

一维四带晶格中的宽参数域非厄米边界爆发*

李朝敏 张国瑛 王利†

(山西大学理论物理研究所, 光量子技术与器件全国重点实验室, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

开放系统在自然界及物理实验室中广泛存在, 非厄米哈密顿量可以为之提供有效的理论描述, 这使得非厄米物理近年来获得了蓬勃发展. 在非厄米物理研究过程中, 涌现出了许多新奇而重要的物理现象, 比如非厄米趋肤效应、非厄米边界爆发等. 本文研究了一类具有纯耗散的一维四带晶格模型中的非厄米量子动力学现象. 该晶格具有双链结构, 每个元胞中有四个格点, 其中只有一个格点上存在耗散. 基于严格的数值计算及理论分析发现, 该一维四带晶格具有有趣的突破经典两带模型参数限制的宽参数域非厄米边界爆发现象, 即在更大的参数区间中展现出非厄米边界爆发. 严格的解析推导表明, 只要存在竖直链间耦合, 不论耦合强度多大, 系统中总是存在非厄米趋肤效应且保持虚能隙闭合, 这正是宽参数域边界爆发能够出现的条件. 进一步, 基于格林函数方法的标度分析表明, 宽参数域非厄米边界爆发同样满足普适的体边标度关系.

关键词: 非厄米边界爆发, 非厄米趋肤效应, 虚能隙, 体边标度关系

1 引言

非厄米物理是当今物理学前沿的一个非常活跃的研究领域, 近年来生机勃勃取得了长足发展^[1-23]. 在国内外物理学家的共同探索下, 该领域内涌现出了大量新奇而重要的非厄米系统所特有的物理现象, 比如非厄米趋肤效应(NHSE)^[2,24-29]、非厄米边界爆发^[30-36]、奇异点(EP)物理^[5,37]、标度不变局域态^[38,39]、非厄米复数迁移率边^[40,41]等. 非厄米趋肤效应是指在开放边界条件下, 系统几乎所有本征态都会以指数衰减的形式聚集在边界或界面上, 而非像传统厄米量子系统那样在整个空间中扩展分布. 同时, 非厄米系统开边界条件下的能谱与周期性边界条件下的能谱显著不同, 导致传统体边对应关系失效与重构^[42,43]. 它是非

† 通信作者. E-mail: liwangiphy@sxu.edu.cn

* 山西省回国留学人员科研资助项目(项目编号: 2024-004)、国家自然科学基金(批准号: 11404199, 12147215)和山西省基础研究计划资助项目(项目编号: 1331KSC, 202203021211315, 2015021012) 资助的课题.

厄米系统一个非常显著的特色现象. 另一方面, 耗散型非厄米量子系统中还存在一种非常独特的能谱特征, 即虚能隙(或称刘维尔能隙), 这是传统厄米量子系统中所没有的. 虚能隙的闭合, 会引发非厄米量子系统动力学过程中的代数衰减行为 [31,44-47].

非厄米趋肤效应是非厄米系统的一种静态性质, 而非厄米边界爆发现象 [30,31]则是非厄米系统在时间域中展示出的一种独特的非厄米动力学效应. 在量子行走动力学框架中 [33,34,48-52], 这一现象是指一个粒子从耗散型晶格的内部出发经过长时间的动力学演化后, 其最后给出的耗散概率分布在远离出发点的边界位置出现一个反常的峰值. 这是一种有趣的非厄米反直觉现象. 因此, 它一经数值发现便引起了很多关注, Xue等 [31]经深入研究明确了非厄米边界爆发背后的物理机制: 它是非厄米趋肤效应与虚能隙闭合的协同效应. 虚能隙的闭合保证了波函数的幂律衰减, 这种衰减方式相比于指数衰减要慢得多. 另一方面, 非厄米趋肤效应驱使粒子跑向边界附近. 二者共同导致了边界上的耗散概率反常峰值. 进一步, Xue等 [31]还展示了非厄米边界爆发现象所特有的普适体边标度关系. 与此同时, 该新奇的非厄米现象也引起了实验物理学家们的关注, 比如东南大学研究组 [33]和南方科技大学研究组 [34]. 最近, 他们分别基于量子光学平台独立地实验观测了非厄米边界爆发现象. 不仅如此, 非厄米边界爆发背后深刻丰富的物理至今仍然吸引着理论与实验两方面的深入研究与探索 [33-36,53].

本文基于一类具有纯耗散的一维双链四带晶格模型, 利用严格的数值方法与格林函数方法研究了其中的非厄米量子动力学性质. 研究发现该模型中存在非厄米边界爆发现象. 更为有趣的是, 该模型与一维双链两带模型 [30,31]相比, 会在更大的参数区域内展示出非厄米边界爆发现象. 进一步, 基于广义布里渊区的解析推导和周期边界条件下的能谱分析发现, 该一维双链四带晶格模型在宽泛的参数区域内同时满足非厄米趋肤效应与虚能隙闭合的存在条件. 随后, 基于格林函数方法解析分析了体耗散概率的标度行为, 展示了其幂律衰减方式, 并与数值计算结果进行了印证. 最后, 基于体耗散概率的分析结果, 估算了边界耗散概率的标度行为. 结果表明一维双链四带晶格中的宽参数域非厄米边界爆发满足普适的体边标度关系 [31].

2 理论模型与研究方法

考虑纯耗散型的一维四带晶格模型, 如图1所示, 它具有双链结构, 其对应的哈密顿量为:

$$\begin{aligned}
 H = \sum_x \left\{ -i\gamma \hat{c}_{x,B}^\dagger \hat{c}_{x,B} + t_1 (\hat{c}_{x,A}^\dagger \hat{c}_{x,B} + \hat{c}_{x,B}^\dagger \hat{c}_{x,A} + \hat{c}_{x,C}^\dagger \hat{c}_{x,D} + \hat{c}_{x,D}^\dagger \hat{c}_{x,C}) \right. \\
 + \frac{it_2}{2} (\hat{c}_{x,C}^\dagger \hat{c}_{x,A} - \hat{c}_{x,A}^\dagger \hat{c}_{x,C} + \hat{c}_{x,B}^\dagger \hat{c}_{x,D} - \hat{c}_{x,D}^\dagger \hat{c}_{x,B} \\
 - \hat{c}_{x,C}^\dagger \hat{c}_{x+1,A} + \hat{c}_{x+1,A}^\dagger \hat{c}_{x,C} - \hat{c}_{x+1,B}^\dagger \hat{c}_{x,D} + \hat{c}_{x+1,D}^\dagger \hat{c}_{x+1,B}) \\
 + \frac{t_2}{2} (\hat{c}_{x,A}^\dagger \hat{c}_{x,D} + \hat{c}_{x,D}^\dagger \hat{c}_{x,A} + \hat{c}_{x,B}^\dagger \hat{c}_{x,C} + \hat{c}_{x,C}^\dagger \hat{c}_{x,B} \\
 \left. + \hat{c}_{x+1,A}^\dagger \hat{c}_{x,D} + \hat{c}_{x,D}^\dagger \hat{c}_{x+1,A} + \hat{c}_{x+1,B}^\dagger \hat{c}_{x,C} + \hat{c}_{x+1,C}^\dagger \hat{c}_{x+1,B}) \right\}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中, $\hat{c}_{x,\alpha}^\dagger$ 与 $\hat{c}_{x,\alpha}$ 分别为元胞 x 中子格点 α 上的产生算符与湮灭算符, $\alpha = A, B, C, D$. t_1 为竖直方向上的链间耦合, t_2 决定了胞内及胞间的横向跃迁强度. 每个元胞中仅 B 格点上存在耗散, 其强度为 γ . t_1 、 t_2 、 γ 均为实数, 且 $\gamma > 0$.

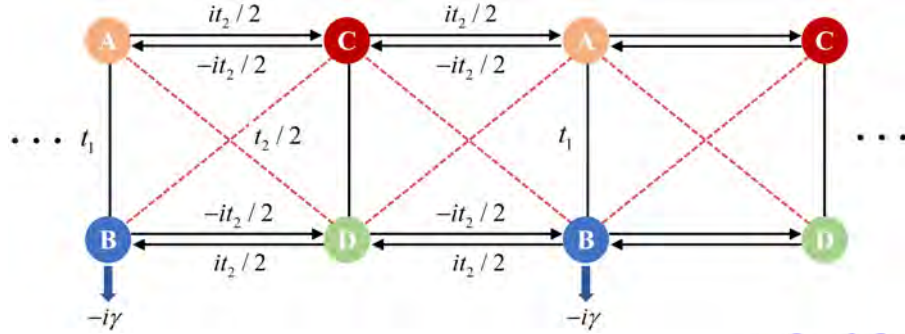


图 1 一维双链四带耗散型晶格模型. 每个元胞中有四个子格点, 只有 B 格点上存在强度为 γ 的纯耗散.

Fig. 1. One-dimensional four-band dissipative lattice model. Each unit cell contains four sublattice sites, and decay with rate γ exists only on the B sublattice sites.

由薛定谔方程可知, 处于该晶格中的粒子的量子动力学过程可由如下方程描述:

$$\begin{aligned}
 i \frac{d\psi_x^A}{dt} &= t_1 \psi_x^B + i \frac{t_2}{2} (-\psi_x^C + \psi_{x-1}^C) + \frac{t_2}{2} (\psi_{x-1}^D + \psi_x^D), \\
 i \frac{d\psi_x^B}{dt} &= t_1 \psi_x^A + i \frac{t_2}{2} (\psi_x^D - \psi_{x-1}^D) + \frac{t_2}{2} (\psi_{x-1}^C + \psi_x^C) - i\gamma \psi_x^B, \\
 i \frac{d\psi_x^C}{dt} &= t_1 \psi_x^D + i \frac{t_2}{2} (\psi_x^A - \psi_{x+1}^A) + \frac{t_2}{2} (\psi_x^B + \psi_{x+1}^B), \\
 i \frac{d\psi_x^D}{dt} &= t_1 \psi_x^C + i \frac{t_2}{2} (-\psi_x^B + \psi_{x+1}^B) + \frac{t_2}{2} (\psi_x^A + \psi_{x+1}^A),
 \end{aligned} \quad (2)$$

其中, ψ_x^α 表示元胞 x 中 α 格点上的几率幅. 如图1所示, 该模型是一个纯耗散型的四带晶格. 晶格中粒子的总

概率将随着时间按如下方式衰减,

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\psi\rangle = i\langle\psi|(\hat{H}^\dagger - \hat{H})|\psi\rangle = -2\gamma \sum_x |\psi_x^B|^2. \quad (3)$$

最终, 晶格中粒子存在的概率将衰减至0. 粒子从元胞 x 处耗散掉的总的概率可由如下积分得到:

$$P_x = 2\gamma \int_0^\infty dt |\psi_x^B(t)|^2. \quad (4)$$

依据概率守恒, 如果粒子初始波函数 $\psi(0)$ 是归一化的, 则有 $\sum_x P_x = 1$. 对方程组(2)进行严格的数值求解, 依据(4)式即可得到粒子耗散概率在整个晶格上的空间分布.

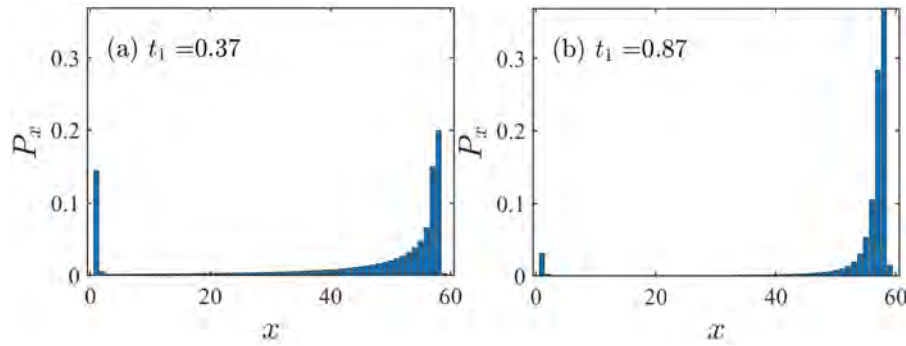


图 2 耗散概率分布. (a) $t_1 = 0.37$, (b) $t_1 = 0.87$. 共同参数: $t_2 = 0.5$, $\gamma = 1$, $x_0 = 57$, $L = 60$

Fig. 2. The resultant loss probability distribution. (a) $t_1 = 0.37$, (b) $t_1 = 0.87$. Common parameters: $t_2 = 0.5$, $\gamma = 1$, $x_0 = 57$, $L = 60$.

3 开边界一维双链四带晶格中的耗散动力学

3.1 宽参数域非厄米边界爆发

下面分析开边界条件下纯耗散型的一维四带晶格中的量子动力学过程. 如图1所示, 考虑元胞总数为 L 的一维双链四带晶格. 初始时刻, 在元胞 x_0 中的格点 C 上放置一个粒子, 然后考察该粒子在晶格上的量子行走动力学过程. 由于该晶格中存在纯耗散, 经过一段时间的演化后, 粒子在晶格中的概率将最终变为0. 按照前节介绍的方法, 可以通过数值计算得到系统演化完成后耗散概率在各个元胞上的分布 P_x . 如图2(a)所示, 该一维双链四带晶格中显然存在有趣的非厄米边界爆发现象^[30,31], 即, 虽然粒子从晶格内部出发, 但是它从距离出发点 x_0 最远的边界元胞逃逸的概率会有一个较大的相对数值. 在图2中, 晶格的元胞总数取为 $L = 60$, 量子行走的出发点 $x_0 = 57$, 其它参数取为 $t_2 = 0.5$, $\gamma = 1$. 从图2(a)可以清晰看出, 对于各个元胞上的耗散概率分布 P_x , 以 x_0 为起点来看, 其先是快速衰减, 随后在边界处突然出现一个反常的峰

值. 更为有趣的是, 与文献 [30,31]中考虑的一维双链两带晶格相比, 在其它参数相同的条件下, 本文研究的一维双链四带晶格在 $t_1 > t_2$ 的参数区间内仍然存在非厄米边界爆发现象, 如图2(b)所示. 这预示着, 一维双链四带晶格可以在更大的参数区域内出现有趣的非厄米边界爆发现象.

进一步, 本节计算了边界耗散概率的相对值 P_{edge}/P_{min} 与链间耦合强度 t_1 的函数关系来量化分析模型中的非厄米边界爆发现象. 具体到模型(1), $P_{edge} = P_1$, $P_{min} \equiv \min\{P_1, P_2, \dots, P_{x_0}\}$. $P_{edge}/P_{min} \gg 1$ 表明存在非厄米边界爆发 [31], $P_{edge}/P_{min} \sim 1$ 则表明没有边界爆发现象. 如图3所示, 该一维双链四带晶格系统在较大的参数区域内存在非厄米边界爆发现象, 而一维双链两带模型仅在 $|t_1| \leq |t_2|$ 参数区间(具体到图3中的情形, 该参数区间为 $|t_1| \leq 0.5$)存在非厄米边界爆发. 由此可知该一维双链四带晶格中存在一种突破传统两带模型参数限制的宽参数域非厄米边界爆发现象. 在图3中, 晶格的尺寸为 $L = 100$, 量子行走的出发点为 $x_0 = 50$, 其它参数为 $t_2 = 0.5$, $\gamma = 1$.

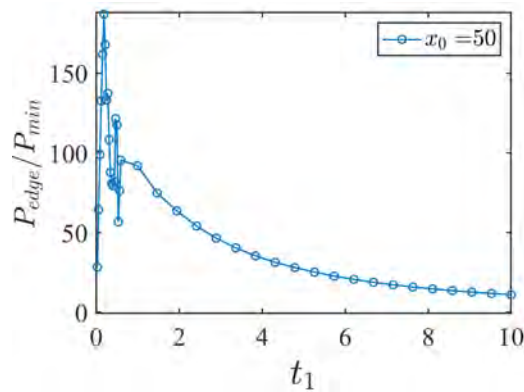


图 3 非厄米边界爆发的相对高度随 t_1 的变化曲线. 其它参数: $t_2 = 0.5$, $\gamma = 1$, $x_0 = 50$, $L = 100$

Fig. 3. The relative height of the non-Hermitian edge burst as a function of t_1 . Other parameters: $t_2 = 0.5$, $\gamma = 1$, $x_0 = 50$, $L = 100$.

3.2 宽参数域边界爆发的理论根源

深入研究发现, 这种在显著扩大的参数区域内出现的宽参数域非厄米边界爆发现象理论上来源于两个因素的共同作用. 一个是非厄米趋肤效应, 一个是虚能隙闭合, 这与Xue等 [31]基于一维双链两带晶格给出的结论是一致的. 下面将会看到, 该一维双链四带晶格体系在 $|t_1| > 0$ 的参数区域内都存在非厄米趋肤效应. 另一方面, 与经典的一维两带模型显著不同的是, 该模型在 t_1 的整个实数参数域内都是没有虚能隙的, 因此虚能隙闭合的区域远远大于两带模型对应的非常有限的参数区间(即 $|t_1| \leq |t_2|$).

依据非厄米理论, 非厄米体系中是否存在趋肤效应, 可以从理论上通过计算广义布里渊区 (GBZ) 来

确定 [2,4]. 模型(1)式对应的布洛赫哈密顿量为:

$$H(k) = -i\gamma \left(\frac{I_2 + \sigma_z}{2} \right) \otimes \left(\frac{I_2 - \sigma_z}{2} \right) + t_1 I_2 \otimes \sigma_x + t_2 \left(\sigma_x \cos \frac{k}{2} + \sigma_y \sin \frac{k}{2} \right) \otimes \left(\sigma_x \cos \frac{k}{2} + \sigma_z \sin \frac{k}{2} \right). \quad (5)$$

$H(k)$ 对应动量空间中的4维矩阵, 相较于两带模型的2维矩阵, 引入了额外的自由度, 具有更大的希尔伯特空间. 这为理论上推导虚能隙闭合条件 [31]提供了更大的参数空间. 下面将会看到, 四带模型引入的额外的自由度导致了非厄米系统虚能隙特征上的定性变化, 从而为宽参数域非厄米边界爆发等新奇性质的出现提供了可能性. 容易看出, $H(k)$ 具有粒子空穴对称性, 即存在关系 $TH(k)T^{-1} = -H(-k)$, 其中 $T = K \cdot (I_2 \otimes \sigma_z)$ 为粒子空穴对称性算符. K 为复共轭算符. 特别地, 对于正负 k 等价点 k_s , 包括 $k_s^a = 0$ 与 $k_s^b = \pi$, 布洛赫哈密顿量 $H(k_s)$ 的本征能量将以 $(E(k_s), -E(k_s)^*)$ 的形式成对出现. 下面将会看到, $k_s^b = \pi$ 处除了具备上述有趣的对称性外, 还有一个很关键的本征值特性.

(5)式中, 将 k 替换 $-i \ln \beta$ 即得非布洛赫哈密顿量 $H(\beta)$. 广义布里渊区可通过求解 $H(\beta)$ 的如下特征方程得到 [2,4]:

$$\omega^4 + i\omega^3\gamma - 2\omega^2(t_1^2 + t_2^2) - i\omega\gamma(t_1^2 + t_2^2) + t_1^4 + t_2^4 - t_1t_2^2\left(t_1 + \frac{\gamma}{2}\right)\beta - t_1t_2^2\left(t_1 - \frac{\gamma}{2}\right)\frac{1}{\beta} = 0. \quad (6)$$

这里, ω 是本征能量. 给定 ω 值, 方程有两个根 β_1, β_2 , 它们满足关系 $\beta_1\beta_2 = (t_1 - \frac{\gamma}{2}) / (t_1 + \frac{\gamma}{2})$. 根据广义布里渊区理论 [2,4]可得出该模型的广义布里渊区的解析结果. 该广义布里渊区为圆形, 其半径具有解析形式:

$$r = \sqrt{\left| \frac{t_1 - \frac{\gamma}{2}}{t_1 + \frac{\gamma}{2}} \right|}. \quad (7)$$

因此, 对于本文研究的纯耗散系统($\gamma \neq 0$), 只要存在竖直链间耦合 t_1 , GBZ总是与布里渊区(BZ)不同. 这意味着对于非零实数 t_1 , 系统中总是存在非厄米趋肤效应. 这正是宽参数域非厄米边界爆发现象的理论根源之一. 虽然非厄米趋肤效应本身对应开放边界条件下本征态的空间几率分布在边界上的聚集, 是哈密顿量的一种静态性质, 但是在非厄米量子动力学过程中, 非厄米趋肤效应会驱使粒子在量子行走过程中趋向边界. 这为宽参数域非厄米边界爆发现象在边界上的出现提供了必备条件之一.

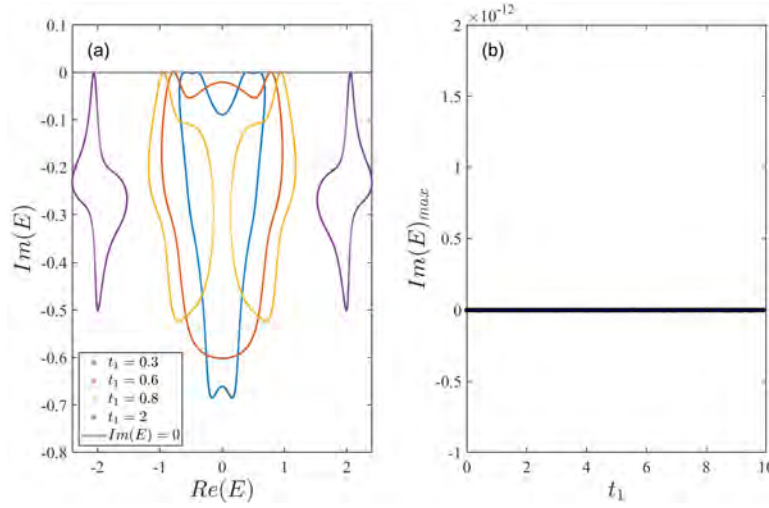


图 4 虚能隙与链间耦合 t_1 的关系. (a) 周期边条件(PBC)下的能谱. (b) PBC下本征能量虚部的最大值与 t_1 的关系. 能量的虚部与实轴接触对应虚能隙闭合. 其它参数: $t_2 = 0.5, \gamma = 1$

Fig. 4. Relationship between the imaginary energy gap and the inter-chain coupling t_1 . (a) Energy spectrum under periodic boundary conditions (PBC). (b) Maximum of the imaginary part of the eigenenergy as a function of t_1 under PBCs. The imaginary energy gap closes when the imaginary part of the energy touches the real axis. Other parameters: $t_2 = 0.5, \gamma = 1$.

Xue等^[31]在文章中指出, 非厄米边界爆发的产生条件除了非厄米趋肤效应, 还要满足虚能隙闭合. 虚能隙闭合是指在周期边条件(PBC)下, 系统中存在能量虚部为零的本征模式. 对式(5)中的布洛赫哈密顿量进行计算可以得出PBC下的本征能谱. 如图4(a)所示, 在不同 t_1 下, 系统的本征能谱总会与能量实轴接触, 即系统中存在本征能量, 其虚部为0, 这表明PBC下系统是没有虚能隙的. 这一点, 在图4(b)中可以看得更加清楚, PBC下系统的本征能量的虚部的最大值在不同的 t_1 取值下, 一直为零.

更进一步, 可以从理论上严格地证明这一点, 即一维非厄米四带晶格模型在 t_1 的整个实参数域内都没有虚能隙. 这得益于正负 k 等价点 $k_g^b = \pi$ 的能谱特性. 深入研究发现, 可以严格地得到 $H(\pi)$ 的四个本征能量的解析表达式. 其具体形式如下,

$$\pm\sqrt{t_1^2 + t_2^2}; \quad \frac{1}{2} \left(-i\gamma \pm \sqrt{4(t_1^2 + t_2^2) - \gamma^2} \right). \quad (8)$$

观察可知, $H(\pi)$ 始终存在两个纯实数本征能量. 这保证了, 在任意的实参数 t_1 下, 非厄米四带晶格模型的虚能隙都是闭合的. 因此, PBC下系统的虚能隙闭合点对应的能量可记为 $\omega_0^\pm = \pm\sqrt{t_1^2 + t_2^2}$. 这正是宽参数域非厄米边界爆发出现的理论根源之二.

非厄米四带晶格模型在 t_1 的整个实参数域内能够保持虚能隙闭合, 这一事实具有重要的物理意义. 它直接决定了宽参数域非厄米边界爆发能否出现. 非厄米系统虚能隙闭合可视为是厄米系统无能隙特性的对应. 虚能隙闭合直接影响非厄米系统的量子动力学行为^[31,45]. 它决定了非厄米系统波函数对应的几率呈现代数衰减行为, 而非通常的衰减非常快的指数衰减行为. 相反, 如果是指数衰减行为, 自系统体内出发的粒子的几率将在粒子到达边界前快速耗散掉, 进而导致非厄米边界爆发出现的可能性消失.

上述分析从理论上严格证明了, 一维双链四带晶格模型在除 $t_1 = 0$ 外的宽参数范围内都满足非厄米边界爆发出现的两个条件^[31]. 这便是突破传统两带模型参数限制的宽参数域非厄米边界爆发出现的理论根源.

3.3 耗散概率分布的标度行为与体边标度关系

基于Xue等^[31,54]发展的方法, 可以利用格林函数计算体耗散概率 P_x , 进而分析其标度行为. 利用格林函数 $G(t)$, B 格点上的几率可以表示为 $|\psi_x^B(t)|^2 = |\langle x, B|G(t)|\psi(t=0)\rangle|^2$, 其中 $G(t) = -i\Theta(t)e^{-iHt}$, $\Theta(t)$ 为Heaviside阶跃函数. 转换到频域(能量域)则有 $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G(\omega)e^{-i\omega t}$, 其中格林函数 $G(\omega) = 1/(\omega + i0^+ - H)$. 量子行走出发点为元胞 x_0 中的 C 格点, 所以结合以上分析, 式(4)可写为如下形式:

$$P_x = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\langle x, B|G(\omega)|x_0, C\rangle|^2. \quad (9)$$

分析耗散概率 P_x 的标度行为, 可考虑无限长链, 此时有,

$$\begin{aligned} \langle x, B|G(\omega)|x_0, C\rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x_0)} \left(\frac{1}{\omega + i0^+ - H(k)} \right)_{BC} \\ &= \oint_{GBZ} \frac{d\beta}{2\pi i \beta} \beta^{x-x_0} \left(\frac{1}{\omega + i0^+ - H(\beta)} \right)_{BC}, \end{aligned} \quad (10)$$

对一维双链四带模型, 计算可得 $\left(\frac{1}{\omega + i0^+ - H(\beta)} \right)_{BC} = \{t_2(\omega^2 + t_1^2 - t_2^2)(\beta + 1)/2\beta\} / \det[\omega + i0^+ - H(\beta)]$. $\det[\omega + i0^+ - H(\beta)] = 0$ 即(6)式, 它是 β 的二次方程, 两个根可以记为 $\beta_L(\omega)$ 和 $\beta_R(\omega)$. 对于实数 ω 有 $|\beta_L(\omega)| \geq 1 \geq |\beta_R(\omega)|$. 利用留数定理, 耗散概率(9)式可写为以下形式:

$$P_x^\infty = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |f_{L/R}(\omega)|^2 |\beta_{L/R}(\omega)|^{2(x-x_0)}. \quad (11)$$

其中 $f_{L/R}(\omega)$ 经计算可得:

$$\begin{cases} f_L(\omega) = \frac{(\omega^2 + t_1^2 - t_2^2)(\beta_L + 1)}{2t_1 t_2 (t_1 + \gamma/2)(\beta_L - \beta_R)\beta_L} & (x \leq x_0), \\ f_R(\omega) = \frac{(\omega^2 + t_1^2 - t_2^2)(\beta_R + 1)}{2t_1 t_2 (t_1 + \gamma/2)(\beta_L - \beta_R)\beta_R} & (x > x_0). \end{cases} \quad (12)$$

$|x - x_0|$ 比较大时, 式(11)中的积分主要由虚能隙闭合点 ω_0 附近的区域决定^[31,54]. 可以将式(11)中的各项在 ω_0 附近做小量展开. $t_1 > 0$ 时, 一维双链四带模型中的趋肤效应是左趋肤, 所以我们重点考虑 $x < x_0$ 的区域. ω 写为 $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, 将式(11)中的各项展至 $\delta\omega$ 最低阶可得, $|f_L(\omega)|^2 \sim \delta\omega^m$, $|\beta_L(\omega)| \approx 1 + K\delta\omega^n \approx \exp(K\delta\omega^n)$. 于是, 式(11)可近似写为,

$$P_x^\infty \sim \int d(\delta\omega) \delta\omega^m \exp(-2K\delta\omega^n |x - x_0|) \sim |x - x_0|^{-(m+1)/n}. \quad (13)$$

由此可知耗散概率的体分布的标度指数为 $\alpha_b = (m + 1)/n$. 上面经解析推导得到的(13)式及 α_b 的表达式清晰地表明, P_x^∞ 的行为是幂律衰减的. 在以上推导过程中, 我们已经看到这种代数行为的得出主要依赖于虚能隙闭合点 ω_0 的存在. 相反, 如果系统中不存在虚能隙闭合点, 那么推导得出的 P_x^∞ 将会是指数衰减行为^[31,54]. 上述幂律行为表明非厄米四带晶格模型中的体耗散概率, 对 t_1 的整个实参数域, 衰减都非常缓慢, 而非像指数行为那样非常快速地衰减, 这正是宽参数域非厄米边界爆发能够出现的关键基础. 对于本文研究的一维双链四带模型, 按上述方法具体计算可得, 对于任意 $t_1 > 0$ 取值有 $m = n = 2$, 所以该模型的标度指数为 $\alpha_b = 3/2$.

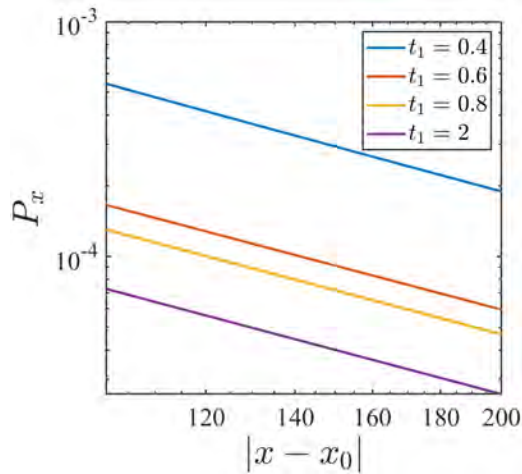


图5 体耗散概率分布 P_x 的标度行为. $t_1 = 0.4, 0.6, 0.8, 2$. 其它参数: $t_2 = 0.5, \gamma = 1$

Fig. 5. The scaling of the bulk loss probability P_x for $t_1 = 0.4, 0.6, 0.8, 2$. Other parameters: $t_2 = 0.5, \gamma = 1$.

图5利用上述格林函数方法数值计算了体耗散概率分布 P_x , 其在双对数坐标下呈现良好的线性关系, 表明 P_x 与 $|x - x_0|$ 的关系是幂律的, 这与(13)式给出的理论结果一致. 对应 $t_1 = 0.4, 0.6, 0.8, 2$ 的情形, 数值拟合得出的体指数 α_b 分别为: $-1.545, -1.503, -1.503, -1.511$, 与上面的理论结果 $3/2$ 非常接近.

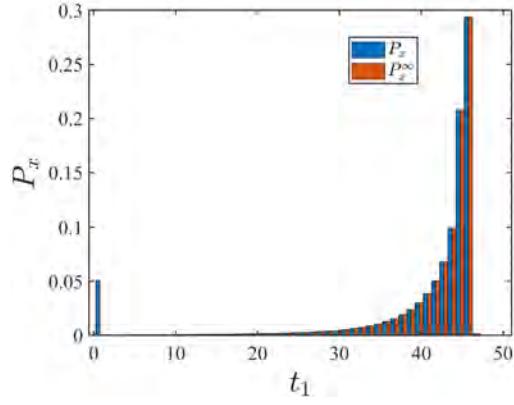


图 6 $L = 50$ 的开边界有限长链的耗散概率分布 P_x (蓝色) 与基于格林函数方法计算得到的无限长链体耗散概率分布 P_x^∞ (红色). 参数: $t_1 = 0.6, t_2 = 0.5, \gamma = 1$

Fig. 6. P_x for OBC chain with $L = 50$ (blue) and P_x^∞ (red) for the infinite chain calculated by using Green's function. Parameters are $t_1 = 0.6, t_2 = 0.5$, and $\gamma = 1$.

图6中分别给出了用严格数值方法计算得到的OBC下有限长链中的耗散概率分布 P_x 和基于格林函数方法用式(13)计算得到的无穷长链的体耗散概率分布 P_x^∞ . 由图可以看出, 在体区的主体部分, 二者非常接近, 几乎相同. 由总概率的守恒条件 $\sum_x P_x = 1$ 可知, OBC下边界上的耗散概率 P_{edge} 可由PBC下超出OBC晶格尺寸部分的体区耗散概率求和得到, 即 $P_{\text{edge}} = \sum_{x=-\infty}^0 P_x^\infty$. 因此, 基于前面利用格林函数方法得到体耗散概率 P_x , 可以对边界耗散概率进行如下估算:

$$P_{\text{edge}} \sim \int_{-\infty}^0 |x - x_0|^{-a_b} dx \sim \int_{x_0}^{\infty} x^{-a_b} dx \sim (x_0)^{-a_b+1}. \quad (14)$$

由上可知, 边界耗散概率的幂律衰减指数 α_e 满足体边标度关系^[31]: $\alpha_e = \alpha_b - 1$.

边界指数 α_e 比体指数 α_b 小1, 这一结果非常关键, 这表明边界上的耗散概率要明显大于晶格边界附近的体耗散概率分布尾部的值, 这预示着非厄米边界爆发的出现. 此外, 由上述OBC下边界耗散概率 P_{edge} 的推导过程还可以看出, 非厄米边界爆发现象中的边界耗散概率峰实际来自于超出OBC晶格部分的体区耗散概率的求和, 所以非厄米边界爆发是一种与体能带相关的现象^[31].

上述体边标度关系对于非零实数 t_1 都是成立的, 这正是一维双链四带晶格中具有宽参数域非厄米边界爆发现象在标度行为层面的原因.

4 结论及讨论

本研究通过构建与以往两带模型不同的一维非厄米双链四带纯耗散晶格模型, 系统探究了一类非厄米多带晶格模型中的非厄米边界爆发这一有趣的非厄米动力学现象. 首先基于严格的数值计算, 展示了开边界条件下量子行走过程中粒子耗散概率分布在更广的参数区间呈现有趣的非厄米边界爆发现象. 边界耗散概率的相对高度与垂直链间耦合 t_1 的函数关系曲线进一步展示了四带模型的非厄米边界爆发现象的宽参数域特性. 这明显地突破了传统两带模型对非厄米边界爆发现象参数区域的限制. 通过对广义布里渊区的严格计算发现, 一维双链四带模型在除 $t_1 = 0$ 外的整个 t_1 参数区间内存在非厄米趋肤效应. 更有趣的是, 基于周期边条件下能谱的分析可以严格证明, 该模型在整个 t_1 参数区间内都是虚能隙闭合的. 所以宽参数域非厄米边界爆发现象的内在原因有两个: 在宽参数区间内同时满足非厄米趋肤效应与虚能隙闭合的条件. NHSE使得粒子趋向边界, 虚能隙闭合使粒子衰减更慢从而有更大概率到达边界. 进一步, 利用格林函数方法与围道积分法推导出了体耗散概率表达式, 证实了其幂律衰减行为, 并将其与数值计算结果进行了比对. 基于体耗散概率表达式得出了边界耗散概率的近似表达式, 结果表明宽参数域非厄米边界爆发满足普适的体边标度关系.

值得指出的是, 近年来非厄米物理实验研究发展迅猛, 各种重要的实验不断涌现, 多样化的实验平台与技术日趋成熟. 得益于此, 本研究展示的这一有趣的宽参数域边界爆发现象非常有希望在多种非厄米实验平台上实现, 比如量子光学平台 [33,34], 拓扑电路系统 [29,55-57], 光晶格中的超冷原子系统 [58], 以及声子晶体系统 [27,28]等. 特别值得一提的是, 近年已有实验 [57]基于开口环谐振器系统实现过类似结构的非厄米四带模型并对拓扑性质进行了实验研究. 可以相信, 在此实验平台上进一步开展非厄米量子动力学研究, 可观测到该宽参数域非厄米边界爆发现象.

附录A 一维四带晶格中的双极非厄米边界爆发

值得注意的是, 有些纯耗散系统中还可能出现双极非厄米趋肤效应 [2,27-29,31]. 如果这些系统同时满足虚能隙闭合条件, 那么在这样的系统中将会出现有趣的双极非厄米边界爆发. 下面我们展示一个这样的例

子. 该示例模型可以用如下一维四带非厄米晶格哈密顿量描述,

$$\begin{aligned}
H = \sum_x \left\{ & -i\gamma \hat{c}_{x,B}^\dagger \hat{c}_{x,B} + t_1 (\hat{c}_{x,A}^\dagger \hat{c}_{x,B} + \hat{c}_{x,B}^\dagger \hat{c}_{x,A} + \hat{c}_{x,C}^\dagger \hat{c}_{x,D} + \hat{c}_{x,D}^\dagger \hat{c}_{x,C}) \right. \\
& + \frac{t_2 e^{i\theta}}{2} (\hat{c}_{x,C}^\dagger \hat{c}_{x,A} + \hat{c}_{x+1,A}^\dagger \hat{c}_{x,C} - \hat{c}_{x+1,B}^\dagger \hat{c}_{x,D} - \hat{c}_{x,D}^\dagger \hat{c}_{x,B}) \\
& + \frac{t_2 e^{-i\theta}}{2} (\hat{c}_{x,A}^\dagger \hat{c}_{x,C} + \hat{c}_{x,C}^\dagger \hat{c}_{x+1,A} - \hat{c}_{x,D}^\dagger \hat{c}_{x+1,B} - \hat{c}_{x,B}^\dagger \hat{c}_{x,D}) \\
& + \frac{t_2}{2} (\hat{c}_{x,A}^\dagger \hat{c}_{x,D} + \hat{c}_{x,D}^\dagger \hat{c}_{x,A} + \hat{c}_{x,B}^\dagger \hat{c}_{x,C} + \hat{c}_{x,C}^\dagger \hat{c}_{x,B} \\
& \left. + \hat{c}_{x+1,A}^\dagger \hat{c}_{x,D} + \hat{c}_{x,D}^\dagger \hat{c}_{x+1,A} + \hat{c}_{x+1,B}^\dagger \hat{c}_{x,C} + \hat{c}_{x,C}^\dagger \hat{c}_{x+1,B}) \right\}, \tag{A1}
\end{aligned}$$

其中, θ 是一个相位角, 其它参数物理意义同式(1). 该模型在PBC下存在实能量解 $\omega_0 = \pm \sqrt{t_1^2 + t_2^2 \sin^2 \theta}$, 因此满足虚能隙闭合条件. 所以当该模型中出现双极非厄米趋肤效应时, 其耗散动力学行为中将出现非常有趣的双极非厄米边界爆发. 此时, 耗散概率分布的反常峰值将同时出现在左右两个边界上, 具体情形如图7所示.

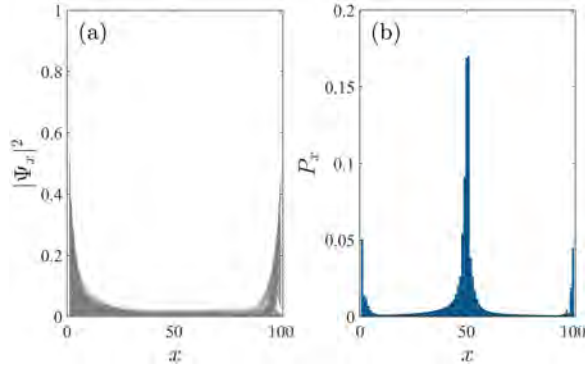


图 7 (a) 四带晶格中的双极非厄米趋肤效应. (b) 相应的双极非厄米边界爆发. 参数: $L = 100$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $\gamma = 5$, $\theta = \pi/4$, $x_0 = 50$.

Fig. 7. (a) Bipolar non-Hermitian skin effect in a four-band lattice. (b) The corresponding bipolar non-Hermitian edge burst. Parameters are $L = 100$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $\gamma = 5$, $\theta = \pi/4$, $x_0 = 50$.

附录B 一维双链四带晶格中非厄米边界爆发的稳健性

研究发现, 正文(1)式给出的一维双链四带非厄米晶格模型中的非厄米边界爆发现象具有很好的稳健性. 当模型参数 γ 或 t_2 上存在很小的扰动时, 非厄米边界爆发现象仍会出现. 首先来看耗散强度上存在扰动的情形, 此时模型中的 γ 变为 $\gamma(1 + \delta r)$, 其中 r 为 $[-1/2, 1/2]$ 区间中均匀分布的随机数, δ 为 Anderson 无序的强度. 计算发现, 在小的 Anderson 无序扰动下, 模型的虚能隙仍然能保持闭合, 如图8(a)所示. 进一步, 数

值模拟可发现, 在Anderson无序扰动下, 非厄米边界爆发现象仍然存在, 具体示例见图8(b). 其次来看 t_2 上存在扰动的情形, 此时模型中的 t_2 参数变为 $t_2(1 + \delta r)$. 计算发现, t_2 参数上引入的扰动对模型的虚能隙影响较 γ 上的扰动明显, 但仍能保持虚能隙是一个很小的值且在较大范围内仍接近0, 如图8(c)所示. 进一步, 数值模拟发现, 当Anderson无序扰动的强度 δ 很小时, 一维双链四带晶格中的非厄米边界爆发现象仍然存在, 具体示例见图8(d).

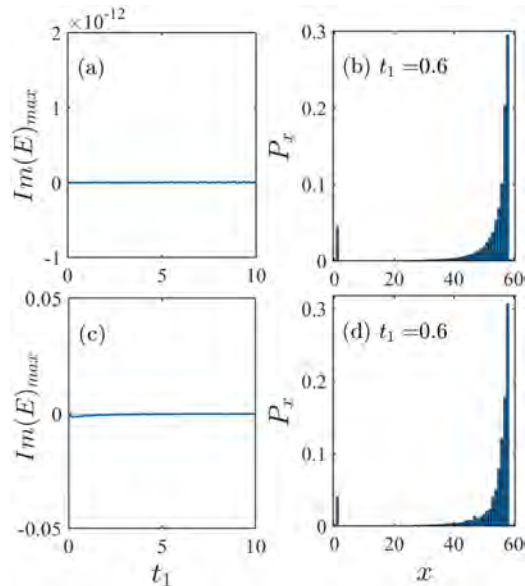


图 8 四带晶格中非厄米边界爆发的稳健性. (a) γ 值存在扰动时PBC下本征能量虚部最大值与 t_1 的关系. (b) γ 扰动下的边界爆发示例. (c) t_2 值存在扰动时PBC下本征能量虚部最大值与 t_1 的关系. (d) t_2 扰动下的边界爆发示例. 其它参数: $L = 60$, $t_2 = 0.5$, $\gamma = 1$, $\delta = 0.1$, $x_0 = 57$.

Fig. 8. Robustness of the non-Hermitian edge bursts in the four-band lattice. (a) Maximum imaginary part of the eigenenergies under periodic boundary conditions (PBC) as a function of t_1 with perturbations on γ . (b) Typical edge bursts under perturbations on γ . (c) Maximum imaginary part of the eigenenergies under periodic boundary conditions (PBC) as a function of t_1 with perturbations on t_2 . (d) Typical edge bursts under perturbations on t_2 . Other parameters are $L = 60$, $t_2 = 0.5$, $\gamma = 1$, $\delta = 0.1$, $x_0 = 57$.

参考文献

- [1] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [2] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803

- [3] Ashida Y, Gong Z, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
- [4] Yang Z, Zhang K, Fang C, Hu J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 226402
- [5] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
- [6] Kozii V, Fu L 2024 *Phys. Rev. B* **109** 235139
- [7] Zheng R, Lin J, Liang J, Ding K, Lu J, Deng W, Ke M, Huang X, Liu Z 2024 *Commun. Phys.* **7** 298
- [8] Wang W, Hu M, Wang X, Ma G, Ding K 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 207201
- [9] Wang L, Wang Z, Liu J, Chen S 2025 *Phys. Rev. B* **112** 104207
- [10] Yu-Min H, Fei S, Zhong W 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 230000 (in Chinese) [胡愈敏, 宋飞, 汪忠 2021 物理学报 **70** 230000]
- [11] Hou B, Zeng Q B 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 130302 (in Chinese) [侯博, 曾琦波 2022 物理学报 **71** 130302]
- [12] Sun S T, Ding Y X, Liu W M 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 130701 (in Chinese) [孙思彤, 丁迎霞, 刘伍明 2022 物理学报 **71** 130701]
- [13] Gao J, Hang C 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 133202 (in Chinese) [高洁, 杭超 2022 物理学报 **71** 133202]
- [14] Pan L 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 170305 (in Chinese) [潘磊 2022 物理学报 **71** 170305]
- [15] Deng T S 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 170306 (in Chinese) [邓天舒 2022 物理学报 **71** 170306]
- [16] Chen S Y, Jiang C, Ke S L, Wang B, Lu P X 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 174201 (in Chinese) [陈舒越, 蒋闯, 柯少林, 王兵, 陆培祥 2022 物理学报 **71** 174201]
- [17] Zhang X Z, Wang P, Zhang K L, Yang X M, Song Z 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 174501 (in Chinese) [张禧征, 王鹏, 张坤亮, 杨学敏, 宋智 2022 物理学报 **71** 174501]
- [18] Hu H, Zhao E 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 010401
- [19] Zhang G, Wang L, Chen S 2026 *Phys. Rev. B* **113** 064115

- [20] Yang S, Wang Z, Fu L, Jie J 2025 *Commun. Phys.* **8** 114
- [21] Fu L 2024 *Commun. Theor. Phys.* **76** 045101
- [22] Zhu K J, Guo Z W, Chen H 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 131101 (in Chinese) [祝可嘉, 郭志伟, 陈鸿 2022 物理学报 **71** 131101]
- [23] Tang Y J, Liang C, Liu Y C 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 171101 (in Chinese) [唐原江, 梁超, 刘永椿 2022 物理学报 **71** 171101]
- [24] Li L, Lee C H, Mu S, Gong J 2020 *Nat. Commun.* **11** 5491
- [25] Zhang K, Yang Z, Fang C 2022 *Nat. Commun.* **13** 2496
- [26] Lin H, Pi J, Qi Y, Qin W, Nori F, Long G L 2025 *Phys. Rev. Res.* **7** 033150
- [27] Wu J, Hu Y, He Z, Deng K, Huang X, Ke M, Deng W, Lu J, Liu Z 2025 *Phys. Rev. Lett.* **134** 176601
- [28] Pu Z, Xi Y, Tang Y, Lu J, Deng W, Cheng H, Ke M, Chen S, Liu Z 2026 *Phys. Rev. Lett.* **136** 146603
- [29] Chen X, Wu J, Chen X, Pu Z, Hu Y, Lu J, Ke M, Deng W, Liu Z 2026 *Phys. Rev. Lett.* **136** 106604
- [30] Wang L, Liu Q, Zhang Y 2021 *Chin. Phys. B* **30** 020506
- [31] Xue W T, Hu Y M, Song F, Wang Z 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 120401
- [32] Ren C C, Yin X G 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 160000 (in Chinese) [任翠翠, 尹相国 2023 物理学报 **72** 160000]
- [33] Xiao L, Xue W T, Song F, Hu Y M, Yi W, Wang Z, Xue P 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 070801
- [34] Zhu J, Mao Y L, Chen H, Yang K X, Li L, Yang B, Li Z D, Fan J 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 203801
- [35] Sen G, Yuce C 2025 *Phys. Rev. B* **111** 174305
- [36] Zou X R, Zhang Z X, Zhang J, Cui W X, Cao J, Wang H F 2025 *Phys. Rev. B* **112** 224313
- [37] Miri M A, Alu A 2019 *Science* **363** eaar7709
- [38] Li L, Lee C H, Gong J 2021 *Commun. Phys.* **4** 42

- [39] Guo C X, Wang X, Hu H, Chen S 2023 *Phys. Rev. B* **107** 134121
- [40] Wang L, Wang Z, Chen S 2024 *Phys. Rev. B* **110** L060201
- [41] Li S Z, Li Z 2024 *Phys. Rev. B* **110** L041102
- [42] Zhang K, Yang Z, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
- [43] Guo C X, Liu C H, Zhao X M, Liu Y, Chen S 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 116801
- [44] Minganti F, Biella A, Bartolo N, Ciuti C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 042118
- [45] Cai Z, Barthel T 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 150403
- [46] Liu C H, Zhang K, Yang Z, Chen S 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 043167
- [47] Ma S, Lin H, Pi J 2024 *Phys. Rev. B* **109** 214311
- [48] Rudner M S, Levitov L S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 065703
- [49] Karski M, Förster L, Choi J M, Steffen A, Alt W, Meschede D, Widera A 2009 *Science* **325** 174
- [50] Yan Z, Zhang Y R, Gong M, Wu Y, Zheng Y, Li S, Wang C, Liang F, Lin J, Xu Y, Guo C, Sun L, Peng C Z, Xia K, Deng H, Rong H, You J Q, Nori F, Fan H, Zhu X, Pan J W 2019 *Science* **364** 753
- [51] Du J, Li H, Xu X, Shi M, Wu J, Zhou X, Han R 2003 *Phys. Rev. A* **67** 042316
- [52] Wang L, Jia L F, Zhang Y B 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 130501 (in Chinese) [王利, 贾丽芳, 张云波 2022 物理学报 **71** 130501]
- [53] Koh J M, Xue W T, Tai T, Koh D E, Lee C H 2025 *arXiv: 2503.14595* [quant-ph]
- [54] Xue W T, Li M R, Hu Y M, Song F, Wang Z 2021 *Phys. Rev. B* **103** L241408
- [55] Zhou X, Zhang W, Cao W, Zhang X 2025 *Phys. Rev. Lett.* **135** 106601
- [56] Wang Z, Jiang J, Zheng Y, Zhao W, Wang C, Guo Z, Liu Y C, Zhang S, Lu C 2026 *Sci. Bull.* **71**
- [57] Guo Z, Jiang J, Jiang H, Ren J, Chen H 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 013122
- [58] Gou W, Chen T, Xie D, Xiao T, Deng T S, Gadway B, Yi W, Yan B 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 070402

Wide-parameter-range non-Hermitian edge burst in a one-dimensional four-band lattice*

LI Chaomin ZHANG Guoying WANG Li†

(*Institute of Theoretical Physics, State Key Laboratory of Quantum Optics Technologies and Devices, Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

Abstract

Non-Hermitian physics, which is able to provide solid and comprehensive descriptions for open systems with gain and loss as well as quasiparticle dynamics in condensed matter systems, has achieved substantial progress over the past two decades and become one of the hot topics at the frontiers of modern physics research. During the exploration of non-Hermitian physics, many intriguing and fundamental physical phenomena have emerged, such as the non-Hermitian skin effect and non-Hermitian edge burst. While the non-Hermitian skin effect is an intriguing static property, the non-Hermitian edge burst reveals a peculiar dynamical property of non-Hermitian systems, which corresponds to a counterintuitively high loss peak at the edge that stands out against the nearly invisible decaying tail. Once discovered numerically, this phenomenon has aroused widespread attention. Its physical origin is found to be an interplay between non-Hermitian skin effect and imaginary gap closing. Behind this novel phenomenon lies rich physics and profound connotations, which are attracting sustained exploration by both theoretical and experimental physicists. While two-band lattice systems have been extensively investigated, multi-band systems are still

* Project supported by the Research Project Supported by Shanxi Scholarship Council of China (Grant No. 2024-004), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11404199, 12147215) and the Fundamental Research Program of Shanxi Province, China (Grant Nos. 1331KSC, 202203021211315 and 2015021012).

† Corresponding author. E-mail: liwangiphy@sxu.edu.cn

rarely addressed. In this work, a one-dimensional four-band non-Hermitian lossy lattice model is proposed, which possesses a two-chain structure and dissipation exists only on one of the four sublattice sites. Exact numerical simulations on the non-Hermitian quantum dynamics show that the one-dimensional four-band lattice also exhibits non-Hermitian edge burst. And more interestingly, compared with the one-dimensional double-chain two-band model, the parameter range where the non-Hermitian edge burst exists in the one-dimensional double-chain four-band model is greatly broadened, which could be dubbed as wide-parameter-range non-Hermitian edge burst. Through analytical calculations of the generalized Brillouin zone and exact analysis on the energy spectrum under periodic boundary conditions, the physical origin of the wide-parameter-range non-Hermitian edge burst is also found to be the interplay of non-Hermitian skin effect and the imaginary gap closing. What is interesting is that the one-dimensional double-chain four-band model exhibits closed imaginary gap across the entire parameter domain of t_1 , which ultimately enables the non-Hermitian edge burst to occur over a wide parameter region. Furthermore, utilizing the Green's function method and contour integration, the expression for the bulk loss probability is obtained and its power-law decay behavior is confirmed. The bulk scaling exponent α_b is derived and further verified by fitting the numerically obtained bulk loss probability P_x . Finally, based on the expression of bulk loss probability, an approximate expression for edge loss probability P_{edge} is derived. The results show that the wide-parameter-range non-Hermitian edge burst satisfies the universal bulk-edge scaling relation, i.e., $\alpha_e = \alpha_b - 1$. Additionally, numerical results verify that the wide-parameter-range non-Hermitian edge burst is highly robust against tiny perturbations of system parameters such as γ and t_2 , and the phenomenon is immune to such small perturbations. The wide-parameter-range non-Hermitian edge burst is expected to be observed in various non-Hermitian systems, including quantum optical systems, topoelectrical circuits, acoustic systems, and ultracold atom platforms.

Keywords: non-Hermitian edge burst, non-Hermitian skin effect, imaginary gap, bulk-edge scaling relation