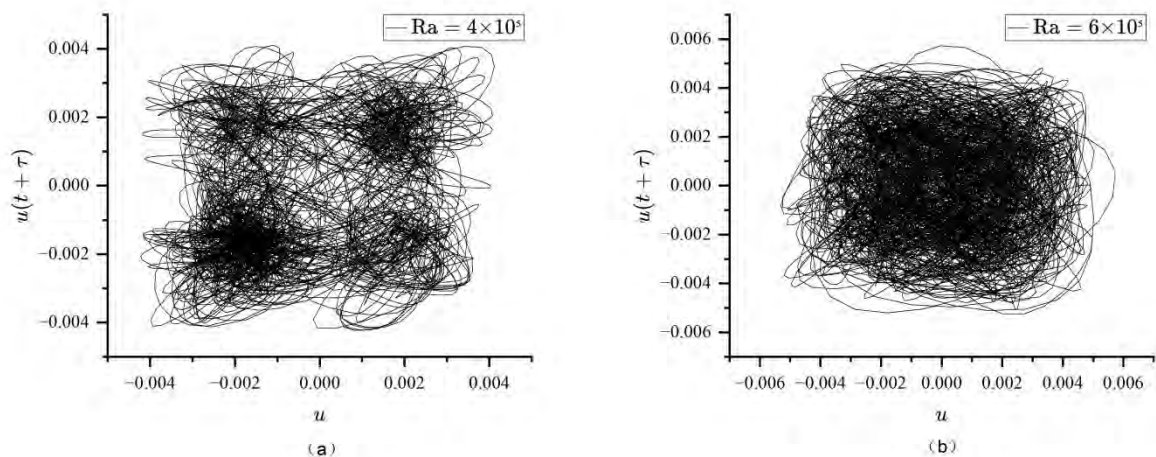


图 14 不同 Ra 的  $u$  相空间重构 (a)  $Ra = 4 \times 10^5$  ; (b)  $Ra = 6 \times 10^5$

Fig.14. Phase space reconstruction diagram of  $u$  at different Ra

(a)  $Ra = 4 \times 10^5$  ; (b)  $Ra = 6 \times 10^5$

综上所述，系统经历了一次异宿分岔（Heteroclinic Bifurcation）。由于离散热源引入的复杂局部激励与系统全局耗散难以平衡，导致形成的异宿环失稳，从而引发了通向混沌的转变。而文献[20]报道了在单热源对流中，系统经历对称破缺及 Hopf 分岔后，呈现双涡单侧振荡现象，并最终通过蓝天灾难（Blue-sky catastrophe）步入混沌。这表明尽管具有相似的物理现象，系统几何形状及热源分布的复杂性直接决定了通向混沌的具体分岔类型。

当 Ra 进一步增加至  $6 \times 10^5$ ，上热源附近流型由“双涡运动”向“中心羽流”过渡。上热源附近两侧运动双涡核生成的时间间隔显著增加，中心热羽流在上热源与顶部壁面之间形成并占据主导，图 15 可见，系统  $\overline{Nu}$  振荡的剧烈期的时间间隔随之增加。这导致依赖于间歇性双涡运动的、大尺度的竖直方向速度振荡在流场中的整体贡献急剧降低；系统的动力学能量与复杂性转而高度集中于水平方向的运动。

该  $Ra$  下系统在相空间（图 12）中体现为混沌吸引子拓扑结构的“坍缩”：轨迹在垂直方向  $v$  的分布范围大幅紧缩，整体结构沿水平方向  $u$  集中演化。在此重构后的吸引子中，密集的核心区域对应于系统长时间处于由上热源中心羽流振荡；而稀疏的外围轨迹则对应着偶发的、残余的侧向双涡运动。在  $u$  相空间重构图（图 14）可见，早期混沌态中基于异宿游走的动力学特征逐渐消退，原有的吸引子结构失稳并重组为一个新的吸引子。此时系统  $LLE=0.4274$ ，仍处于混沌状态。

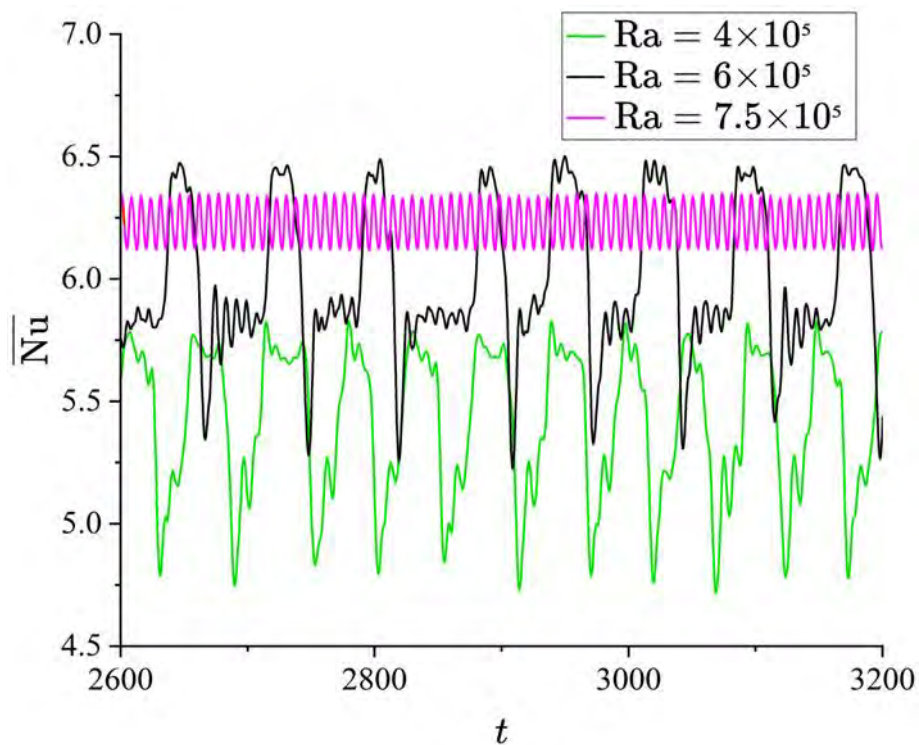


图 15 不同  $Ra$  下  $\overline{Nu}$  数的时间演化

Fig.15. Time evolutions of  $\overline{Nu}$  at different  $Ra$

### 3.4 窗口期

上热源流型在  $Ra$  约  $7.5 \times 10^5$  时发展为完全为中心羽流，图 15 可见  $\overline{Nu}$  振荡幅度减小，图 16 相空间轨迹所有轨迹收敛永不重复、不发散、也不会收敛于任何一条闭合轨道，呈现一个二维环面。此时混沌吸引子失稳，同时系统经由一次环面分岔（Neimark–Sacker bifurcation）进入拟周期窗口，此时 PSD 图谱（图

17) 有两个不可公约的频率  $f_1$  和  $f_2$ , 由这两个频率的线性组合  $f = mf_1 + nf_2$  组成其他峰的频率,  $m$  和  $n$  为整数。

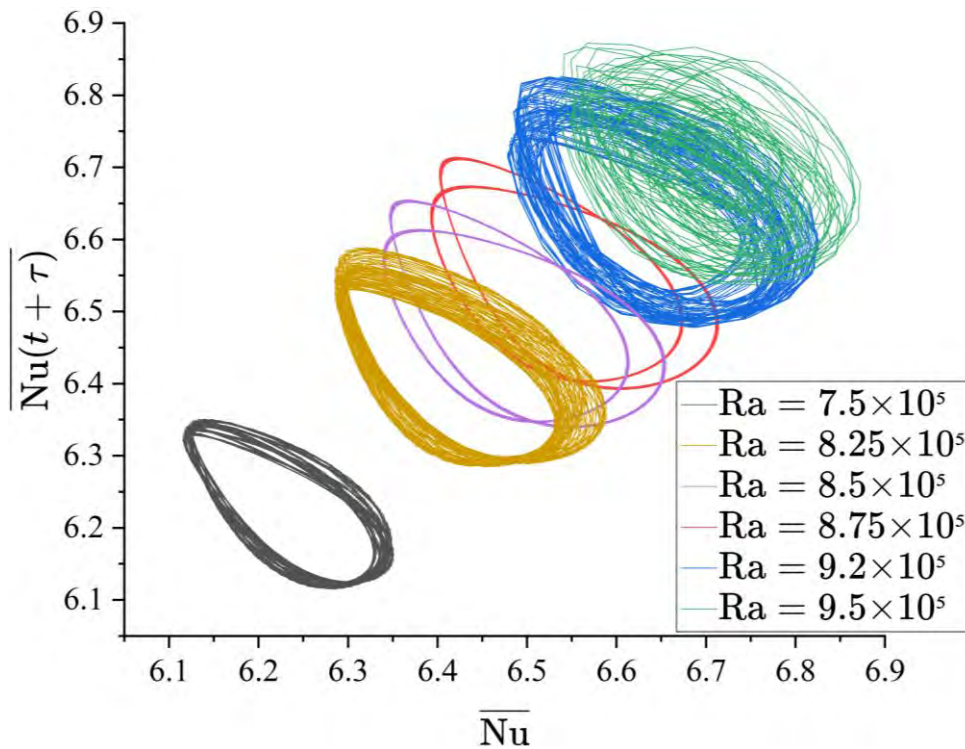


图 16 不同 Ra 数下  $\overline{Nu}$  相空间重构

Fig.16. Phase space reconstruction diagram of  $\overline{Nu}$  at different Ra

Ra 约为  $8.75 \times 10^5$  时, 如图 18 所示, 系统的  $\overline{Nu}$  数以高低峰交替振荡且严格重复, 图 16 相空间轨迹呈现双环状且该双环已持续一小段 Ra 区间。PSD 图谱 (图 17) 拟周期态下存在的两个不可公约的独立频率峰  $f_1$  与  $f_2$  消失, 取而代之的是一个新的基频  $f_0$  及其清晰的  $f_0/2$  次谐波峰。故而可以判断此时系统进入锁频周期振荡。

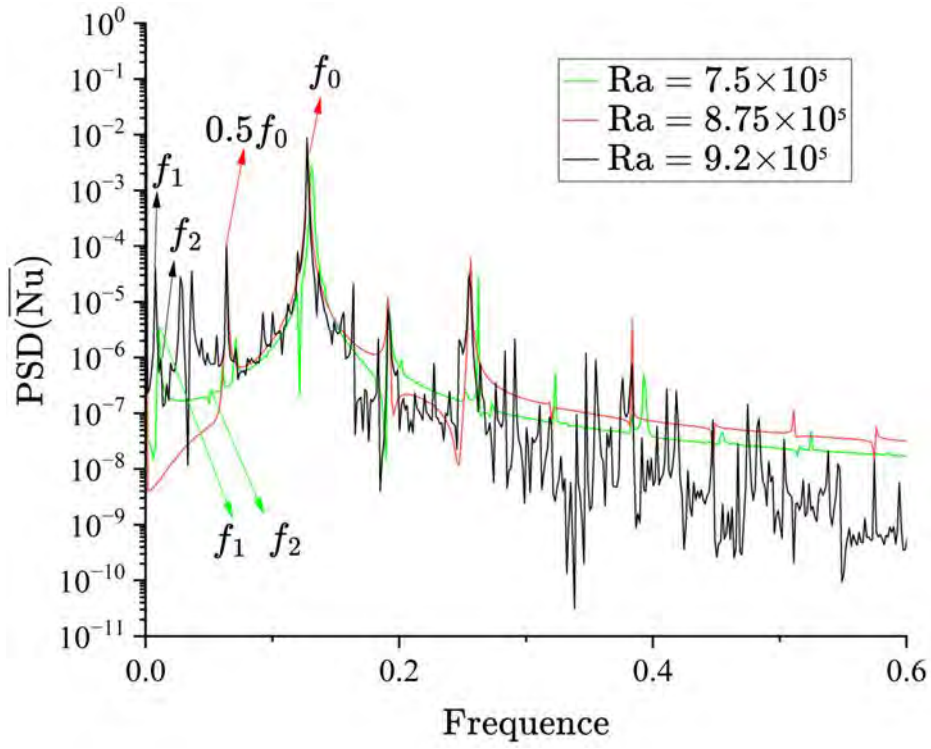


图 17 不同 Ra 的  $\overline{Nu}$  的 PSD

Fig.17. PSD of  $\overline{Nu}$  for different Ra

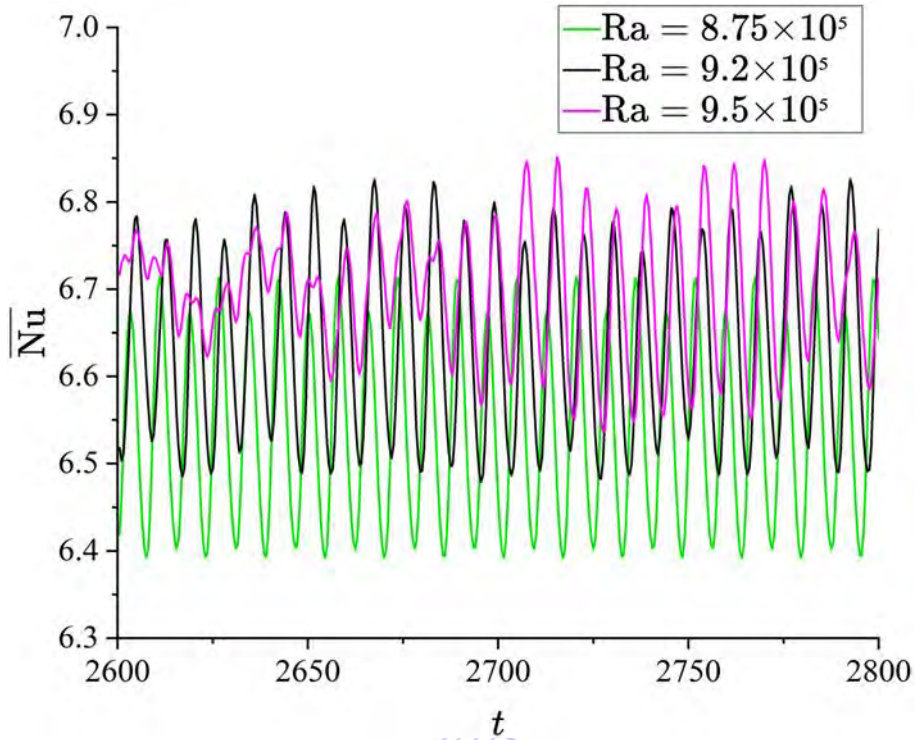


图 18 不同 Ra 下  $\overline{Nu}$  的时间演化

Fig.18. Time evolutions of  $\overline{Nu}$  at different Ra

当  $Ra$  增至  $9.2 \times 10^5$  时, 从图 18 可看出系统  $\overline{Nu}$  从周期振荡状态失稳, 锁频消失, 再次进入拟周期状态。PSD 图谱 (图 17) 两个不可公约的频率  $f_1$  和  $f_2$  再次出现, 对应图 16 的  $\overline{Nu}$  重构轨迹的二维环面结构。  $Ra$  进一步增加至  $9.5 \times 10^5$ , 系统  $\overline{Nu}$  重构轨迹的拟周期环面破裂, 转变为一个具有复杂分形结构的奇怪吸引子。图 19 中 PSD 图谱中离散的线谱被宽频、连续的噪声背景谱所取代且  $LLE=0.1574$ , 系统进入混沌态。

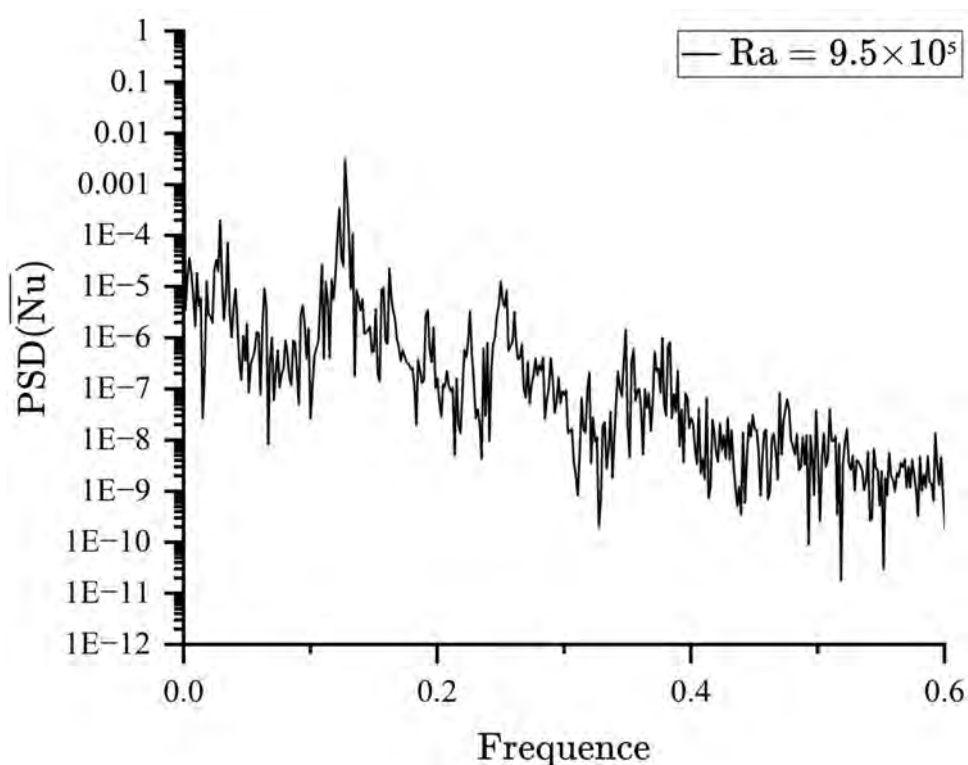


图 19  $Ra = 9.5 \times 10^5$  下  $\overline{Nu}$  的 PSD

Fig.19. PSD of  $\overline{Nu}$  at  $Ra = 9.5 \times 10^5$

由图 5g 与 h 可见, 下热源羽流两侧的大涡随羽流摆动而上升, 导致左右半腔流体输运的延迟。由于物理模型水平对称, 在拟周期阶段, 左右热源  $\overline{Nu}$  的振荡模式 (图 20) 相似但存在稳定相位差, 对应 PSD 图谱 (图 21) 主峰频率一致。同样可从 PSD 图谱中得出, 上下热源  $\overline{Nu}$  的振荡模式不同, 且下热源  $\overline{Nu}$  与系统  $\overline{Nu}$  的振荡模式接近。相对于下热源, 上热源  $\overline{Nu}$  振荡频率高但振幅低。

由于上下热源的羽流均在环流分界线上，两热源羽流振幅及频率的差异均会影响系统左右半腔流体运输的延迟，从而影响系统的动力学行为。上热源的快速调制改变了主环流在顶部区域的瞬时偏转，而下热源的慢速摆动则通过两侧大涡的交替上升驱动左右半腔的周期性运输延迟。两者频率不可公度，使得系统整体处于拟周期状态；而左右热源因受相同的周期性强迫，其相位差仍保持稳定。

随着  $Ra$  增大，当上下热源的频率达到一定比值范围，系统进入锁频周期，且经过四个热源的频率协调，最终呈现为有理数比。继续增大  $Ra$ ，各热源羽流振荡强度持续增强，导致维持频率锁定的动态平衡被打破，系统失锁并从周期态中脱离。随后，系统动力学迅速失稳，经由拟周期或环面破裂途径，最终演变为混沌态。

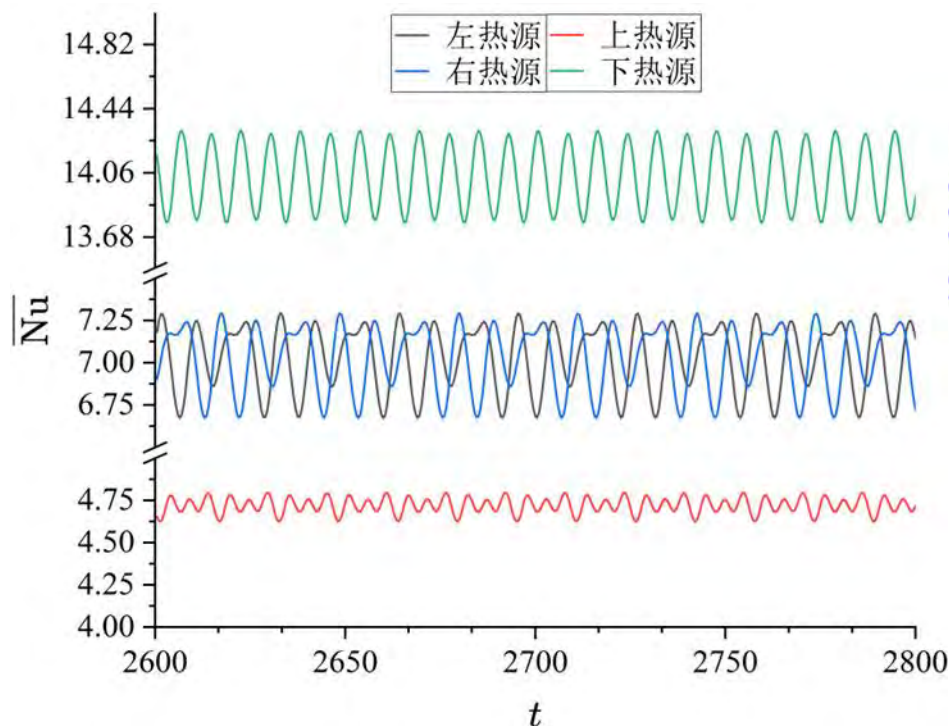


图 20  $Ra = 8.75 \times 10^5$  时各热源  $\overline{Nu}$  的时间演化

Fig.20.  $\overline{Nu}$  evolution of individual heat sources at  $Ra = 8.75 \times 10^5$

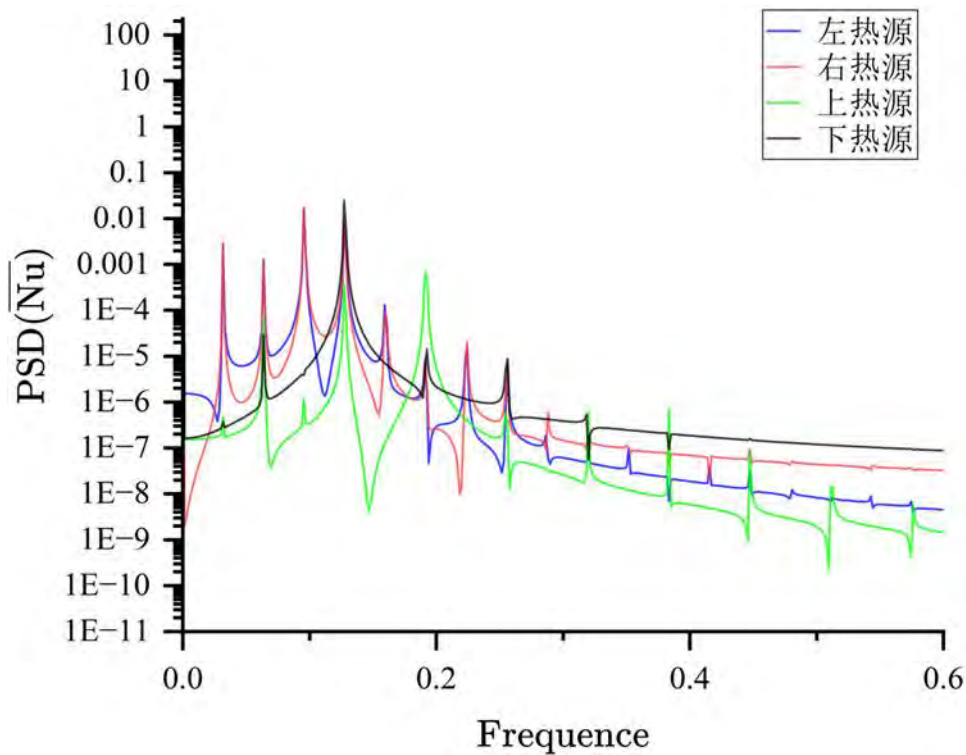


图 21  $Ra = 8.75 \times 10^5$  时各热源  $\overline{Nu}$  的 PSD

Fig.21. PSD of  $\overline{Nu}$  for individual heat sources at  $Ra = 8.75 \times 10^5$

#### 4 结论

采用格子 Boltzmann 方法并通过相空间重构、功率谱密度分析及最大李雅普诺夫指数，研究了随  $Ra$  增大时，具有菱形分布的四个等温内热源的圆形封闭腔内热对流的非线性特征，刻画出了从稳态经多重分岔通向混沌的复杂动力学路径。

主要结论如下：

(1) 低  $Ra$  下，系统呈现稳定的对称双环流定常态。

(2) 在  $Ra \approx 9.5 \times 10^4$  时，系统经历一次超临界叉式分岔，表现为上热源单涡流的自发对称破缺，形成一对稳定的镜像对称定常态解。

(3) 在  $Ra \approx 1.1 \times 10^5$  时，系统经由超临界 Hopf 分岔，从定常态演化为一个稳定的极限环，对应上热源双涡往复运动以及  $Ra$  增大后的单侧运动引发的全局性的单周期振荡。该极限环的性质随  $Ra$  增加而复杂化。

(4)在  $Ra \approx 3.15 \times 10^5$  时，系统流动模式转变为上热源双涡双侧运动，发生全局异宿分岔，导致极限环失稳，直接进入混沌态。此后，混沌吸引子内部结构持续演化，上热源附近流型从间歇性双涡运动逐渐重组为持续的中心羽流。

(5)在  $Ra \approx 7.5 \times 10^5$  附近，混沌吸引子失稳，同时系统经由一次环面分岔，进入一个拟周期窗口。在  $Ra \approx 8.75 \times 10^5$  时，系统发生频率锁定，退化为锁频周期态。随着  $Ra$  进一步增加，锁频条件破坏，系统再次进入拟周期态，最终  $Ra \approx 9.5 \times 10^5$  该拟周期环面破裂，系统再次进入混沌态。

本研究旨在阐明特定紧凑空间几何构型下的热对流稳定性的非线性演化路径，但各热源间的相互作用及其对分岔行为的独立影响尚未充分揭示。后续工作可系统探究热源间距与温度非均匀性等因素，以更全面地理解具有多热源的热对流系统非线性动力学的复杂特性。

## 参考文献

- [1] Wang W B 2024 *Ph. D. Dissertation* (Kunming: Kunming University of Science and Technology) (in Chinese) [王文博 2024 博士学位论文（昆明：昆明理工大学）]
- [2] Wang X M 2024 *2024 Seminar on Heating Engineering Construction and Efficient Operation* (Jinan, China, 2024) pp134–138 (in Chinese) [王晓梦 2024 2024 供热工程建设与高效运行研讨会（济南，中国，2024） 第 134–138 页]
- [3] Yang H, Zhang X J, Huang R Z 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 13 (in Chinese) [杨浩，张销杰，黄荣宗 2023 物理学报 **72** 13]
- [4] Pandey S, Park Y G, Ha M Y 2019 *Int. J. Heat Mass Transfer* **138** 762
- [5] Angeli D, Barozzi G S, Collins M W, Kamiyo O M 2010 *Int. J. Therm. Sci.* **49** 2231

- [6] Mizushima J, Hayashi S, Adachi T 2001 *Int. J. Heat Mass Transfer* **44** 1249
- [7] Rashid M H, Xu F 2025 *Int. J. Therm. Sci.* **214** 109913
- [8] Yin H, Zhao B X 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 11 (in Chinese) [尹慧, 赵秉新 2021 物理学报 **70** 11]
- [9] Yu D M, Zhao M 2019 *J. Univ. Shanghai Sci. Technol.* **41** 2 (in Chinese) [余端民, 赵明 2019 上海理工大学学报 **41** 2]
- [10] Zhao M, Wang K, Yu D M 2020 *Chin. J. Comput. Phys.* **37** 667 (in Chinese) [赵明, 王柯, 余端民 2020 计算物理 **37** 667]
- [11] Mun G S, Park Y G, Yoon H S, Kim M, Ha M Y 2017 *Int. J. Heat Mass Transfer* **114** 1234
- [12] Seo Y M, Mun G S, Park Y G, Ha M Y 2017 *Int. J. Heat Mass Transfer* **114** 1249
- [13] He Y L, Wang Y, Li Q 2009 *Theory and Application of Lattice Boltzmann Method* (1st Ed.) (Beijing: Science Press) pp1, 141 (in Chinese) [何雅玲, 王勇, 李庆 2009 格子 Boltzmann 方法的理论及应用 (第 1 版) (北京: 科学出版社) 第 1, 141 页]
- [14] Guo Z L, Shi B C, Zheng C G 2002 *Int. J. Numer. Methods Fluids* **39** 325
- [15] Guo Z L, Zheng C, Shi B 2002 *Phys. Fluids* **14** 2007
- [16] Li Z, Yang M, Zhang Y 2016 *Int. J. Heat Mass Transfer* **94** 222
- [17] Kuehn T H, Goldstein R J 1976 *J. Fluid Mech.* **74** 695
- [18] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285
- [19] Rao Y F, Miki Y, Fukuda K, Takata Y, Hasegawa S 1985 *Int. J. Heat Mass Transfer* **28** 705

## **A Study on the Evolution of Nonlinear Characteristics in Thermal Convection within a Confined Circular Cavity with Multiple Heat Sources Based on Lattice Boltzmann Method**

XIE Ganhao, ZHAO Ming<sup>†</sup>

(School of Energy and Power Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

### Abstract

The flow and heat transfer characteristics of thermal convection in confined spaces exhibit strong dependence on and complexity due to the spatial geometric configuration. This study numerically investigates the nonlinear dynamics and bifurcation transitions of natural convection in a two-dimensional circular enclosure containing four isothermal circular heat sources arranged in a diamond configuration, with the enclosure wall maintained at a constant cold temperature. The lattice Boltzmann method with a double-distribution function model (D2G9 for the flow field and D2Q4 for the temperature field) is employed to solve the governing equations under the Boussinesq approximation. Numerical simulations are conducted over a range of Rayleigh numbers (Ra) from  $8.5 \times 10^4$  to  $9.5 \times 10^5$  at a fixed Prandtl number of  $Pr=0.706$ . The flow regime transitions are identified through temperature contours and streamlines, while the system state transitions and bifurcation types are determined by analyzing time series, phase space trajectories, power spectral density (PSD), and the maximum Lyapunov exponent.

The results reveal a rich and complex bifurcation cascade as Ra

increases. At low  $Ra$ , the flow remains in a steady, symmetric state. A supercritical pitchfork bifurcation occurs at  $Ra \approx 9.5 \times 10^4$ , where the symmetric steady state loses stability, giving rise to a pair of stable, mirror-image asymmetric steady solutions. This symmetry breaking is manifested by the dominance of a single vortex near the top heat source. As  $Ra$  increases further to  $Ra \approx 1.1 \times 10^5$ , the system undergoes a supercritical Hopf bifurcation, transitioning from a steady to a stable periodic oscillatory state represented by a limit cycle in phase space. This single-frequency oscillation is driven by the periodic expansion and contraction of the dominant vortex near the top heat source. Between  $Ra \approx 1.75 \times 10^5$  and  $3 \times 10^5$ , the system maintains single-periodic oscillations, with vortices periodically generated near the top heat source and moving toward one side. A fundamental change in dynamics occurs at  $Ra \approx 3.15 \times 10^5$ , where a global heteroclinic bifurcation is identified. The limit cycle destabilizes, and the system transitions directly into chaos, confirmed by a broad-band PSD and a positive maximum Lyapunov exponent. Phase space reconstruction reveals chaotic trajectories intermittently visiting regions corresponding to the two unstable mirror-image states, forming a heteroclinic network. As  $Ra$  increases through the chaotic regime, the flow structure near the top heat source reorganizes from intermittent dual-vortex motion to a persistent central thermal plume, causing the collapse of the chaotic attractor's topology. Remarkably, at  $Ra \approx 7.5 \times 10^5$ , the chaotic state destabilizes via a torus bifurcation, leading to a quasi-periodic window characterized by two incommensurate frequencies in the PSD. This is followed by a frequency-locking phenomenon at  $Ra \approx 8.75 \times 10^5$ , where the system reverts to a periodic state. The locked state eventually breaks down as  $Ra$  increases, re-entering quasi-periodicity and finally transitioning back to a fully developed chaotic state through torus breakdown at  $Ra \approx 9.5 \times 10^5$ .

In conclusion, this study elucidates a complex and non-standard route to chaos for multi-source natural convection in a circular enclosure, involving successive steady symmetry breaking, Hopf bifurcation, a direct transition to chaos via heteroclinic bifurcation, and a subsequent quasi-periodic window with frequency locking. The findings highlight the profound influence of the interplay between multiple discrete heat sources and curved boundaries on the system's nonlinear dynamics.

**Keywords:** Chaos; Multi-heat sources; Thermal convection; Lattice Boltzmann method

---

\* This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.51306120).

# These authors contributed equally.

† Corresponding author.E-mail: lightzm@usst.edu.cn  
The first author.E-mail: 2765654672@qq.com

录用稿件，非最终出版稿