

实验室天体物理中狭义相对论磁流体力学方程组的标度变换律*

马作霖¹⁾²⁾ 李超博¹⁾²⁾ 平永利²⁾³⁾ 仲佳勇^{1†)2)3)}

1) (北京师范大学物理与天文学院, 北京 100875)

2) (北京师范大学文理学院, 珠海 519087)

3) (北京师范大学天文与天体物理前沿科学研究所, 北京 100875)

摘要

在实验室天体物理研究中, 标度变换律作为连接实验室尺度与天体物理现象尺度的理论桥梁, 具有关键作用。现有时空标度变换律主要建立在非相对论理想磁流体力学框架下, 然而众多天文过程涉及相对论乃至强相对论区域, 并不严格适用该变换律。分析表明, 狭义相对论情形下光速作为普通常数的存在对标度变换施加了根本性约束: 速度量纲的变换因子必须取为 1, 即实验室尺度与天体尺度中的洛伦兹因子在变换前后需严格保持一致。本文还整合理论和实验数据给出了研究不同相对论效应的天体现象所需的激光功率密度, 该结果为实验室天体物理中强相对论现象的模拟研究提供了重要的理论依据与指导。

关键词: 实验室天体物理, 标度变换律, 狭义相对论, 磁流体

基金: 国家自然科学基金(批准号: 12325305, 12135001)和国家重点研发计划(批准号: 2022YFA1603200 和 2022YFA1603203)资助的课题。

† 通信作者. E-mail: jyzhong@bnu.edu.cn

第一作者. E-mail: 202331160006@mail.bnu.edu.cn

1 引言

实验室天体物理 (Laboratory Astrophysics)^[1] 作为连接基础物理实验与天体物理观测的新兴交叉学科, 近二十年来取得了显著进展。高功率激光装置 (如美国的 NIF^[2]、法国的 LMJ^[3] 以及中国的“神光”系列^[4,5] 和“羲和”装置^[6]) 和 Z-Pinch^[7] 等高能密度装置的发展, 使得在实验室中创造极端物理条件成为可能, 从而为研究天体物理现象提供了可控的研究平台。这些实验能够在微米至毫米尺度的空间内、纳秒至皮秒量级的时间尺度上, 复现超新星遗迹^[8]、射流^[9,10]、吸积盘^[11] 等高能天体过程中关键的等离子体物理过程。然而, 实验室系统与天体物理系统之间存在巨大的时空尺度差异——前者往往比后者小数十个数量级。如何确保实验室中的观测结果能够有效映射到真实的天体物理现象, 构成了该领域最核心的方法论问题。

标度变换律 (Scaling Law) 正是解决这一问题的理论桥梁。通过分析控制流体或等离子体演化的基本方程组在尺度变换下的不变性, 研究者可以建立实验室参数与天体物理参数之间的对应关系, 从而使得在实验室中模拟天体物理过程成为可能。这一思想可追溯至流体力学中的相似性原理, 并在磁流体力学 (Magnetohydrodynamics, MHD) 框架下得到系统发展。Ryutov 等人^[12,13] 曾系统建立了非相对论理想磁流体条件下的标度理论, 指出如果两个系统的欧拉数、雷诺数等特征无量纲参数保持一致, 则它们将遵循相似的动力学演化。这一理论为此后大量激光等离子体实验模拟超新星遗迹、分子云碰撞激波等天体现象提供了基础。

然而, 现有标度变换理论的适用范围存在明确的边界——其核心假设是系统处于非相对论极限, 且等离子体行为可由理想 MHD 描述。但天文观测揭示的诸多重要现象并非局限于这一框架。例如, 伽马射线暴 (Gamma-Ray Bursts, GRBs) 中的喷流速度可接近光速, 其整体洛伦兹因子可达数百^[14]; 活动星系核 (Active Galactic Nuclei, AGN) 的相对论性喷流涉及强烈的激波与磁场放大过程^[15,16]; 双中子星并合事件 (如 LIGO 探测的 GW170817^[17]) 不仅产生引力波, 其抛射物中的磁流体动力学过程也必须在相对论框架下描述。此外, 脉冲星风云^[18] 中的激波传播速度已接近相对论量级。在这些强相对论系统中, 非相对论标度理论的直接套用将可能导致严重的物理错位: 流体的惯性项、能量方程中的内能与静止质量能的关系、以及电磁场对动量的贡献方式均发生本质变化。若研究者误用非相对论的标度关系来设计实验或解释观测, 则可能得出与真实天体物理过程相悖的结

论。

因此，建立适用于狭义相对论框架下的磁流体标度变换理论，具有重要的科学迫切性。近年来，相对论性磁流体力学（Relativistic Magnetohydrodynamics, RMHD）的理论及数值研究取得了长足进展^[19-21]。然而，这些工作主要聚焦于数值格式的构造或特定天体物理系统的模拟，对于连接实验室尺度与天体尺度的“桥接理论”——标度变换律的系统研究仍相对匮乏。本文旨在填补这一理论空白。我们将从狭义相对论框架下的理想磁流体力学方程组出发，通过无量纲化分析与尺度变换的对称性考察，系统推导适用于相对论情形的标度变换关系。理论分析揭示了一个关键结论：相对论情形下速度变换因子必须取为 1，即洛伦兹因子在变换前后需严格一致。这一结果明确了相对论标度变换的核心约束条件，为实验室模拟强相对论天体现象提供了定量的理论指导。

2 相对论磁流体力学方程组

在本文的分析中，采用光速 $c=1$ 的几何化单位制，度规符号 $(-, +, +, +)$ ，则相对论情形下的磁流体力学方程组中连续性方程和能动方程可以表示为：^[22]

$$\nabla_a(\rho u^a) = 0, \quad \nabla_b(T^{ab}) = 0, \quad (1)$$

其中， ρ 是流体静质量密度， u^a 是流体四速度， $T^{ab} = T_{fluid}^{ab} + T_{EM}^{ab}$ 是流体能动张量，分为流体部分 T_{fluid}^{ab} 和电磁场部分 T_{EM}^{ab} ，在理想磁流体条件下（电导率无穷大），其可以表示为：^[23]

$$T_{fluid}^{ab} = \rho h u^a u^b + p g^{ab} \quad (2)$$

$$T_{EM}^{ab} = b^2 u^a u^b + \frac{1}{2} b^2 g^{ab} - b^a b^b \quad (3)$$

其中， $h = 1 + \epsilon + p/\rho$ 是比焓（ ϵ 是比内能）， p 是压强， g^{ab} 是时空度规， $b^a = *F^{ab} u_b$ 是随动系的磁感四矢量（ $*F^{ab}$ 是电磁场张量 F^{ab} 的对偶），满足 $u_a b^a = 0$ ，且 $b^2 = b^a b_a$ ，与实验室系磁场 B^i 之间满足洛伦兹变换，（为简化方程， B^i 与测量值之间存在 $\sqrt{(4\pi)}$ 的正比，下同）。

此外，除了能动方程，相对论磁流体中还有麦克斯韦方程和状态方程：

$$\nabla_b(*F^{ab})=0 \quad (4)$$

$$p=(\kappa-1)\rho\epsilon \quad (5)$$

其中状态方程采用了最常见的气体方程， κ 是流体物质的绝热指数，对于单原子气体非相对论为5/3，极端相对论下是4/3。

在平直时空中，度规 g^{ab} 退化为闵氏度规 $\eta^{ab} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ ，协变导数 ∇_a 退化为普通偏导 ∂_a ，同时由度规变化产生的其他项也全部消除，由此得到的狭义相对论理想磁流体力学（Special Relativistic Magnetohydrodynamics, SRMHD）方程组可以表示为^[24]

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} D \\ S^j \\ E_{tot} \\ B^k \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^i} \begin{bmatrix} Dv^i \\ (\rho h + b^2)\Gamma^2 v^j v^i + p_{tot}\delta^{ij} - b^j b^i \\ S^i \\ B^k v^i - B^i v^k \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

其中 $D = \Gamma\rho$ 是流体质量密度， $S^j = (\rho h + b^2)\Gamma^2 v^j - b^0 b^j$ 是磁流体动量密度， $E_{tot} = (\rho h + b^2)\Gamma^2 - (p + b^2/2)$ 是流体能量密度， v^i 是实验室系流体三速， $\Gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ 是流体运动的洛伦兹因子， B^i 是实验室系观察的磁场， $p_{tot} = p + b^2/2$ 是流体的总压强。

非相对论的可压缩的磁流体力学方程组可以表达为（cgs单位制）：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_j \\ \rho E_{tot} \\ B_k \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_j v_i + p_{tot} - B_j B_i \\ (\rho E_{tot} + p_{tot})v_i - B_j v_j B_i \\ B_k v_i - B_i v_k \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

其中 $E_{tot} = (v^2 + B^2/\rho)/2 + \epsilon$ 。通过对比（6）和（7）可以看到MHD方程组和SRMHD方程在大体上是相同的，但前者隐含光速这一普适常数。这一差异将在后续标度变换分析中起到关键作用。

3 SRMHD 的标度变换律

现有针对MHD方程组的时空标度变换律规定 A 系与 A' 系之间若满足理想MHD方程组且存在某时刻描述方程的全部物理量满足^[25]

$$r_i = ar_i', \rho = b\rho', p = cp', t = a\sqrt{\frac{b}{c}}t', v_i = \sqrt{\frac{c}{b}}v_i', B_i = \sqrt{c}B_i', \quad (8)$$

则 A 系与 A' 系之间存在极高的相似性，其之后的演化也将遵循相同的方程得到相似的结果，并可通过同一套 ‘abc’ 系数反演预言将要发生的天体现象或分析内部观测不到的物理机制（故也称为 ‘abc’ 标度变换律）。容易证明，该套标度变换律等价于一种单位放缩关系，不同种物理量之间的标度变换法则与量纲变换法则一致，独立量纲数量决定了自由变换的系数数量。故只要方程两边每一项的量纲一致，则标度变换前后方程两边每一项只会多处相同的常数，并可以通过约掉该常数实现方程前后统一。

由于实验室系和天体现象系中要满足同一套方程，在SRMHD的标度变换中，光速这一常数物理量需要在变换前后保持不变，依然尝试使用 ‘abc’ 变换律，定义 A 系与 A' 系之间存在如下的关系：

$$\begin{aligned} r_i &= \alpha r_i', \rho = \beta \rho', v_i = \gamma v_i', p = \beta \gamma^2 p', t = \frac{\alpha}{\gamma} t', B_i = \gamma \sqrt{\beta} B_i', \\ \frac{\epsilon}{\epsilon'} &= \frac{p/(\kappa-1)\rho}{p'/(\kappa-1)\rho'} = \frac{\beta \gamma^2}{\beta} = \gamma^2, \quad W = \frac{\Gamma}{\Gamma'} = \sqrt{\frac{1-\gamma^2 v'^2}{1-v'^2}}, \quad X = \frac{h}{h'} = \frac{1+\gamma^2 \epsilon' + \gamma^2 p'/\rho'}{1+\epsilon' + p'/\rho'}, \\ \frac{b_0}{b'_0} &= \frac{\Gamma(v_i B_i)}{\Gamma'(v'_i B'_i)} = W \gamma^2 \sqrt{\beta}, \quad Y_i = \frac{b_i}{b'_i} = \frac{b_0 v_i + B_i/\Gamma}{b'_0 v'_i + B'/\Gamma'} = \frac{W \gamma^3 \sqrt{\beta} b'_0 v'_i + W^{-1} \gamma \sqrt{\beta} B'/\Gamma'}{b'_0 v'_i + B'/\Gamma'} \\ Y &= \frac{b^2}{b'^2} = \frac{(v_i B_i)^2 + B^2/\Gamma^2}{(v'_i B'_i)^2 + B'^2/\Gamma'^2} = \frac{\gamma^2 \beta W^{-2} B'^2 \Gamma'^{-2} + \gamma^4 \beta (B'_i v'_i)^2}{B'^2 \Gamma'^{-2} + (B'_i v'_i)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

需要额外说明的是，此处为了书写方便，将 Y_j 用下标 j 表示 b_j 的变换系数， Y_j 的上下标 j 并非求和指标，不参与爱因斯坦求和约定。

容易证明这种变换律下状态方程（5）可以直接进行标度变换。而这里新引入的 W, X, Y, Y_i 在 $\gamma \neq 1$ 时均是时变函数，将式（9）代入（6）有：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} D \\ S^j \\ E \\ B^k \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Gamma \rho \\ (\rho h + b^2) \Gamma^2 v^j - b^0 b^j \\ (\rho h + b^2) \Gamma^2 - (p + b^2 / 2) \\ B^k \end{bmatrix} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t'} \begin{bmatrix} W \beta \Gamma' \rho' \\ (\beta X \rho' h' + Y b'^2) W^2 \gamma \Gamma'^2 v'^j - W \sqrt{\beta} \gamma^2 Y^j b'^0 b'^j \\ (\beta X \rho' h' + Y b'^2) W^2 \Gamma'^2 - (\beta \gamma^2 p' + Y b'^2 / 2) \\ \gamma \sqrt{\beta} B'^k \end{bmatrix}$$

(10)

和

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \begin{bmatrix} D v^i \\ (\rho h + b^2) \Gamma^2 v^i v^j + p_{tot} \delta^{ij} - b^i b^j \\ S^i \\ B^k v^i - B^i v^k \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{bmatrix} \Gamma \rho v^i \\ (\rho h + b^2) \Gamma^2 v^i v^j + (p + b^2 / 2) \delta^{ij} - b^i b^j \\ (\rho h + b^2) \Gamma^2 v^i - b^0 b^i \\ B^k v^i - B^i v^k \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x'_i} \begin{bmatrix} W \beta \gamma \Gamma' \rho' v'^i \\ (\beta X \rho' h' + Y b'^2) W^2 \Gamma'^2 \gamma^2 v'^i v'^j + (\gamma^2 \beta p' + Y b'^2 / 2) \delta^{ij} - Y^i Y^j b'^i b'^j \\ (\beta X \rho' h' + Y b'^2) W^2 \Gamma'^2 \gamma v'^i - \gamma^2 \sqrt{\beta} Y^i b'^0 b'^i \\ \gamma^2 \sqrt{\beta} (B'^k v'^i - B'^i v'^k) \end{bmatrix}$$

(11)

可以看到，由于 W, X, Y, Y^i 的时空依赖性，除了磁感应方程外，想让 (10) + (11) 式是 (6) 式的固定系数倍几乎是不可能的。而若满足 $\gamma = 1$ ，则可以证明 $W = 1, X = 1, Y = \beta, Y^i = \sqrt{\beta}$ ，并将其代入 (10) + (11) 式得到：

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} D \\ S^j \\ E \\ B^k \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{bmatrix} D v^i \\ (\rho h + b^2) \Gamma^2 v^j v^i + p_{tot} \delta^{ij} - b^j b^i \\ S^i \\ B^k v^i - B^i v^k \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t'} \begin{bmatrix} \beta D' \\ \beta S'^j \\ \beta E' \\ \sqrt{\beta} B'^k \end{bmatrix} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x'_i} \begin{bmatrix} \beta D' v'^i \\ \beta ((\rho' h' + b'^2) \Gamma'^2 v'^i v'^j + p'_{tot} \delta^{ij} - b'^i b'^j) \\ \beta S'^i \\ \sqrt{\beta} (B'^k v'^i - B'^i v'^k) \end{bmatrix} = 0$$

由于 α, β 均是正实常数，且 (12) 式四个方程互相独立，于是将 (12) 式前三行方程两边乘 α / β ，第四行两边乘 $\alpha / \sqrt{\beta}$ 并不改变方程正确性，如此即可得到：

$$\frac{\partial}{\partial t'} \begin{bmatrix} D' \\ S'^j \\ E' \\ B'^k \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x'_i} \begin{bmatrix} D' v^i \\ (\rho' h' + b'^2) \Gamma'^2 v^i v'^j + p'_{tot} \delta^{ij} - b^i b'^j \\ S^i \\ B'^k v^i - B^i v'^k \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

可以看到，任意的正 α 和 β 均满足 (12) 式和 (13) 式，也就是说SRMHD和MHD标度变换律的唯一不同就是SRMHD要求速度（或洛伦兹因子）在标度变换前后保持不变，而空间、密度等其他物理量的变换因子可自由选取。

以上讨论论证了式 (9) 的变换规律在初始条件 ($t=0$) 下方程形式上能够实现方程组形式不变性，下面将讨论在 $t>0$ 下变换规律依然成立。

对A系定义无量纲物理量（无量纲物理量用 $\tilde{}$ 表示，特征尺度 r_0 ，特征密度 ρ_0 ，所有与速度幂次相关的量纲用 $c=1$ 平衡）：

$$\begin{aligned} r_i &= r_i / r_0, \quad \tilde{\rho} = \rho / \rho_0, \quad v_i = v_i, \quad \tilde{p} = p / \rho_0, \quad \tilde{t} = t / r_0, \\ \tilde{\epsilon} &= \epsilon, \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma, \quad \tilde{h} = h, \quad b_i = b_i / \sqrt{\rho_0}, \quad B_i = B_i / \sqrt{\rho_0}, \end{aligned} \quad (14)$$

同理对A'系也有如下定义：

$$\begin{aligned} r'_i &= r'_i / r'_0, \quad \rho' = \rho' / \rho'_0, \quad v'_i = v'_i, \quad p' = p' / \rho'_0, \quad t' = t' / r'_0, \\ \epsilon' &= \epsilon', \quad \Gamma' = \Gamma', \quad h' = h', \quad b'_i = b'_i / \sqrt{\rho'_0}, \quad B'_i = B'_i / \sqrt{\rho'_0}, \end{aligned} \quad (15)$$

结合式 (9) 可以证明，当 $\gamma=1$ ， $t=0$ 时A系和A'系的无量纲物理量满足（下标0表示 $t=0$ 的初值）：

$$\begin{aligned} \frac{r_{i0}}{r'_{i0}} = \frac{r_{i0} / r_0}{r'_{i0} / r'_0} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1, \quad \frac{\rho_0}{\rho'_0} = \frac{\rho_0 / \rho_0}{\rho'_0 / \rho'_0} = 1, \quad \frac{v_{i0}}{v'_{i0}} = \frac{v_{i0}}{v'_{i0}} = 1, \quad \frac{p_0}{p'_0} = \frac{p_0 / \rho_0}{p'_0 / \rho'_0} = \frac{\beta}{\beta} = 1, \quad \frac{t_0}{t'_0} = \frac{t_0 / r_0}{t'_0 / r'_0} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1, \\ \frac{\epsilon_0}{\epsilon'_0} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon'_0} = 1, \quad \frac{\Gamma_0}{\Gamma'_0} = \frac{\Gamma_0}{\Gamma'_0} = 1, \quad \frac{h_0}{h'_0} = \frac{h_0}{h'_0} = 1, \quad \frac{b_{i0}}{b'_{i0}} = \frac{b_{i0} / \sqrt{\rho_0}}{b'_{i0} / \sqrt{\rho'_0}} = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} = 1, \quad \frac{B_{i0}}{B'_{i0}} = \frac{B_{i0} / \sqrt{\rho_0}}{B'_{i0} / \sqrt{\rho'_0}} = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} = 1 \end{aligned} \quad (16)$$

将 (14) 式代入如式 (6) 可以得到无量纲物理量的SRMHD方程组：

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \begin{bmatrix} \rho_0 \tilde{D} \\ \rho_0 S^j \\ \rho_0 E_{tot} \\ \sqrt{\rho_0} B^k \end{bmatrix} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \begin{bmatrix} \rho_0 \tilde{D} v^i \\ \rho_0 [(\tilde{\rho} \tilde{h} + b^2) \Gamma^2 v^i v^j + p_{tot} \delta^{ij} - b^i b^j] \\ \rho_0 S^i \\ \sqrt{\rho_0} (B^k v^i - B^i v^k) \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

其中 $\tilde{D} = \tilde{\Gamma} \tilde{\rho} = D / \rho_0$, $S^j = (\tilde{\rho} \tilde{h} + b^2) \Gamma^2 v^j - b^0 b^j = S^j / \rho_0$,

$E_{tot} = (\tilde{\rho} \tilde{h} + b^2) \Gamma^2 - (\tilde{p} + b^2 / 2) = E_{tot} / \rho_0$, $p_{tot} = (\tilde{p} + b^2 / 2) = p_{tot} / \rho_0$ 。将前三行方程两边通同乘 r_0 / ρ_0 , 第四行方程两边通同乘 $r_0 / \sqrt{\rho_0}$ 即可得到:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ S^j \\ E_{tot} \\ B^k \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^i} \begin{bmatrix} \tilde{D} v^i \\ (\tilde{\rho} \tilde{h} + b^2) \Gamma^2 v^i v^j + p_{tot} \delta^{ij} - b^i b^j \\ S^i \\ B^k v^i - B^i v^k \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

将 (15) 式代入 (6) 式的结果 (区别仅在于所有物理量均加') :

$$\frac{\partial}{\partial t'} \begin{bmatrix} D' \\ S'^j \\ E'_{tot} \\ B'^k \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x'^i} \begin{bmatrix} D' v'^i \\ (\rho' h' + b'^2) \Gamma'^2 v'^i v'^j + p'_{tot} \delta'^{ij} - b'^i b'^j \\ S'^i \\ B'^k v'^i - B'^i v'^k \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

(18) 式和 (19) 式的初始条件为 (16) 式中物理量。

对比 (16)、(18) 和 (19) 式可以发现, (18) 式和 (19) 式的方程形式一致, 初始条件一致, 且保有 SRMHD 的方程特征。在数学上可以证明, SRMHD 方程组 (6、18、19) 式属于双曲型偏微分方程组, 该种方程在真实物理参数下 (对于 SRMHD 方程, 要求 $\rho > 0, p > 0, B < \infty, Cs < 1, (\rho, v, B) \in H^s(R^3)$, 其中 C_s 是声速) 是适定的^[26], 即方程组的解存在、唯一、连续依赖初值 (虽然具有混沌性)。也就是说, 对于具有相同初值和方程表达形式的方程组 (18) 式和 (19) 式的解必然存在且相同 (演化时刻 $t = \tau$):

$$\begin{aligned} r'_{i\tau} &= r_{i\tau}, \quad \rho'_{\tau} = \rho_{\tau}, \quad v'_{i\tau} = v_{i\tau}, \quad p'_{\tau} = p_{\tau}, \quad t'_{\tau} = t_{\tau}, \\ \epsilon'_{\tau} &= \epsilon_{\tau}, \quad \Gamma'_{\tau} = \Gamma_{\tau}, \quad h'_{\tau} = h_{\tau}, \quad b'_{i\tau} = b_{i\tau}, \quad B'_{i\tau} = B_{i\tau} \end{aligned} \quad (20)$$

代入 (14) 式, (15) 式和 (9) 式可得:

$$\begin{aligned}
\frac{r_{ir}}{r'_{ir}} = \frac{r_{ir}r_0}{r'_{ir}r'_0} = \alpha, \quad \frac{\rho_\tau}{\rho'_\tau} = \frac{\rho_\tau\rho_0}{\rho'_\tau\rho'_0} = \beta, \quad \frac{v_{ir}}{v'_{ir}} = \frac{v_{ir}}{v'_{ir}} = 1, \quad \frac{p_\tau}{p'_\tau} = \frac{p_\tau\rho_0}{p'_\tau\rho'_0} = \beta, \quad \frac{t_\tau}{t'_\tau} = \frac{t_\tau r_0}{t'_\tau r'_0} = \alpha, \\
\frac{\epsilon_\tau}{\epsilon'_\tau} = \frac{\epsilon_\tau}{\epsilon'_\tau} = 1, \quad \frac{\Gamma_\tau}{\Gamma'_\tau} = \frac{\Gamma_\tau}{\Gamma'_\tau} = 1, \quad \frac{h_\tau}{h'_\tau} = \frac{h_\tau}{h'_\tau} = 1, \quad \frac{b_{ir}}{b'_{ir}} = \frac{b_{ir}\sqrt{\rho_0}}{b'_{ir}\sqrt{\rho'_0}} = \sqrt{\beta}, \quad \frac{B_{ir}}{B'_{ir}} = \frac{B_{ir}\sqrt{\rho_0}}{B'_{ir}\sqrt{\rho'_0}} = \sqrt{\beta},
\end{aligned} \tag{21}$$

即式（9）的变换对于任意正实数 α, β, τ 均成立，A系和A'系的物理量之间线性比例关系在演化到任意有限时刻均是能够保证的。

以上讨论了SRMHD方程组中严格适用的标度变换律，即在变换过程中速度的变换因子应当保持不变，而密度和长度等因子可以自由选定，满足变换律的初值对应关系能够跟随时间演化而保持住。

尽管之前讨论过SRMHD方程组的解是适定的，其解严格存在、唯一、连续依赖初值，但SRMHD方程组又是混沌的，其解虽然与初值是连续关联，但该函数随时间的演化是指数放大的，在长时间的演化下仍是不可预测的。对MHD的模拟表明，湍流系统仅需~10个李雅普诺夫时间便会产生不可忽视的差别^[27]。这意味着如果实验室场景和天文场景并非严格对应，即便是一阶无穷小的差距在数ps（基于常见激光实验室环境下的李雅普诺夫时间）左右也会产生不可忽视的影响。这个结论很大程度上限制了实验室的应用场景，需要在实验设计中审慎考虑适用环境。但也没必要在整个过程中严格拟合，仅需保证关心的物理现象在特定窗口期满足洛伦兹因子相似即可，可以采用分段标度等方法进行实验设计。

Ryutov等人建立的非相对论标度理论是本文结论在低速低磁极限下的自然退化，当洛伦兹因子趋近于1时，速度变换因子取1的条件自动满足，本文框架与非相对论理论完全兼容。以上推导均不仅局限于实验室环境，在数值计算模拟环境中依然成立。而当广义相对论环境下时，除了洛伦兹因子之外，度规的复杂变化也会造成方程失去同宿性，并且随着方程非齐次项变多，相同初始条件下混沌性也会增强，即便初始条件存在相似性随着演化依然可能偏差越来越大，广义相对

论下的标度变换需要更审慎的处理。此外，实验室环境实现广义相对论情形相对困难，仍需技术手段的增强。

4 实验室模拟相对论级别天体环境的讨论

根据第 3 节推导的 SRMHD 标度律，实验室系统与天体系统之间保持相似性的核心条件是洛伦兹因子严格相等，这意味着，要利用实验室等离子体流模拟某一天体现象，首要条件是实验室系统能够产生与目标天体相同 γ 值的等离子体。

目前，实验室产生高能粒子束的主要手段包括 Z 箍缩加速、激光驱动加速以及传统加速器等。其中，Z 箍缩装置的加速能力相对有限，传统加速器基于射频腔加速机制，其物理描述通常不适用于磁流体力学框架。相较之下，激光等离子体加速因其特有的超高加速梯度及与实验室天体物理环境的相似性，在相关研究中展现出独特优势。过去二十年间，超短超强激光驱动的粒子加速研究在理论与实验方面均取得显著进展^[56]，目前实验上已能够实现电子的强相对论性加速及质子的弱相对论性加速。若要模拟天体物理环境中离子处于强相对论性状态的情形，仍有赖于下一代艾瓦级激光装置的突破。

图 1 汇总了部分实验测量及理论模拟给出的激光功率与粒子最终洛伦兹因子之间的关系。其中，黄色圆点表示电子实验数据，红色方点表示离子实验数据，绿色菱形表示质子的理论模拟结果，橙色直线代表基于现有理论框架的标度预测，蓝色三角则标示了不同相对论级别天体环境下，为实现特定相对论因子所需达到的激光功率水平。从图中可以看出，同等的激光功率下电子加速更为明显，已经达到天文中长 GRB 喷流的要求，而想要让离子也达到相应的速度，则要求激光功率密度达到至少约 10^{24} W/cm^2 ，其他喷流所对需的激光功率密度要求也可以从拟合直线中得到。值得强调的是，本文图 1 中展示的是激光功率与最终粒子能量

的关系，而达到相应激光功率仅是实现标度变换的必要条件（最低能量阈值）。而要将这些高能粒子近似为一团满足 SRMHD 方程组描述的相对论流体，仍需判断局域等离子体环境是否满足包括无非热粒子等理想磁流体判据，进而审慎地使用 SRMHD 标度变换。

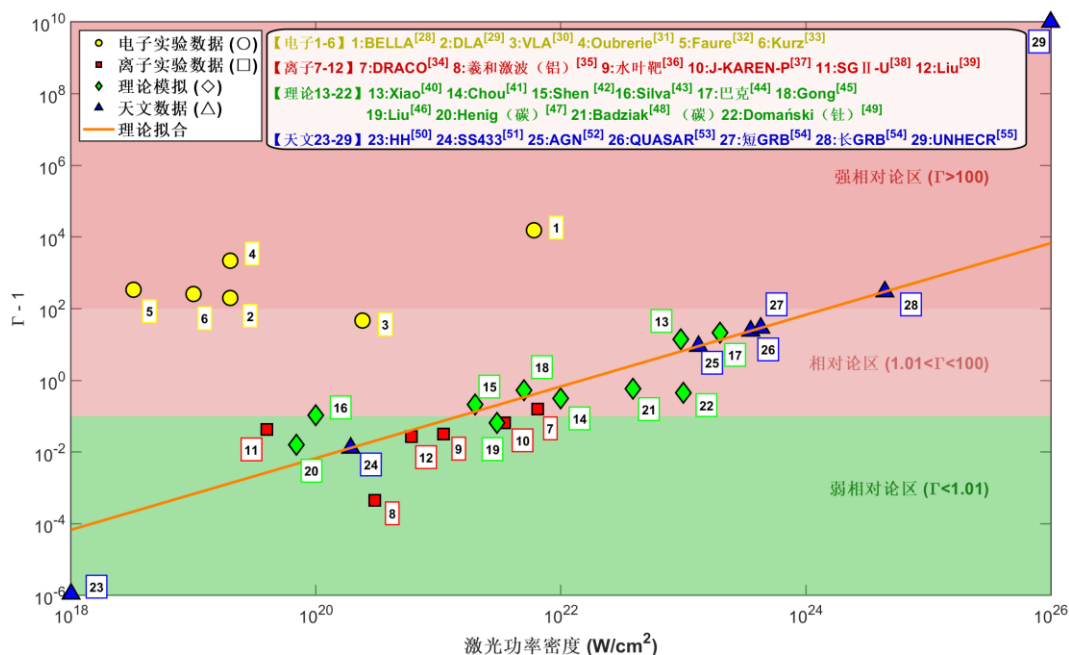


图 1 激光功率和最终相对论因子的关系。黄色圆圈表示电子实验数据，红色方形表示离子实验数据，绿色菱形表示离子的理论模拟数据，橙色直线表示理论预测，蓝色三角表示天文数据在理论预测下实现需要的激光功率。

Fig. 1. The relationship between laser power density and the final relativistic factor.

Yellow circles represent electron experimental data, red squares represent ion experimental data, green diamonds represent proton theoretical simulation data, orange line represent theoretical predictions, and blue triangles represent the laser power required for astronomical data to achieve under theoretical predictions.

5 结论

本文从实验室天体物理的核心方法问题出发，系统研究了狭义相对论框架下磁流体力学系统的标度变换理论，获得了以下主要结论：

狭义相对论磁流体力学方程组中标度变换的核心约束来自光速作为普通常数的存在。光速必须在变换前后保持数值不变，这一要求从根本上限制了变换的自由度。具体而言，通过将‘abc’变换形式代入相对论磁流体力学方程组并进行系统

分析发现：状态方程和磁感应方程对标度变换具有良好的适应性，但连续性方程、动量方程和能量方程中存在包含洛伦兹因子的非线性项，破坏了方程整体的同宿性。解决上述问题的关键在于要求速度变换因子取为 1，即实验室尺度与天体尺度中的洛伦兹因子在变换前后严格相等。在此条件下，相对论磁流体力学方程组在标度变换后仍能保持形式不变，且空间、密度等物理量的变换因子可自由选取。这一结果表明，相对论标度变换的核心在于相对论因子这一无量纲特征量的保持。此外，Ryutov 等人建立的非相对论标度理论^[12,13]是本文结论在低速极限下的自然退化——当洛伦兹因子趋近于 1 时，速度变换因子取 1 的条件自动满足，本文框架与非相对论理论完全兼容。

本文的研究为实验室天体物理中强相对论现象的实验模拟提供了明确的理论指导：实验设计需确保产生的等离子体具有与天体目标相同的洛伦兹因子，而非随意变换速度量级。需要指出的是，本文的理论推导基于平直时空的狭义相对论框架。当系统进入广义相对论领域（如黑洞吸积流、中子星并合抛射物）时，度规的时空变化将引入额外的非齐次项，会进一步破坏方程的标度不变性，此时需发展更复杂的处理方法，这将是下一步的研究方向。同时，本文还通过理论拟合激光功率密度和最终得到离子速度关系，给出了研究不同相对论级别天体现象所需要的激光功率密度预测。

总之，本文建立的狭义相对论磁流体标度变换律，填补了实验室天体物理从非相对论向相对论领域拓展的理论空白，为下一代高功率激光装置上开展强相对论天体现象的实验室模拟提供了基础支撑。

参考文献

- [1] Zhang J, Zhao G 2000 *Physics* **29** 363 (in Chinese) [张杰, 赵刚 2000 物理 **29** 363]
- [2] Moses E I 2012 *Fusion Sci. Technol.* **61** 3
- [3] Neauport J, Airiau J P, Beck N, Belon N, Bordenave E, Bouillet S, Chanal M, Chappuis C, Coic H, Courchinoux R, Denis V, Gaudfrin F, Gaudfrin K, Gendeau P, Heymans L, Julien X, Lacombe C, Lamy M, Lebeaux D, Luttmann M, Modelin P, Perrin A, Ribeyre X, Rouyer C, Tournemene F, Valla D, Vermersch S 2024 *Appl. Opt.* **63** 4447
- [4] Zhu J Q, Chen S H, Zheng Y X, Huang G L, Liu R H, Tang X Z, Zhang M K, Xu Z H, Shen L Q, Chen Q H, Peng Z Y, Zhu B Q, Zhu Q C, Tang Y X, Zhang W Q, Tang F L, Liu F Q, Mao C S, Zhu J, Ma W X, Li X C, Yang L, Wang S S, Yang Y, Cai X J, Lin Z Q, Fan D Y, Wang S J, Gu Y, Deng X M 2019 *Chin. J. Lasers* **46** 0100002 (in Chinese) [朱健强, 陈绍和, 郑玉霞, 黄关龙, 刘仁红, 唐贤忠, 张明科, 徐振华, 沈丽青, 陈庆浩, 彭增云, 朱宝强, 竺庆春, 唐永兴, 张伟清, 唐福林, 刘凤翹, 毛楚生, 朱俭, 马伟新, 李学春, 杨琳, 王树森, 杨义, 蔡希洁, 林尊琪, 范滇元, 王世绩, 顾援, 邓锡铭 2019 中国激光 **46** 0100002]
- [5] Deng X W 2017 *Science & Technology Review of China Academy of Engineering Physics* **1** 137 (in Chinese) [邓学伟 2017 中国工程物理研究院科技年报 **1** 137]
- [6] Wang W T, Feng K, Ke L T, Yu C H, Xu Y, Qi R, Chen Y, Qin Z Y, Zhang Z J, Fang M, Liu J Q, Jiang K N, Wang H, Wang C, Yang X J, Wu F X, Leng Y X, Liu J S, Li R X, Xu Z Z 2021 *Nature* **595** 516
- [7] Tong B W, Zhong J Y 2018 *Physics* **47** 642 (in Chinese) [仝博伟, 仲佳勇 2018 物理 **47** 642]
- [8] Lu X M, Liang X Y, Leng Y X, Wang W Y, Wang C, Yin D J, Lu H H, Li R X, Xu Z Z. 2010 *Chin. Opt. Lett.* **8** 1008
- [9] Pei X X, Zhong J Y, Zhang K, Zheng W D, Liang G Y, Wang F L, Li Y T, Zhao G 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 145201 (in Chinese) [裴晓星, 仲佳勇, 张凯, 郑无敌, 梁贵云, 王菲鹿, 李玉同, 赵刚 2014 物理学报 **63** 145201]
- [10] Li C K, Tzeferacos P, Lamb D, Gregori G, Norreys P A, Rosenberg M J, Follett R K, Froula D H, Koenig M, Seguin F H, Frenje J A, Rinderknecht H G, Sio H, Zylstra A B, Petrasso R D, Amendt P A, Park H S, Remington B A, Ryutov D D, Wilks S C, Betti R, Frank A, Hu S X, Sangster T C, Hartigan P, Drake R P, Kuranz C C, Lebedev S V, Woolsey N C 2016 *Nat. Commun.* **7** 13081
- [11] Xing C Q, Zhong J Y, Tang P F, Zhao X, Zhang Z, Sun W, Yuan D W, Wei H G, Han B, Lei Z,

- Liu H Y, Xiong J, Zhang Y H, Cheng L, Dong Y F, Wang J Z, Zhang Z M, Teng J, An W M, Ping Y L, Qiao B, Zhou W M, Zhu J Q, Zhao G, Zhang J 2024 *Plasma Phys. Control. Fusion* **66** 035007
- [12] Ryutov D D, Drake R P, Kane J, Liang E, Remington B A, Wood-Vasey W M 1999 *Astrophys. J.* **518** 821
- [13] Ryutov D D, Remington B A 2002 *Plasma Phys. Control. Fusion* **44** B407
- [14] Pe'er A 2025 *Galaxies* **13** 2
- [15] Kovalev Y Y, Pushkarev A B, Gómez J L, Homan D C, Lister M L, Livingston J D, Pashchenko I N, Plavin A V, Savolainen T, Troitsky S V 2025 *Astron. Astrophys.* **700** L12
- [16] Matthews J H, Bell A R, Blundell K M 2020 *New Astron. Rev.* **89** 101543
- [17] Bromberg O, Tchekhovskoy A, Gottlieb O, Nakar E, Piran T 2018 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **475** 2971
- [18] Romani R W, Deller A, Guillemot L, Ding H, Vries M, Parker C, Zavala R T, Chalumeau A, Cognard I 2022 *Astrophys. J.* **930** 101
- [19] Hernandez J, Kovtun P 2017 *J. High Energ. Phys.* **2017** 1
- [20] Duez M D, Liu Y T, Shapiro S L, Stephens B C 2005 *Phys. Rev. D* **72** 024028
- [21] Pu S, Huang X G 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 071202 (in Chinese) [浦实, 黄旭光 2023 物理学报 **72** 071202]
- [22] Font J A 2008 *Living Rev. Relativ.* **11** 7
- [23] Gammie C F, McKinney J C, Tóth G 2003 *Astrophys. J.* **589** 444
- [24] Qamar S, Ahmed S 2013 *Comput. Phys. Commun.* **184** 1094
- [25] Zhong J Y, An W M, Ping Y L, Han B, Tang P F, Yuan X X, Sun W, Xing C Q, Zhang Q, Wang J Z, Gao W J, Yu J C, Liu Z D, Yue S F 2020 *High Power Laser Part. Beams* **32** 092003 (in Chinese) [仲佳勇, 安维明, 平永利, 韩波, 汤鹏飞, 原晓霞, 孙伟, 邢纯青, 张茜, 王荐钊, 高炜佳, 于家成, 刘正东, 岳树峰 2020 强激光与粒子束 **32** 092003]
- [26] Anile A M 2005 *Relativistic fluids and magneto-fluids* (Cambridge: Cambridge University Press) pp. 4–56
- [27] Zienicke E, Politano H, Pouquet A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 4640
- [28] Gonsalves A J, Nakamura K, Daniels J, Benedetti C, Pieronek C, de Raadt T C H, Steinke S, Bin J H, Bulanov S S, van Tilborg J, Geddes C G R, Schroeder C B, Tóth C, Esarey E, Swanson K, Fan-Chiang L, Bagdasarov G, Bobrova N, Gasilov V, Korn G, Satorov P, Leemans W P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 084801

- [29] Rosmej O N, Gyrdymov M, Andreev N E, Tavana P, Popov V, Borisenko N G, Gromov A I, Gus'kov S Y, Yakhin R, Vegunova G A, Bukharskii N, Korneev P, Cikhardt J, Zähler S, Busch S, Jacoby J, Pimenov V G, Spielmann C, Pukhov A 2025 *High Power Laser Sci. Eng.* **13** e3
- [30] Andres A, Bhadoria S, Marmolejo J T, Muschet A, Fischer P, Barzegar H R, Blackburn T, Gonoskov A, Hanstorp D, Marklund M, Veisz L 2024 *Commun. Phys.* **7** 293
- [31] Oubriere K, Leblanc A, Kononenko O, Lahaye R, Andriyash I A, Gautier J, Goddet J P, Martelli L, Tafzi A, Ta Phuoc K, Smartsev S, Thauray C 2022 *Light Sci. Appl.* **11** 180
- [32] Faure J, Glinec Y, Pukhov A, Kiselev S, Gordienko S, Lefebvre E, Rousseau J P, Burgy F, Malka V 2004 *Nature* **431** 541
- [33] Kurz T, Heinemann T, Gilljohann M F, Chang Y Y, Couperus Cabadağ J P, Debus A, Kononenko O, Pausch R, Schöbel S, Assmann R W, Bussmann M, Ding H, Götzfried J, Köhler A, Raj G, Schindler S, Steiniger K, Zarini O, Corde S, Döpp A, Hidding B, Karsch S, Schramm U, Martinez de la Ossa A, Irman A 2021 *Nat. Commun.* **12** 2895
- [34] Ziegler T, Göthel I, Assenbaum S, Bernert C, Brack F E, Cowan T E, Dover N P, Gaus L, Kluge T, Kraft S, Kroll F, Metzkes-Ng J, Nishiuchi M, Prencipe I, Püschel T, Rehwald M, Reimold M, Schlenvoigt H P, Umlandt M E P, Vescovi M, Schramm U, Zeil K 2024 *Nat. Phys.* **20** 1211
- [35] Bai Y F, Zhang D D, Zeng Y S, Mao J K, Song L W, Tian Y, Li R X 2025 *Nat. Commun.* **16** 3770
- [36] He L R, Bachhammer M, Balling F, Biswas S, Doyle L, Gerlach S, Hofrichter I, Kharbedia M, Liese J, De Marco M, Pohle T, Präßelsperger A, Schmidt A K, Schweiger F, Kling M F, Karsch S, Schreiber J 2025 *Phys. Rev. Res.* **7** 023190
- [37] Dover N P, Ziegler T, Assenbaum S, Bernert C, Bock S, Brack F E, Cowan T E, Ditter E J, Garten M, Gaus L, Goethel I, Hicks G S, Kiriya H, Kluge T, Koga J K, Kon A, Kondo K, Kraft S, Kroll F, Lowe H F, Metzkes-Ng J, Miyatake T, Najmudin Z, Püschel T, Rehwald M, Reimold M, Sakaki H, Schlenvoigt H P, Shiokawa K, Umlandt M E P, Schramm U, Zeil K, Nishiuchi M 2023 *Light Sci. Appl.* **12** 71
- [38] He S K, Qi W, Jiao J L, Dong K G, Deng Z G, Teng J, Zhang B, Zhang Z M, Hong W, Zhang H, Shen B F, Gu Y Q 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 225202 (in Chinese) [贺书凯, 齐伟, 矫金龙, 董克攻, 邓志刚, 滕建, 张博, 张智猛, 洪伟, 张辉, 沈百飞, 谷渝秋 2018 物理学报 **67** 225202]
- [39] Liu Z, Zhao M K, Zhuang J Z, Peng W J, Sun H F, Chen X, Zhang Y, Zheng Y F, Shao Y C,

- Xu Y, Leng Y X, Bin J H, Li R X 2025 *Phys. Plasmas* **32** 033106
- [40] Xiao T, Zhang X M, Kong F Q, Zheng X L, Gong Z, Shen B F 2025 *Adv. Sci.* **12** e03538
- [41] Chou H G J, Grassi A, Glenzer S H, Fiuza F 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** L022056
- [42] Shen X F, Qiao B, Pukhov A, Kar S, Zhu S P, Borghesi M, He X T 2021 *Phys. Rev. E* **104** 025210
- [43] Silva L O, Marti M, Davies J R, Fonseca R A, Ren C, Tsung F S, Mori W B 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 015002
- [44] Bake M A, Aimidula A, Zakir A 2016 *High Power Laser Part. Beams* **28** 112003
- [45] Gong Z, Shou Y R, Tang Y H, Yan X Q 2020 *Phys. Rev. E* **102** 053212
- [46] Liu Z P, Mei Z S, Kong D F, Pan Z, Xu S R, Gao Y, Shou Y R, Wang P J, Cao Z X, Liang Y L, Peng Z Y, Zhao J R, Chen S Y, Song T, Chen X, Xu T Q, Yan X Q, Ma W J 2023 *High Power Laser Sci. Eng.* **11** e51
- [47] Henig A, Kiefer D, Markey K, Gautier D C, Flippo K A, Letzring S, Johnson R P, Shimada T, Yin L, Albright B J, Bowers K J, Fernández J C, Rykovanov S G, Wu H C, Zepf M, Jung D, Liechtenstein V K, Schreiber J, Habs D, Hegelich B M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 045002
- [48] Badziak J, Domański J 2021 *Plasma Phys. Control. Fusion* **63** 055005
- [49] Domański J, Badziak J, Marchwiany M 2018 *Laser Part. Beams* **36** 507
- [50] Reipurth B, Bally J 2001 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **39** 403
- [51] Abell G O, Margon B 1979 *Nature* **279** 701
- [52] Vuillaume T, Henri G, Petrucci P O 2015 *Astron. Astrophys.* **581** A18
- [53] Urry C M, Padovani P 1995 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **107** 803
- [54] Nakar E 2007 *Phys. Rep.* **442** 166
- [55] Bird D J, Corbató S C, Dai H Y, Elbert J W, Green K D, Huang M A, Kieda D B, Ko S, Larsen C G, Loh E C, Luo M Z, Salamon M H, Smith J D, Sokolsky P, Sommers P, Tang J K K, Thomas S B 1995 *Astrophys. J.* **441** 144
- [56] Ma W J, Liu Z P, Wang P J, Zhao J R, Yan X Q 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 084102 (in Chinese)
- [马文君, 刘志鹏, 王鹏杰, 赵家瑞, 颜学庆 2021 物理学报 **70** 084102]

Scaling Laws for Relativistic Magnetohydrodynamic Equations in Laboratory Astrophysics

MA Zuo-Lin 1)2), LI Chao-Bo 1)2), PING Yong-Li 2)3), ZHONG Jia-Yong1)†)2)3)

1) (School of Physics and Astronomy, Beijing Normal University, Beijing, 100875, China)

2) (Department of Physics, Faculty of Arts and Sciences, Beijing Normal University, Zhuhai, 519087
China)

3) (Institute for Frontiers in Astronomy and Astrophysics, Beijing Normal University, Beijing 100875,
China)

Abstract

In laboratory astrophysics, scaling laws serve as a crucial theoretical bridge that connects plasma dynamics at laboratory scales with astrophysical phenomena. Existing scaling relations are primarily formulated within the framework of non-relativistic ideal magnetohydrodynamics, which assumes that flow velocities are much smaller than the speed of light. However, many astrophysical processes involve relativistic or even ultra-relativistic motion, in which case non-relativistic scaling relations are no longer applicable. Therefore, developing scaling laws valid in the relativistic regime is of both fundamental and practical importance.

In this work, we systematically derive the scaling properties of the equations of ideal special relativistic magnetohydrodynamics (SRMHD) within the framework of special relativity. By applying conventional scaling transformations to the SRMHD system, we find that: (1) the invariance of the speed of light under scale transformations imposes a strict constraint on velocity scaling, requiring the velocity scaling factor to be unity. (2) Consequently, the Lorentz factor must remain strictly invariant between laboratory and astrophysical systems, forming the central constraint of relativistic scaling. (3) With the velocity scaling fixed, the remaining physical quantities, including length, time, density, and magnetic field can still be freely rescaled under dimensional consistency. (4) Since the SRMHD equations constitute a well-posed system of hyperbolic partial differential equations, possessing existence, uniqueness, and continuous

dependence on initial data, this provides a theoretical foundation for applying the scaling laws to time-dependent problems.

In addition, based on existing experimental and theoretical analyses, we provide fitted scaling curves relating laser power density to the resulting plasma Lorentz factor. Several representative astrophysical phenomena are also marked on these curves, offering a direct mapping between laboratory-accessible laser conditions and relativistic astrophysical regimes. These results provide quantitative predictions for the laser power density required to reproduce astrophysical processes with different Lorentz factors in laboratory settings, thereby offering practical guidance for the design and interpretation of high energy density experiments.

By extending scaling laws from the non-relativistic to the relativistic regime, this work fills a key gap in the theoretical framework of laboratory astrophysics. The results not only clarify the fundamental constraints imposed by special relativity on scale transformations, but also provide quantitative estimates for the laser power required to simulate relativistic astrophysical phenomena in the laboratory. These findings are expected to offer important theoretical guidance for future high energy density experiments and the design of next generation high power laser facilities, thereby advancing the development of laboratory astrophysics.

Keywords: laboratory astrophysics, scaling law, special relativity, magnetohydrodynamics

* This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12325305, 12135001) and the National Key RD Program of China (Grant Nos. 2022YFA1603200 and 2022YFA1603203)

† Corresponding jyzhong@bnu.edu.cn
The first author. 202331160006@mail.bnu.edu.cn