

利用光锥求和规则方法计算强子耦合常数  $B_{cc}B_c^6D^*$ 胡晓会<sup>†</sup> 刘寒冰 邢晔

(中国矿业大学材料与物理学院, 徐州 221116)

(2026年3月2日收到; 2026年3月30日收到修改稿)

自双粲重子发现以来, 大型强子对撞机持续探寻更多双重重子信号. 随着数据的不断积累, 未来有望观测到更多此类重子态, 相关理论研究对实验识别具有重要意义. 在双粲重子弱衰变过程, 尤其是非轻衰变中, 显著的末态相互作用常给理论计算带来较大不确定性. 利用末态相互作用方法研究粲-底重子非轻弱衰变时, 需要输入自旋为 1/2 的双粲重子和单粲重子与粲味介子之间的强耦合常数, 然而目前较为缺乏此类参数的理论研究. 为填补这一空白, 本文基于光锥 QCD 求和规则, 从自旋为 1/2 的单粲味重子六重态  $B_c^6$  的光锥分布振幅出发, 构建强子耦合常数  $g_{B_{cc}B_c^6D}$  的关联函数. 并分别计算强子层次与夸克层次的关联函数, 利用夸克-强子对偶, 推导出此类耦合常数的求和规则的解析表达式, 并给出数值结果和误差分析. 本研究为双粲重子的强衰变与弱衰变动力学提供了关键的理论输入参数, 相关结果可直接用于相关衰变过程的理论研究.

**关键词:** 强子耦合常数, 双粲味重子, 光锥求和规则方法, 光锥分布振幅

**DOI:** 10.7498/aps.75.20260295

**CSTR:** 32037.14.aps.75.20260295

## 1 引言

在实验方面, LHCb、CMS、CDF、Belle 和 BaBar 等多个合作组陆续发现了一系列含重夸克的新强子态, 显著推动了强子物理的实验探索与理论发展<sup>[1-3]</sup>. 对这些重味强子的深入研究, 为理解强子结构、强相互作用动力学以及重夸克对称性提供了关键途径. 人们利用夸克模型预言了由两个重味夸克 (c 或 b 夸克) 和一个轻夸克构成的双重味重子的存在. 但实验上探测这类双重重子极具挑战. 2005 年, SELEX 合作组首次报道了  $\Xi_{cc}^+$  存在的初步迹象, 其衰变末态为  $\Lambda_c^+K^- \pi^+$  和  $pD^+K^-$ <sup>[4,5]</sup>. 然而,  $\Xi_{cc}^+(3519)$  态的存在未能被后续的 FOCUS、BaBar、LHCb 和 Belle 等实验所确认<sup>[6-9]</sup>, 因此未被收录进 Particle Data Group(PDG)<sup>[10]</sup>. 随着大型强子对撞机 (Large Hadron Collider, 简称 LHC) 持续运行, 更多重味强子态陆续被发现. 2017 年,

LHCb 合作组在  $\Lambda_c^+K^- \pi^+ \pi^+$  的不变质量谱中观测到  $\Xi_{cc}^{++}(3621)$ <sup>[11]</sup>, 该发现与夸克模型的理论预言一致<sup>[11-13]</sup>, 进一步完善了重味强子谱. 2018 年, LHCb 进一步通过  $\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_{cc}^+ \pi^+$  衰变道确认了该粒子, 并测得寿命为  $0.256_{-0.022}^{+0.024}$  (stat.)  $\pm$  0.014 (syst.) ps<sup>[14,15]</sup>. 最近 LHCb 实验组又通过  $\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \pi^+$  衰变道观测到了  $\Xi_{cc}^+(3619)$ , 具体内容可参考 LHC 网站. 尽管 LHCb 合作组持续搜寻理论预言的其它双重味重子, 例如双粲态  $\Omega_{cc}^+$  以及粲底重子  $\Xi_{bc}^+$ 、 $\Xi_{bc}^0$ 、 $\Omega_{bc}^0$  等, 但迄今尚未观测到显著信号<sup>[16-21]</sup>. 这可能是由于当前数据样本的积分亮度不足, 或探测通道的选择尚未优化. 目前 LHCb 实验已完成第三轮数据采集阶段, 积分亮度显著提升, 为发现更多双重味重子带来了前所未有的机遇<sup>[22]</sup>. 因此, 目前从多角度研究双粲重子的性质不仅有助于揭示新强子态的基本物理特征, 也将推动夸克模型预言的更多双重味重子的实验寻找.

对双粲重子性质展开深入且细致的理论研究

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12505114) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: luxiaohui@cumt.edu.cn

具有重要意义, 相关成果既可为实验探测提供丰富参考, 也有助于理解其内部结构和量子色动力学 (Quantum Chromodynamics, 简称 QCD) 所描述的强相互作用机制. 目前, 已有大量理论工作系统研究了双重重子的质量谱、寿命及其他实验可观测量. 在质量谱方面, 格点 QCD<sup>[23,24]</sup>、QCD 求和规则<sup>[25-27]</sup> 以及手征微扰理论<sup>[28,29]</sup> 等均提供了理论预言. 寿命计算则主要基于算符乘积展开<sup>[30]</sup> 和重夸克展开<sup>[31]</sup>. 弱衰变过程已通过多种非微扰方法进行研究, 包括光锥求和规则 (light cone sum rules, 简称 LCSRs)<sup>[32,33]</sup>、夸克模型<sup>[34-36]</sup>、SU(3) 味道对称性<sup>[37-39]</sup> 与末态相互作用方法<sup>[40]</sup> 等. 此外, 研究还扩展至跃迁磁矩、强衰变与辐射衰变等过程. 例如, 手征微扰理论<sup>[41,42]</sup> 和 LCSRs<sup>[43]</sup> 被用于计算跃迁磁矩; 强衰变与辐射衰变也获得深入研究<sup>[44]</sup>. 另有研究基于 LCSRs 计算了双重重子与轻介子的强耦合常数<sup>[45,46]</sup>.

然而, 目前关于双粲重子的研究多集中于质量谱与弱衰变过程, 而对其强衰变行为及其与其他强子之间的强耦合相互作用的探讨仍相对有限. 特别是双粲重子、自旋 1/2 单粲重子六重态与粲介子 D 之间的强耦合常数  $g_{B_{cc}B_c^6D}$ , 尚未被系统研究. 从理论上讲, 由于双粲重子的质量通常低于自旋 1/2 单粲重子六重态与 D 介子的质量阈值, 其在树图层次无法发生实强衰变. 然而, 在对粲底重子弱衰变进行高阶圈图计算时, 常需借助末态相互作用等机制分析其非轻子衰变过程. 在此类过程中, 虚粲介子的传播使得强耦合  $g_{B_{cc}B_c^6D}$  成为不可或缺的输入参数, 对准确刻画相关物理图像具有关键作用. 此外, 该耦合常数本身也为深入理解双重重子的内部结构提供了重要的非微扰探针. 基于上述动机, 本文将采用 LCSRs 方法, 并结合 SU(3) 味道对称性, 系统研究双粲重子、自旋 1/2 单粲重子六重态与粲味介子 D 之间的强耦合  $g_{B_{cc}B_c^6D}$ . LCSRs 是在传统 QCD 求和规则基础上发展而来的非微扰方法, 该方法已被广泛应用于重味介子弱衰变的研究<sup>[47]</sup>. QCD 求和规则以 QCD 拉氏量为出发点, 充分考虑 QCD 真空的非微扰性质; 而 LCSRs 则引入光锥变量, 将算符乘积展开 (operator product expansion, 简称 OPE) 建立在光锥附近  $x^2 \sim 0$  的区域, 并依照扭度进行展开. 在此框架下, 所有非微扰效应被吸收至非局域算符的矩阵元中, 并借助具有普适性的光锥分布振幅 (light-cone distribu-

tion amplitudes, 简称 LCDAs) 进行参数化<sup>[48-50]</sup>. 这些分布振幅所包含的非微扰参数可通过 QCD 求和规则独立确定, 从而保证了理论计算的自洽性与可移植性.

本文首先简要介绍利用 LCSRs 计算强子耦合常数  $g_{B_{cc}B_c^6D}$  的具体过程, 然后给出数值结果, 并对 Borel 参数  $M_{1,2}^2$  和连续谱阈值  $s_{th}$  的依赖性展开分析, 之后对所得数值结果进行讨论, 最后进行总结.

## 2 理论框架

在 LCSRs 框架下, 其核心研究对象为关联函数. 该函数可通过两种互补的途径进行计算: 在强子层次, 通过插入与插值流具有相同量子数的强子态完备集, 分离出基态贡献, 从而构建关联函数的唯象表示; 而在 QCD 层次, 可借助算符乘积展开 (OPE) 在 QCD 自由度下进行直接计算, 得到其理论表示. 并通过夸克-强子对偶性建立等价关系, 从而导出求和规则. 此外, 为压低连续谱贡献、抑制色散积分中高激发态与连续态带来的发散, 还需引入 Borel 变换以增强求和规则的收敛性与稳定性.

本节将基于光锥求和规则方法, 利用单粲重子六重态的光锥分布振幅, 系统计算双粲重子、单粲重子六重态与 D 介子之间的强耦合常数  $g_{B_{cc}B_c^6D}$ . 具体安排如下: 第 2.1 小节将推导强子层次的求和规则表达式; 第 2.2 小节则基于单粲重子六重态  $B_c^6$  的光锥分布振幅, 给出 QCD 层次的理论推导; 第 2.3 小节将讨论夸克-强子对偶性的具体应用及其在求和规则构建中的作用.

### 2.1 强子层次

两点关联函数可以写成

$$\Pi(p, q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle B_c^6(p) | T \{ j_5(x) \bar{j}_{B_{cc}}(0) \} | 0 \rangle, \quad (1)$$

其中插入的赝标量流和双粲重子流可以表示为:

$$j_5(x) = \bar{q}_a(x) i\gamma_5 Q_a(x),$$

$$\bar{j}_{B_{cc}}(0) = \epsilon_{abc} \bar{q}_c \gamma_\mu \gamma_5 (\bar{Q}_b(0) \gamma^\mu C \bar{Q}_a^T(0)). \quad (2)$$

其中  $q = u, d, s$  表示夸克场, 下标  $a, b, c$  是颜色指标, 且为与颜色指标区分, 本文部分地方会用  $Q$  表示粲夸克.  $B_{cc}$  和  $B_c^6$  分别表示双粲重子和单粲重子. 在 SU(3) 味对称性下, 它们的矩阵可以表示为如下形式<sup>[51-53]</sup>:

$$\mathcal{B}_c^6 = \begin{pmatrix} \Sigma_c^{++} & \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_c^+ & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c'^{++} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_c^+ & \Sigma_c^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c'^0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c'^+ & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c'^0 & \Omega_c^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_{cc} = (\Xi_{cc}^{++} \Xi_{cc}^+ \Omega_{cc}^+).$$

为计算出强子层次关联函数, 需插入相应强耦合的有效拉氏量<sup>[51,52]</sup>:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6\mathcal{D}} = g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6\mathcal{D}} \text{Tr}[\bar{\mathcal{B}}_c^6 i\gamma_5 \mathcal{D} \mathcal{B}_{cc}], \quad (3)$$

其中,  $g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6\mathcal{D}}$  表示强子耦合常数. 赝标量 D 介子的矩阵形式为  $\mathcal{D} = (D^0 D^+ D_s^+)$ . 式 (3) 中的迹需要在味道空间中进行. 强子耦合常数  $g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6\mathcal{D}}$  的定义如下:

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{B}_c^6(p', s'_z) \mathcal{D}(q, s) | \mathcal{L}_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6\mathcal{D}} | \mathcal{B}_{cc}(p, s_z) \rangle \\ & = g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6\mathcal{D}} \bar{u}(p', s'_z) i\gamma_5 u(p, s_z) \end{aligned} \quad (4)$$

其中, 双粲重子的动量为  $p'^\mu = p^\mu + q^\mu$ . 在关联函数式 (1) 中插入双粲重子和 D 介子态的完备集后, 对  $x$  进行傅里叶积分, 就可得到:

$$\Pi(p, q) = \frac{\langle 0 | j_5 | \mathcal{D}(q) \rangle \langle \mathcal{B}_c^6(p) \mathcal{D}(q) | \mathcal{B}_{cc}(p+q) \rangle \langle \mathcal{B}_{cc}(p+q) | \bar{j}_{\mathcal{B}_{cc}} | 0 \rangle}{[(p+q)^2 - m_{\mathcal{B}_{cc}}^2][q^2 - m_{\mathcal{D}}^2]} + \dots \quad (5)$$

利用式 (4) 以及双粲重子  $\mathcal{B}_{cc}$  和 D 介子衰变常数的标准定义<sup>[26,54]</sup>,

$$\langle \mathcal{B}_{cc}(p', s'_z) | j_{\mathcal{B}_{cc}} | 0 \rangle = f_{\mathcal{B}_{cc}} \bar{u}(p', s'_z), \quad \langle 0 | j_5 | \mathcal{D} \rangle = \frac{f_{\mathcal{D}} m_{\mathcal{D}}^2}{m_c + m_q}, \quad (6)$$

这里,  $m_c$  与  $m_q$  分别表示粲夸克和轻夸克 ( $u, d, s$ ) 的质量. 对自旋求和后, 强子层次的关联函数可写为:

$$\Pi^H(p, q) = -i g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6\mathcal{D}} f_{\mathcal{B}_{cc}} \frac{f_{\mathcal{D}} m_{\mathcal{D}}^2}{m_c + m_q} \frac{\bar{u}_{\mathcal{B}_c^6}[(m_{\mathcal{B}_c^6} - m_{\mathcal{B}_{cc}})\gamma_5 + \not{q}\gamma_5]}{[(p+q)^2 - m_{\mathcal{B}_{cc}}^2][q^2 - m_{\mathcal{D}}^2]} + \dots \quad (7)$$

如式 (7) 所示, 最终表达式中包含了两种  $\gamma$ -矩阵结构. 本文将选择结构  $\not{q}\gamma_5$  来分析强耦合  $g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6\mathcal{D}}$ .

## 2.2 从单粲重子六重态的 LCDAs 出发来计算 QCD 层次的关联函数

本节的主要理论任务是计算式 (1) 给出的 QCD 层次关联函数. 为此, 我们引入包含自旋宇称  $j^P = 0^+$  diquark 的单粲重子在光锥坐标下的 LCDAs. 在光锥条件  $x^2 = 0$  下, 该重子的 LCDAs 可参数化为:

$$\begin{aligned} & \epsilon_{abc} \langle \mathcal{B}_Q^6(v) | \bar{q}_{1k}^a(t_1) \bar{q}_{2i}^b(t_2) \bar{Q}_\gamma^c(0) | 0 \rangle \\ & = \frac{1}{8} v_+ \psi_{\parallel}^{n*}(t_1, t_2) f^{(1)} (\bar{u}_{\mathcal{B}_c^6} \bar{\gamma} \gamma_5)_\gamma (C^{-1} \bar{n})_{ki} \\ & \quad - \frac{1}{8} \psi_{\parallel}^{n\bar{n}*}(t_1, t_2) f^{(2)} (\bar{u}_{\mathcal{B}_c^6} \bar{\gamma} \gamma_5)_\gamma (C^{-1} i\sigma^{\mu\nu})_{ki} \bar{n}_\mu n_\nu \\ & \quad + \frac{1}{4} \psi_{\parallel}^{1*}(t_1, t_2) f^{(2)} (\bar{u}_{\mathcal{B}_c^6} \bar{\gamma} \gamma_5)_\gamma (C^{-1})_{ki} \\ & \quad - \frac{1}{8v_+} \psi_{\parallel}^{\bar{n}*}(t_1, t_2) f^{(1)} (\bar{u}_{\mathcal{B}_c^6} \bar{\gamma} \gamma_5)_\gamma (C^{-1} \not{n})_{ki} \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $q = u, d, s$  表示轻夸克场,  $Q = c$  表示重味夸克场, 上标  $a, b, c$  是颜色指标. 单粲重子的速度  $v$  和光锥矢量  $n$  应以  $x$  和  $v$  的洛伦兹协变形式表示:

$$\begin{aligned} n &= \frac{x}{v \cdot x}, \quad \bar{n} = 2v - \frac{x}{v \cdot x}, \\ \bar{v} &= \frac{1}{2} \left( \frac{n}{v_+} - v_+ \bar{n} \right) = \frac{1}{2} (n - \bar{n}) = \frac{x}{v \cdot x} - v. \end{aligned} \quad (9)$$

光锥分布振幅的傅里叶变换形式可以给出如下:

$$\psi(x_1, x_2) = \int_0^\infty d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\omega_1 t_1} e^{-i\omega_2 t_2} \psi(\omega_1, \omega_2). \quad (10)$$

这里, 两个轻夸克的动量  $\omega_1$  和  $\omega_2$  沿光锥方向. 双夸克的总动量大小为  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ . 注意,  $x_1 = t_1 n$ ,  $x_2 = t_2 \bar{n}$ .

$$\psi(t_1, t_2) = \int_0^\infty d\omega d\omega_2 e^{-i\omega t_1} e^{-i\omega_2 (t_2 - t_1)} \psi(\omega, \omega_2), \quad (11)$$

$$\psi(0, t_2) = \int_0^\infty d\omega \int_0^1 du e^{-i\bar{u}\omega v \cdot x_2} \psi(\omega, u). \quad (12)$$

其中,  $t_i = v \cdot x_i$ ,  $\omega_2 = (1-u)\omega = \bar{u}\omega$ . 式 (8) 中的 LCDAs 可以重新命名为不同的扭度分量:

$$\psi_{\parallel}^n(\omega, u) \rightarrow \psi_2(\omega, u), \quad \psi_{\parallel}^{n\bar{n}}(\omega, u) \rightarrow \psi_{3a}(\omega, u),$$

$$\psi_{\parallel}^1(\omega, u) \rightarrow \psi_{3s}(\omega, u), \quad \psi_{\parallel}^{\bar{n}}(\omega, u) \rightarrow \psi_4(\omega, u).$$

接下来, 我们将讨论 QCD 层次的关联函数的计算:

$$\begin{aligned}\Pi^{\text{QCD}}(p, q) &= i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \mathcal{B}_c^6(p) | T \{ j_5(x) \bar{j}_{B_{cc}}(0) \} | 0 \rangle \\ &= -2i \int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon_{abc} \{ \langle \mathcal{B}_c^6(p) | \bar{q}_{1k}^a(0) \bar{q}_{2i}^b(x) \bar{Q}_m^c(0) | 0 \rangle (i\gamma_5 S^Q(x) \gamma^\nu C)_{im} (\gamma_\nu \gamma_5)_{kl} \},\end{aligned}\quad (13)$$

将式 (8—9) 的表达式代入式 (13), 可以得到关联函数:

$$\begin{aligned}\Pi^{\text{QCD}}(p, q) &= -\frac{i}{4} \int d^4x \int_0^\infty d\omega \omega \int_0^1 du e^{i(q+\bar{u}\omega v) \cdot x} \times \left\{ v_+ \psi_2(\omega, u) f^{(1)} \bar{u}_{B_c^6} [\bar{\gamma} \gamma_5 \gamma^\nu C S^Q(x)^T C^T (i\gamma_5) \not{x} \gamma_\nu \gamma_5] \right. \\ &\quad - \psi_{3a}(\omega, u) f^{(2)} \bar{u}_{B_c^6} [\bar{\gamma} \gamma_5 \gamma^\nu C S^Q(x)^T C^T (i\gamma_5) i \sigma^{\alpha\beta} \gamma_\nu \gamma_5] \bar{n}_\alpha n_\beta \\ &\quad - 2\psi_{3s}(\omega, u) f^{(2)} \bar{u}_{B_c^6} [\bar{\gamma} \gamma_5 \gamma^\nu C S^Q(x)^T C^T (i\gamma_5) \gamma_\nu \gamma_5] \\ &\quad \left. - \frac{1}{v_+} \psi_4(\omega, u) f^{(1)} \bar{u}_{B_c^6} [\bar{\gamma} \gamma_5 \gamma^\nu C S^Q(x)^T C^T (i\gamma_5) \not{x} \gamma_\nu \gamma_5] \right\}.\end{aligned}\quad (14)$$

其中,  $C$  是电荷共轭算符, 且满足  $C^T = C^{-1} = C^\dagger = -C$ . 在欧氏空间,  $p^2$  和  $(p+q)^2$  都是负的且绝对值较大, 因此重夸克充分离壳. 作为第一近似, 自由重夸克传播子可以给出如下:

$$CS^Q(x)^T C^T = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} - m_Q)}{k^2 - m_Q^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot x}.\quad (15)$$

利用上式 (14), 在 QCD 层次赝标量流的关联函数可以表示为  $u$  和  $\omega$  的卷积,

$$\begin{aligned}\Pi^{\text{QCD}}(p, q) &= A1[\psi_{\parallel}^{n*}, f^{(1)}] + A2[\psi_{\parallel}^{n*}, f^{(1)}] + A3[\psi_{\parallel}^{n*}, f^{(1)}] + B1[\psi_{\parallel}^{n\bar{n}*}, f^{(2)}] + B2[\psi_{\parallel}^{n\bar{n}*}, f^{(2)}] \\ &\quad + C1[\psi_{\parallel}^{1*}, f^{(2)}] + C2[\psi_{\parallel}^{1*}, f^{(2)}] + D1[\psi_{\parallel}^{\bar{n}*}, f^{(1)}] + D2[\psi_{\parallel}^{\bar{n}*}, f^{(1)}],\end{aligned}\quad (16)$$

其中  $A(B, C, D)[\psi, f]$  的具体表达式为,

$$\begin{aligned}A1[\psi_{\parallel}^{n*}, f^{(1)}] &= -i \int_0^\infty d\omega \omega \int_0^1 du \psi_{\parallel}^{n*}(\omega, u) f^{(1)} \frac{1}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} \bar{u}_{B_c^6} [2(\bar{u}\omega + q \cdot v) - m_Q] \gamma_5, \\ A2[\psi_{\parallel}^{n*}, f^{(1)}] &= \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial q_\rho} \int_0^\infty d\omega \int_0^1 du \bar{u} \tilde{\psi}_{\parallel}^{n*}(\omega, u) f^{(1)} \bar{u}_{B_c^6} \left[ \gamma_\rho \gamma^\nu \frac{\not{q} + \bar{u}\omega \not{v} + m_Q}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} 2 \not{v} \gamma_\nu + \gamma^\nu \frac{\not{q} + \bar{u}\omega \not{v} + m_Q}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} \gamma_\rho \gamma_\nu \right] \gamma_5, \\ A3[\psi_{\parallel}^{n*}, f^{(1)}] &= \frac{i}{4} \frac{\partial^2}{\partial q_\rho \partial q_\sigma} \int_0^\infty d\omega \int_0^1 du \bar{u}^2 \hat{\psi}_{\parallel}^{n*}(\omega, u) f^{(1)} \bar{u}_{B_c^6} \gamma_\rho \gamma^\nu \frac{\not{q} + \bar{u}\omega \not{v} + m_Q}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} \gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_5, \\ B1[\psi_{\parallel}^{n\bar{n}*}, f^{(2)}] &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^\rho \partial q^\beta} \int_0^\infty d\omega \int_0^1 du \bar{u}^2 \hat{\psi}_{\parallel}^{n\bar{n}*}(\omega, u) f^{(2)} \bar{u}_{B_c^6} \gamma^\rho \gamma^\nu \frac{\not{q} + \bar{u}\omega \not{v} + m_Q}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} \sigma^{\alpha\beta} \gamma_\nu v_\alpha \gamma_5, \\ B2[\psi_{\parallel}^{n\bar{n}*}, f^{(2)}] &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q^\beta} \int_0^\infty d\omega \int_0^1 du \bar{u} \tilde{\psi}_{\parallel}^{n\bar{n}*}(\omega, u) f^{(2)} \bar{u}_{B_c^6} \gamma^\nu \frac{\not{q} + \bar{u}\omega \not{v} + m_Q}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} \sigma^{\alpha\beta} \gamma_\nu v_\alpha \gamma_5, \\ C1[\psi_{\parallel}^{1*}, f^{(2)}] &= -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\rho} \int_0^\infty d\omega \int_0^1 du \bar{u} \tilde{\psi}_{\parallel}^{1*}(\omega, u) f^{(2)} \bar{u}_{B_c^6} \gamma^\rho \gamma^\nu \frac{\not{q} + \bar{u}\omega \not{v} + m_Q}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} \gamma_\nu \gamma_5, \\ C2[\psi_{\parallel}^{1*}, f^{(2)}] &= -\frac{i}{2} \int_0^\infty d\omega \omega \int_0^1 du \psi_{\parallel}^{1*}(\omega, u) f^{(2)} \bar{u}_{B_c^6} \gamma^\nu \frac{\not{q} + \bar{u}\omega \not{v} + m_Q}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} \gamma_\nu \gamma_5, \\ D1[\psi_{\parallel}^{\bar{n}*}, f^{(1)}] &= \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial q^\beta} \int_0^\infty d\omega \int_0^1 du \bar{u} \tilde{\psi}_{\parallel}^{\bar{n}*}(\omega, u) f^{(1)} \bar{u}_{B_c^6} [\gamma^\nu \frac{\not{q} + \bar{u}\omega \not{v} + m_Q}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} \gamma_\beta \gamma_\nu] \gamma_5, \\ D2[\psi_{\parallel}^{\bar{n}*}, f^{(1)}] &= \frac{i}{4} \frac{\partial^2}{\partial q^\rho \partial q^\beta} \int_0^\infty d\omega \int_0^1 du \bar{u}^2 \hat{\psi}_{\parallel}^{\bar{n}*}(\omega, u) f^{(1)} \bar{u}_{B_c^6} \gamma^\rho \gamma^\nu \frac{\not{q} + \bar{u}\omega \not{v} + m_Q}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} \gamma^\beta \gamma_\nu \gamma_5.\end{aligned}$$

### 2.3 夸克-强子对偶性

在强子层次上, 为了压低高激发态和连续谱的贡献, 我们利用关于动量平方  $p'^2 = (p+q)^2$  和  $q^2$  的双重 Borel 变换, 从而得到:

$$\mathcal{B}_{p'}(M_1^2)\mathcal{B}_q(M_2^2)\Pi^H(p, q) = -i g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^0 D} f_{\mathcal{B}_{cc}} \frac{f_D m_D^2}{m_c + m_q} \times e^{-\frac{m_p^2}{M_2^2} - \frac{m_{\mathcal{B}_{cc}}^2}{M_1^2}} \bar{u}_{\mathcal{B}_c^0} [\not{q}\gamma_5] + \dots \quad (17)$$

Borel 参数  $M_1^2$  和  $M_2^2$  分别与动量平方  $p'^2$  和  $q^2$  相关联. 而在双重 Borel 变换之后, QCD 层次的关联函数可以表示为双重虚部的形式,

接下来, 本文将以  $A1[\psi_{||}^{n*}, f^{(1)}]$  的计算为例来说明,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{p'}(M_1^2)\mathcal{B}_q(M_2^2)A1[\psi_{||}^{n*}, f^{(1)}] &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{s_{\min}}^{s_{\text{th}}} ds e^{-s/M_1^2} \int_{s'_{\min}}^{s'_{\text{th}}} ds' e^{-s'/M_2^2} \text{Disc}^2 A1[\psi_{||}^{n*}, f^{(1)}] \\ &= \frac{-i}{(2\pi i)^2} \int_{s_{\min}}^{s_{\text{th}}} ds e^{-s/M_1^2} \int_{s'_{\min}}^{s'_{\text{th}}} ds' e^{-s'/M_2^2} \int_0^\infty d\omega \omega \int_0^1 du \psi_{||}^{n*}(\omega, u) f^{(1)} (-2\pi i) \delta((q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2) \\ &\quad \times \bar{u}_{\mathcal{B}_c^0} [2(\bar{u}\omega + q \cdot v) - m_Q] \\ &= \frac{1}{(2\pi)} \int_{s_{\min}}^{s_{\text{th}}} ds e^{-s/M_1^2} \int_{s'_{\min}}^{s'_{\text{th}}} ds' e^{-s'/M_2^2} \int_0^\infty d\omega \omega \int_0^1 du \psi_{||}^{n*}(\omega, u) f^{(1)} \frac{1}{\bar{u}^2 |\omega_2 - \omega_1|} (\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega - \omega_2)) \\ &\quad \times \bar{u}_{\mathcal{B}_c^0} [2(\bar{u}\omega + q \cdot v) - m_Q] \gamma_5, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{q \cdot v + \sqrt{q \cdot v^2 - q^2 + m_Q^2}}{\bar{u}}, \\ \omega_2 &= \frac{-q \cdot v + \sqrt{q \cdot v^2 - q^2 + m_Q^2}}{\bar{u}}. \end{aligned} \quad (21)$$

由此, QCD 层次的关联函数可以表示为两部分:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{p'}(M_1^2)\mathcal{B}_q(M_2^2)\Pi^{\text{QCD}}(p, q) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{s_{\min}}^{s_{\text{th}}} ds e^{-s/M_1^2} \\ &\quad \times \int_{s'_{\min}}^{s'_{\text{th}}} ds' e^{-s'/M_2^2} \bar{u}_{\mathcal{B}_c^0} [C_{\not{q}\gamma_5} \not{q}\gamma_5 + C_{\gamma_5} \gamma_5], \end{aligned} \quad (22)$$

根据式 (17), 我们在 QCD 层次也选择了相应的结构  $\not{q}\gamma_5$ . 因此, 我们得以推导出描述强子耦合常数的求和规则:

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^0 D} &= \frac{i(m_c + m_q)}{f_D m_D^2 f_{\mathcal{B}_{cc}}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{s_{\min}}^{s_{\text{th}}} ds \\ &\quad \times \int_{s'_{\min}}^{s'_{\text{th}}} ds' e^{-\frac{m_{\mathcal{B}_{cc}}^2 - s}{M_1^2} - \frac{m_D^2 - s'}{M_2^2}} C_{\not{q}\gamma_5}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{p'}(M_1^2)\mathcal{B}_q(M_2^2)\Pi^{\text{QCD}}(p, q) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{s_{\min}}^{s_{\text{th}}} ds e^{-s/M_1^2} \\ &\quad \times \int_{s'_{\min}}^{s'_{\text{th}}} ds' e^{-s'/M_2^2} \text{Im}^2 \Pi^{\text{QCD}}(s, s'), \end{aligned} \quad (18)$$

利用求和规则常用的截断方法 (cutting rules), 双重虚部可表示为双重不连续性, 即将重夸克传播子作如下替换:

$$\frac{1}{(q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2} \rightarrow (-2\pi i) \delta((q + \bar{u}\omega v)^2 - m_Q^2). \quad (19)$$

由此可以得到,

$$\text{Im}^2 \Pi^{\text{QCD}}(s, s') = \frac{1}{(2i)^2} \text{Disc}^2 \Pi^{\text{QCD}}(s, s'), \quad (20)$$

其中  $s$  和  $s'$  的积分下限分别为  $s_{\min} = 4m_c^2$  和  $s'_{\min} = m_c^2$ , 它们的积分上限为对应连续谱的阈值<sup>[55]</sup>,

$$\begin{aligned} (m_{\mathcal{B}_{cc}} + 0.4)^2 &< s_{\text{th}} < (m_{\mathcal{B}_{cc}} + 0.6)^2, \\ (m_D + 0.4)^2 &< s'_{\text{th}} < (m_D + 0.6)^2. \end{aligned} \quad (24)$$

### 3 数值分析

本节基于式 (23) 进行数值计算与结果分析. 首先, 强子耦合常数  $g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^0 D}$  的计算涉及一系列输入参数, 包括粲夸克质量、D 介子的质量与衰变常数, 以及单粲重子和双粲重子的质量. 这些参数部分取自实验数据, 部分源于非微扰方法的计算结果. 在本文的数值分析中, 重夸克质量采用 MS 方案下的取值  $m_c(m_c) = (1.35 \pm 0.10)\text{GeV}$ <sup>[40]</sup>, 轻夸克质量则予以忽略. 双粲重子和单粲重子的质量、衰变常数等其他输入参数详列于表 1<sup>[10,26,56]</sup>. 单粲重子的 LCDAs 是另一组关键输入参数. 本文采用文献 [57] 中针对底重子构建的 LCDAs 作为输入. 该

工作基于重夸克有效理论 (Heavy Quark Effective Theory, HQET) 在重夸克极限下完成, 理论上可推广至粲重子. 由此, 粲重子各扭度的光锥波函数表达式如下 [57]:

$$\begin{aligned} \psi_2(\omega, u) &= \omega^2 \bar{u}u \sum_{n=0}^2 \frac{a_n}{\epsilon_n^4} \frac{C_n^{3/2}(2u-1)}{|C_n^{3/2}|^2} e^{-\omega/\epsilon_n}, \\ \psi_4(\omega, u) &= \sum_{n=0}^2 \frac{a_n}{\epsilon_n^2} \frac{C_n^{1/2}(2u-1)}{|C_n^{1/2}|^2} e^{-\omega/\epsilon_n}, \\ \psi_{3\sigma,s}(\omega, u) &= \frac{\omega}{2} \sum_{n=0}^2 \frac{a_n}{\epsilon_n^3} \frac{C_n^{1/2}(2u-1)}{|C_n^{1/2}|^2} e^{-\omega/\epsilon_n}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$|C_n^\lambda|^2 = \int_0^1 [C_n^\lambda(2u-1)]^2 du, \quad (26)$$

这里  $C_0^\lambda(x)=1$ ,  $C_1^\lambda(x)=2\lambda x$ ,  $C_2^\lambda(x)=2\lambda(1+\lambda)x^2-\lambda$ . 光锥波函数式 (25) 中的参数列于表 2 中. 本文将采用光锥分布振幅的平行分量, 需替换  $A \rightarrow 1-A$ . 为确保  $\epsilon_i$  非负, 我们选取  $A$  值如下:  $A_{\Sigma_c} = 0.24$ ,  $A_{\Xi_c} = 0.15$ ,  $A_{\Omega_c} = 0.02$ .

由于粲夸克质量  $m_c \approx 1.35$  GeV 与底夸克  $m_b \approx 4.8$  GeV [57] 仍存在明显差异, 直接采用底重子模型

表 1 重味重子以及重味介子的质量和衰变常数  
Table 1. The masses and decay constants of heavy baryons and heavy mesons.

粒子	质量(MeV)	衰变常数
$\Xi_{cc}$	$3621.55 \pm 0.53^{[10]}$	$(0.109 \pm 0.021)$ GeV <sup>3</sup> [26]
$\Omega_{cc}$	$3690 \pm 90^{[26]}$	$(0.123 \pm 0.024)$ GeV <sup>3</sup> [26]
$\Sigma_c^{+++/+/-}$	$2453.97 \pm 0.14 /$ $2452.65^{+0.22}_{-0.16} /$	$(0.045 \pm 0.015)$ GeV <sup>3</sup> [56]
$\Xi_c^{'+0}$	$2453.75 \pm 0.14^{[10]}$ $2578.2 \pm 0.5 /$ $2578.7 \pm 0.5^{[10]}$	$(0.055 \pm 0.016)$ GeV <sup>3</sup> [56]
$\Omega_c^0$	$2695.2 \pm 1.7^{[10]}$	$(0.093 \pm 0.023)$ GeV <sup>3</sup> [56]
$D^{+0}$	$1869.66 \pm 0.05 /$ $1864.84 \pm 0.05^{[10]}$	$(249.9 \pm 0.5)$ MeV <sup>[10]</sup>
$D_s^+$	$1968.35 \pm 0.07^{[10]}$	$(212.0 \pm 0.7)$ MeV <sup>[10]</sup>

会引入一定的模型依赖性. 为定量估计该外推所带来的不确定性, 我们采用一种简单的拉伸分析方法. 在重夸克极限下, LCDAs 的  $\omega$  分布特征尺度由  $s_0 - \bar{\Lambda}$  决定, 其中  $s_0$  为连续谱阈值,  $\bar{\Lambda} = m_{B_Q} - m_Q$  为重子有效质量. 对于底重子,  $\bar{\Lambda}_b \approx 1.0$  GeV,  $s_0^{(b)} \approx 1.4$  GeV<sup>2</sup> [57]; 对于粲重子, 则有  $\bar{\Lambda}_c \approx 1.2$  GeV,  $s_0^{(c)} \approx 2.0$  GeV<sup>2</sup> [58]. 据此定义拉伸因子为

$$\xi = \frac{s_0^{(c)} - \bar{\Lambda}_c}{s_0^{(b)} - \bar{\Lambda}_b} \approx 2. \quad (27)$$

表 2 式 (25) 中的参数  $a_i$  和  $\epsilon_i$  的定义  
Table 2. The definitions of the parameters  $a_i$  and  $\epsilon_i$  in Eq. (25).

twist	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\epsilon_0$ [GeV]	$\epsilon_1$ [GeV]	$\epsilon_2$ [GeV]	
$\Sigma_c$	2	1	$\frac{6.4A}{A+0.44}$	$\frac{1.4A+0.6}{A+5.7}$	-	$\frac{0.32A}{A-0.17}$	
	3s	1	$\frac{0.12A-0.08}{A-1.4}$	$\frac{0.56A-0.77}{A-2.6}$	-	$\frac{0.25A-0.16}{A+0.41}$	
	3 $\sigma$	-	1	-	$\frac{0.35A-0.43}{A-1.2}$	-	
	4	1	$\frac{-0.07A-0.05}{A+0.34}$	$\frac{0.65A+0.22}{A+1}$	-	$\frac{5.5A+3.8}{A+29}$	
twist	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	
$\Xi_c'$	2	1	$\frac{0.25A+0.46}{A+0.68}$	$\frac{6.6A+0.6}{A+0.68}$	$\frac{1.4A+1}{A+6.7}$	$\frac{0.57A+1.1}{A+4}$	$\frac{0.36A+0.03}{A-0.02}$
	3s	1	$\frac{0.04A-0.14}{A-1.6}$	$\frac{0.12A-0.09}{A-1.6}$	$\frac{0.56A-0.91}{A-2.9}$	$\frac{-27A+92}{160}$	$\frac{0.3A-0.24}{A+0.54}$
	3 $\sigma$	$\frac{-0.16A+0.16}{A-1.3}$	1	$\frac{0.17A-0.17}{A-1.3}$	$\frac{0.11A-0.11}{A-1}$	$\frac{0.39A-0.49}{A-1.3}$	$\frac{0.33A-0.33}{A-1}$
	4	1	$\frac{0.03A+0.11}{A+0.16}$	$\frac{-0.1A-0.03}{A+0.61}$	$\frac{0.63A+0.38}{A+1.3}$	$\frac{-0.82A-3.1}{A-3.9}$	$\frac{1.2A+0.34}{A+4.1}$
twist	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	
$\Omega_c'$	2	1	$\frac{8A+1}{A+1}$	$\frac{1.3A+1.3}{A+6.9}$	-	$\frac{0.41A+0.06}{A+0.11}$	
	3s	1	$\frac{0.17A-0.16}{A-2}$	$\frac{0.56A-1.1}{A-3.22}$	-	$\frac{0.44A-0.43}{A+0.27}$	
	3 $\sigma$	-	1	-	$\frac{0.45A-0.63}{A-1.4}$	-	
	4	1	$\frac{-0.1A-0.01}{A+1}$	$\frac{0.62A+0.62}{A+1.62}$	-	$\frac{0.87A+0.07}{A+2.53}$	

假设粲重子的 LCDAs 可由底重子的 LCDAs 经尺度拉伸得到:

$$\psi_c(\omega, u) = \frac{1}{\xi} \psi_b\left(\frac{\omega}{\xi}, u\right), \quad (28)$$

该变换在保持归一化与  $u$  分布形状不变的同时, 仅拉伸  $\omega$  的尺度. 具体而言, 粲重子 LCDAs 中  $\omega$  的尺度参数  $\epsilon_n$  将按因子  $\xi$  放大, 而  $u$  分布的形状系数  $a_n$  保持不变:

$$\epsilon_n^{(c)} = \xi \epsilon_n^{(b)}, \quad a_n^{(c)} = a_n^{(b)}. \quad (29)$$

为反映重夸克外推带来的模型依赖性, 我们将考虑拉伸因子  $\xi = 2 \pm 0.5$  所引起的不确定性.

此外, 强子耦合常数的计算还涉及两类重要参数: Borel 参数  $M_2^2$  与连续谱阈值  $s_{\text{th}}, s'_{\text{th}}$ . 其中, 连续谱阈值的取值已在式 (24) 中给出. 原则上, 物理结果不应依赖于这些参数, 因此需确定参数的稳定窗口, 使该区域内耦合常数的计算结果对参数变化不敏感. 为简化处理, 我们利用以下关系关联两个 Borel 参数:

$$\frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{m_{\text{B}_{cc}}^2 - 4m_c^2}{m_{\text{D}}^2 - m_c^2}. \quad (30)$$

图 1 给出了强子耦合常数  $\Xi_{cc}^{++}\Xi_c^+D^+$  对 Borel 参数  $M_2^2$  的依赖性, 同时给出了对应连续谱阈值  $s_{\text{th}} = (17 \pm 1)\text{GeV}^2$  和  $s'_{\text{th}} = (5.6 \pm 1)\text{GeV}^2$  带来的误差. 依图 1 所示, Borel 参数的取值范围可以选择为  $M_2^2 = (20 \sim 40)\text{GeV}^2$ . 另外我们以其中三个强子耦合常数为例, 分析了  $M_2^2 = 30 \text{ GeV}^2$  时, 它们极点贡献与各扭度项的相对贡献 (如表 3 所示), 极点

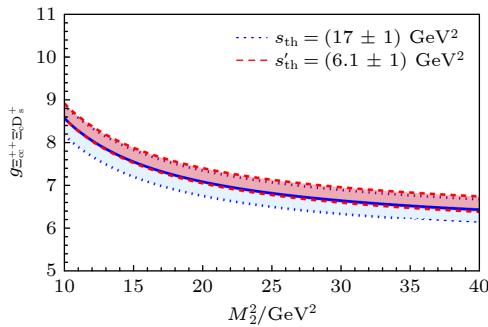


图 1 强子耦合常数  $g_{\Xi_{cc}^{++}\Xi_c^+D^+}$  对 Borel 参数  $M_2^2$  的依赖性. 图中, 蓝色带和红色带分别表示由阈值参数  $s_{\text{th}} = (17 \pm 1)\text{GeV}^2$  和  $s'_{\text{th}} = (6.1 \pm 1)\text{GeV}^2$  不确定性带来的影响. Fig. 1. The Borel parameter dependence of the strong coupling constant  $g_{\Xi_{cc}^{++}\Xi_c^+D^+}$ . The blue and red bands denote the uncertainties from the threshold parameters of  $s_{\text{th}} = (17 \pm 1)\text{GeV}^2$  and  $s'_{\text{th}} = (6.1 \pm 1)\text{GeV}^2$ , respectively.

贡献占比约为 40%~50%, 满足求和规则对基态主导性的基本要求. 当  $\xi \rightarrow 2$  时, twist-2 项 ( $\propto 1/\xi^4$ ) 的贡献被显著压低, 但其占总贡献的比例仍可高达 30%~70%; 同时 twist-4 项 ( $\propto 1/\xi^2$ ) 的贡献约为 30%. 两者相比可见, 尽管 twist-2 项因  $1/\xi^4$  因子而受到明显压低, 但占比仍能达到上述较高水平, 且高扭度项贡献较小, 充分体现了扭度展开的良好收敛性.

表 3 极点贡献占比和各扭度贡献

Table 3. The proportion of pole contribution and contributions from different twists.

Vertex	Pole	2	3 $\sigma$	3s	4
$\Xi_{cc}^{++}\Sigma_c^{++}D^0$	46.7%	30.9%	44.3%	-5.6%	30.5%
$\Xi_{cc}^{++}\Xi_c^+D_s^+$	38.1%	65.9%	76.4%	-10.9%	-31.4%
$\Omega_{cc}^+\Omega_c^0D_s^+$	43.7%	31.0%	45.8%	-8.8%	31.9%

其中极点贡献的定义为基态贡献在总贡献 (基态+连续谱) 中所占的比例:

$$\begin{aligned} \text{极点贡献} &= \frac{\text{基态贡献}}{\text{基态贡献} + \text{连续谱贡献}} \\ &\approx \frac{\int_{s_{\text{min}}}^{s_{\text{th}}} e^{-s/M_1^2} \int_{s'_{\text{min}}}^{s'_{\text{th}}} e^{-s'/M_2^2} \dots}{\int_{s_{\text{min}}}^{\infty} e^{-s/M_1^2} \int_{s'_{\text{min}}}^{\infty} e^{-s'/M_2^2} \dots}. \end{aligned} \quad (31)$$

而在给定这些输入参数的情况下, 我们可以计算强子耦合常数  $g_{\text{B}_{cc}\text{B}_{cc}^0\text{D}}$  的数值结果, 如表 4 所示. 表中所给出的误差分别来源于 Borel 参数  $M_2^2$ 、阈值  $s_{\text{th}}$  及  $s'_{\text{th}}$ 、衰变常数  $f_{\text{B}_{cc}}, f_{\text{B}_c}, f_{\text{D}}$  和从底重子到粲重子的迁移误差  $\xi = 2 \pm 0.5$ , 以  $g_{\Xi_{cc}^{++}\Sigma_c^{++}D^0}$  为例说明,

$$\begin{aligned} g_{\Xi_{cc}^{++}\Sigma_c^{++}D^0} &= 5.87_{-0.04}^{+0.04}(M_2^2)_{-0.32}^{+0.14}(s_{\text{th}})_{-0.05}^{+0.06}(s'_{\text{th}}) \\ &\quad +_{-1.40}^{+0.95}(f_{\Xi_{cc}^{++}})_{-1.96}^{+1.96}(f_{\Sigma_c^{++}})_{-0.01}^{+0.01}(f_{\text{D}^+})_{-0.02}^{+0.04}(\xi). \end{aligned} \quad (32)$$

另外由于双粲重子、单粲重子、D 介子的质量已被良好测量或预言, 而且我们计算发现由它们带来的误差较小, 例如,  $g_{\Omega_{cc}^+\Xi_c^0D^+} = 6.53_{-0.004}^{+0.003}(m_{\Omega_{cc}^+})_{-0.017}^{+0.019}(m_{\Xi_c^0})_{-0.0003}^{+0.0003}(m_{\text{D}^+})$ , 这表明数值结果对质量并不敏感, 因此本文并未列出由粒子质量带来的误差. 由图 1 和表 4 可以发现,

- 从图 1 可以看出, 强耦合常数  $g_{\Xi_{cc}^{++}\Xi_c^+D^+}$  在 Borel 参数取值范围为  $M_2^2 = (20 \sim 40)\text{GeV}^2$  的变化较为平缓, 且由阈值  $s_{\text{th}}$  带来的误差略大于  $s'_{\text{th}}$  带来的误差, 这一发现在表 4 中也有体现.

- 根据 SU(3) 对称性, 各种强耦合常数之间是

相互关联的. 在本工作中, 我们对强耦合常数  $\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6D$  进行了系统的 SU(3) 分析, 如表 4 第二列所示. LCSR 的结果与 SU(3) 味道对称性导出的比例关系存在不一致的地方, 这是由于在 LCSR 的计算中, 含不同轻夸克的重子的光锥波函数存在明显不同. 而且这些差异可以利用输入参数包括质量和衰变常数之间的比值得到合理的解释,

$$\frac{g_{\Xi_{cc}\Xi'_c D_s}}{g_{\Xi_{cc}\Sigma_c D}} \sim \frac{f_{\Xi_c}/(f_{D_s}m_{D_s}^2)}{f_{\Sigma_c}/(f_D m_D^2)} \sim 1.29,$$

$$\frac{g_{\Omega_{cc}\Omega_c D_s}}{g_{\Xi_{cc}\Xi_c D_s}} \sim \frac{f_{\Omega_c}/\lambda_{\Omega_{cc}}}{f_{\Xi_c}/\lambda_{\Xi_{cc}}} \sim 1.5,$$

$$\frac{g_{\Xi_{cc}\Xi'_c D}}{g_{\Omega_{cc}\Xi'_c D}} \sim \frac{f_D m_D^2 \lambda_{\Omega_{cc}}}{f_{D_s} m_{D_s}^2 \lambda_{\Xi_{cc}}} \sim 1.2.$$

• 如表 4 所示, 由衰变常数  $f_{\mathcal{B}_{cc}}$  与  $f_{\mathcal{B}_c^6}$  带来误差相较于其他参数带来的误差较大, 这是由于这些输入参数本身的误差较大, 如表 1 所示.

## 4 结论

在本研究中, 我们首次利用 LCSR 计算了强子耦合常数  $g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6D}$ . 计算过程中, 我们从单粲重子

六重态的光锥分布振幅出发, 通过插入双粲重子流与赝标量流构造两点关联函数, 并遵循求和规则的标准流程, 分别计算了强子层次与 QCD 层次的关联函数. 借助夸克-强子对偶和双重 Borel 变换, 有效压制了高激发态与连续谱的贡献, 最终给出耦合常数的求和规则表达式. 通过画图法确定 Borel 参数的可靠区间, 并结合其他输入参数, 得到了各强子耦合常数的数值结果及误差分析, 如表 4 所示. 表中同时列出了基于 SU(3) 味对称性分析得到的结果, 用以对比不同耦合常数之间的关系. LCSR 与 SU(3) 对称性的结果存在明显差异, 这源于在 LCSR 框架下, 含不同轻夸克的重子所对应的光锥分布振幅具有显著差异, 而这些差异可以通过质量和衰变常数之比得到合理解释. 我们的计算结果可通过其他理论方法 (如 QCD 求和规则) 进一步交叉验证. 此外, 这些强子耦合常数可作为研究双重重子非轻弱衰变的重要理论输入, 例如结合末态相互作用方法研究粲底重子的衰变过程, 并有助于深入理解双重重子与重介子之间的强相互作用. 我们期望本研究能为双重重子的理论与实验研究提供有价值的参考, 推动对重子衰变动力的深入认识.

表 4 强子耦合常数  $g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6D}$  的数值结果. 第一列为 SU(3) 对称性分析得到不同耦合常数之间的比例关系. 第二列为数值结果误差来源依次为 Borel 参数  $M_2^2$ 、阈值  $s_{th}$ ,  $s'_{th}$  和衰变常数  $f_{\mathcal{B}_{cc}}$ ,  $f_{\mathcal{B}_c^6}$ ,  $f_D$  以及拉伸因子  $\xi$

Table 4. The numerical results for the strong coupling constant  $g_{\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6D}$ . The first column presents the proportional relationships among different coupling constants obtained from SU(3) symmetry analysis. The second column lists the numerical results, with the sources of errors sequentially being the Borel parameter  $M_2^2$ , the threshold  $s_{th}$ ,  $s'_{th}$ , decay constants  $f_{\mathcal{B}_{cc}}$ ,  $f_{\mathcal{B}_c^6}$ ,  $f_D$  and stretch factor  $\xi$ .

Vertex	SU(3)	LCSRs
$\Xi_{cc}^+ \Sigma_c^+ D^0$	$a_1^6$	$5.87^{+0.04+0.14+0.06+0.95+1.96+0.01+0.04}_{-0.04-0.32-0.05-1.40-1.96-0.01-0.02}$
$\Xi_{cc}^+ \Sigma_c^+ D^+$	$a_1^6/\sqrt{2}$	$5.83^{+0.04+0.06+0.04+0.94+1.94+0.01+0.03}_{-0.04-0.35-0.01-1.39-1.94-0.01-0.02}$
$\Xi_{cc}^+ \Xi_c^+ D_s^+$	$a_1^6/\sqrt{2}$	$6.65^{+0.05+0.31+0.04+1.07+1.93+0.02+0.30}_{-0.06-0.25-0.31-1.59-1.93-0.02-0.35}$
$\Xi_{cc}^+ \Sigma_c^+ D^0$	$a_1^6/\sqrt{2}$	$5.84^{+0.04+0.06+0.04+0.94+1.95+0.01+0.03}_{-0.04-0.35-0.06-1.39-1.95-0.01-0.02}$
$\Xi_{cc}^+ \Sigma_c^0 D^+$	$a_1^6$	$5.83^{+0.04+0.13+0.06+0.94+1.94+0.01+0.03}_{-0.04-0.31-0.05-1.39-1.94-0.01-0.02}$
$\Xi_{cc}^+ \Xi_c^0 D_s^+$	$a_1^6/\sqrt{2}$	$6.68^{+0.05+0.36+0.14+1.08+1.94+0.02+0.30}_{-0.06-0.22-0.20-1.59-1.94-0.02-0.33}$
$\Omega_{cc}^+ \Xi_c^+ D^0$	$a_1^6/\sqrt{2}$	$6.54^{+0.04+0.28+0.22+1.07+1.90+0.01+0.30}_{-0.05-0.21-0.14-1.59-1.90-0.01-0.33}$
$\Omega_{cc}^+ \Xi_c^0 D^+$	$a_1^6/\sqrt{2}$	$6.53^{+0.04+0.18+0.22+1.07+1.90+0.01+0.30}_{-0.05-0.20-0.13-1.58-1.90-0.01-0.33}$
$\Omega_{cc}^+ \Omega_c^0 D_s^+$	$a_1^6$	$11.60^{+0.08+0.15+0.21+1.89+2.86+0.04+0.32}_{-0.09-0.02-0.13-2.81-2.86-0.04-0.16}$

## 参考文献

[1] Chen H X, Chen W, Liu X, Liu Y R, Zhu S L 2023 *Rept. Prog. Phys.* **86** 026201

[2] Qin Q, Shen Y F, Yu F S 2021 *Chin. Phys. C* **45** 103106

[3] Yang G H, Liang E P, Qin Q, Shao K K 2022 *Phys. Rev. D* **106** 093013

[4] Mattson M et al. [SELEX] 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 112001

[5] Ocherashvili A et al. [SELEX] 2005 *Phys. Lett. B* **628** 18

[6] Ratti S P 2003 *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **115** 33

[7] Aubert B et al. [BaBar] 2006 *Phys. Rev. D* **74** 011103

[8] Aaij R et al. [LHCb] 2013 *JHEP* **12** 090

[9] Kato Y et al. [Belle] 2014 *Phys. Rev. D* **89** 052003

[10] Navas S et al. [Particle Data Group] 2024 *Phys. Rev. D* **110** 030001

[11] Aaij R et al. [LHCb] 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 112001

[12] Lewis R, Mathur N, Woloshyn R M 2001 *Phys. Rev. D* **64** 094509

- [13] Karliner M, Rosner J L 2014 *Phys. Rev. D* **90** 094007
- [14] Aaij R et al. [LHCb] 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 162002
- [15] Aaij R et al. [LHCb] 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 052002
- [16] Aaij R et al. [LHCb] 2020 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **63** 221062
- [17] Aaij R et al. [LHCb] 2021 *JHEP* **12** 107
- [18] Aaij R et al. [LHCb] 2021 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **64** 101062
- [19] Aaij R et al. [LHCb] 2020 *JHEP* **11** 095
- [20] Aaij R et al. [LHCb] 2021 *Chin. Phys. C* **45** 093002
- [21] Aaij R et al. [LHCb] 2023 *Chin. Phys. C* **47** 093001
- [22] Aad G et al. [ATLAS] 2024 *JINST* **19** P06029
- [23] Mathur N, Padmanath M, Mondal S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 202002
- [24] Liu L, Lin H W, Orginos K, Walker-Loud A 2010 *Phys. Rev. D* **81** 094505
- [25] Zhang J R, Huang M Q 2008 *Phys. Rev. D* **78** 094007
- [26] Hu X H, Shen Y L, Wang W, Zhao Z X 2018 *Chin. Phys. C* **42** 123102
- [27] Wang Z G 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 826
- [28] Yao D L 2018 *Phys. Rev. D* **97** 034012
- [29] Ma Y L, Harada M 2018 *J. Phys. G* **45** 075006
- [30] Berezhnoy A V, Likhoded A K, Luchinsky A V 2018 *Phys. Rev. D* **98** 113004
- [31] Cheng H Y, Shi Y L 2018 *Phys. Rev. D* **98** 113005
- [32] Shi Y J, Xing Y, Zhao Z X 2019 *Eur. Phys. J. C* **79** 501
- [33] Hu X H, Shi Y J 2020 *Eur. Phys. J. C* **80** 56
- [34] Gutsche T, Ivanov M A, Körner J G, Lyubovitskij V E, Tyulemissov Z 2019 *Phys. Rev. D* **99** 056013
- [35] Wang W, Yu F S, Zhao Z X 2017 *Eur. Phys. J. C* **77** 781
- [36] Xing Z P, Zhao Z X 2018 *Phys. Rev. D* **98** 056002
- [37] Wang W, Xing Z P, Xu J 2017 *Eur. Phys. J. C* **77** 800
- [38] Zhang Q A 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 1024
- [39] Shi Y J, Wang W, Xing Y, Xu J 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 56
- [40] Jiang L J, He B, Li R H 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 961
- [41] Li H S, Meng L, Liu Z W, Zhu S L 2018 *Phys. Lett. B* **777** 169
- [42] Liu M Z, Xiao Y, Geng L S 2018 *Phys. Rev. D* **98** 014040
- [43] Özdem U 2019 *J. Phys. G* **46** 035003
- [44] Xiao L Y, Wang K L, Lu Q f, Zhong X H, Zhu S L 2017 *Phys. Rev. D* **96** 094005
- [45] Olamaei A R, Azizi K, Rostami S 2020 *Eur. Phys. J. C* **80** 613
- [46] Rostami S, Azizi K, Olamaei A R 2021 *Chin. Phys. C* **45** 023120
- [47] Wu X Y, Yin X G, Guo Y Q, Zhang X B, Yin J H, Xie Y L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1015 (in Chinese) [吴向尧, 尹新国, 郭义庆, 张晓波, 尹建华, 谢远亮 2004 物理学报 **53** 1015]
- [48] Balitsky I I, Braun V M, Kolesnichenko A V 1989 *Nucl. Phys. B* **312** 509
- [49] Chernyak V L, Zhitnitsky A R 1984 *Phys. Rept.* **112** 173
- [50] Colangelo P, Khodjamirian A 2000 arXiv: hep-ph/0010175
- [51] Li N, Zhu S L 2012 *Phys. Rev. D* **86** 014020
- [52] Yan T M, Cheng H Y, Cheung C Y, Lin G L, Lin Y C, Yu H L 1992 *Phys. Rev. D* **46** 1148
- [53] Hu X H, Li R H, Xing Z P 2020 *Eur. Phys. J. C* **80** 320
- [54] Huang D, Zhong T, Fu H B, Wu Z H, Wu X G, Tong H 2023 *Eur. Phys. J. C* **83** 680
- [55] Shi Y J, Zhao Z X 2024 *Phys. Rev. D* **110** 096015
- [56] Wang Z G 2010 *Phys. Lett. B* **685** 59
- [57] Ali A, Hambrock C, Parkhomenko A Y, Wang W 2013 *Eur. Phys. J. C* **73** 2302
- [58] Zhang J R, Huang M Q 2008 *Phys. Rev. D* **78** 094015

## The study on the strong coupling constant $\mathcal{B}_{cc}\mathcal{B}_c^6D$ using the light-cone sum rules method\*

HU Xiaohui<sup>†</sup> LIU Hanbing XING Ye

(the School of Materials Science and physics, China University of mining and technology, Xuzhou 221116, China)

( Received 2 March 2026; revised manuscript received 30 March 2026 )

### Abstract

In this work, the authors systematically investigate the strong coupling constants for vertices involving doubly charmed baryons ( $\mathcal{B}_{cc}$ ), singly charmed sextet baryons ( $\mathcal{B}_c^6$ ), and D mesons, using the LCSRs method. The calculations are performed analytically and numerically, with the non-perturbative input taken as the light-cone distribution amplitudes of the singly charmed baryon  $\mathcal{B}_c^6$ . Through graphical analysis, the authors determine the optimal Borel parameter ranges and present numerical results with a thorough error estimate, accounting for uncertainties in the Borel parameters, the continuum thresholds and decay constants. To extrapolate the b-baryon LCDAs to the case of c-baryons, the authors adopt a simple scaling method, and the uncertainty from the scaling factor is incorporated to reflect this extrapolation. The uncertainties induced by the decay constants  $f_{\mathcal{B}_{cc}}$  and  $f_{\mathcal{B}_c^6}$  dominate over those from other parameters, which can be attributed to the

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12505114).

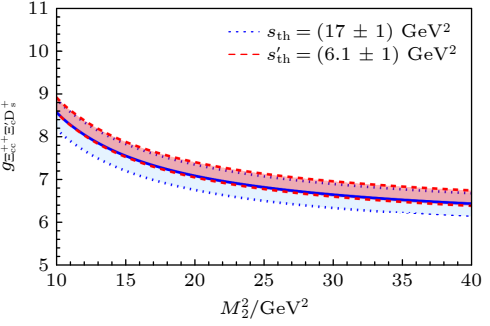
<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [huxiaohui@cumt.edu.cn](mailto:huxiaohui@cumt.edu.cn)

larger inherent uncertainties of these input parameters. The LCSR results deviate from the ratios predicted by SU(3) flavor symmetry, which is primarily due to the significant differences in the light-cone wave functions of baryons with different light quarks (u, d, s) in the LCSRs calculation. Furthermore, these deviations can be well accounted for by the ratios of input parameters such as masses and decay constants. The results can be cross-checked by other approaches such as conventional

QCD sum rules or lattice QCD. These strong coupling constants are key inputs for analyzing non-leptonic weak decays of doubly heavy baryons, particularly for evaluating final-state interactions in charmed-bottom baryon decays. Our findings thus provide both theoretical insights into the strong and weak decay dynamics of doubly heavy baryons and a practical tool for experimental hadronic analyses.

**Keywords:** the strong coupling couplings, doubly charmed baryon, light cone sum rules approach, light cone distribution amplitudes

**DOI:** [10.7498/aps.75.20260295](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260295)



**CSTR:** [32037.14.aps.75.20260295](https://doi.org/10.7498/aps.75.20260295)