

# 相对论椭圆拉盖尔-高斯涡旋激光束在低密等离子体中 成丝不稳定性研究\*

梁适<sup>2)</sup> 周沧涛<sup>1) 2) 3) †</sup>

- 1) (深圳市超强激光与先进材料技术重点实验室, 深圳, 518118)
- 2) (深圳技术大学工程物理学院, 深圳, 518118)
- 3) (深圳技术大学超强激光应用技术研究中心, 深圳, 518118)

本工作利用相对论非线性薛定谔方程, 详细研究了椭圆相对论拉盖尔高斯激光束在低密等离子体中的传播特征。模拟发现, 当激光入射功率低于自聚焦临界功率时, 光斑在等离子体中旋转一定角度后, 逐渐演化成涡旋厄米高斯光束; 当入射功率略高于自聚焦功率时, 光束最终在长轴两侧各形成一束成丝光束; 当激光入射功率远高于自聚焦临界功率时, 椭圆光斑的对称性破缺, 等离子体折射率梯度指向椭圆光斑的长轴两侧, 使得光斑能量在自聚焦后向光斑长轴两侧转移, 成丝光束更多地分布在长轴两侧, 同时光丝束相互合并。此外, 我们给出了激光束自聚焦临界功率表达式, 研究表明当激光束瑞利长度大于达到自聚焦峰值距离时, 模拟得到的成丝数目与理论预测一致。

**关键词:** 椭圆拉盖尔-高斯涡旋激光束, 低密等离子体, 成丝不稳定性

**PACS:** 42. 65. -k, 42. 65. Jx, 42. 65. Sf

**基金:** 深圳市重点实验室(批准号: ZDSYS20200811143600001), 国家自然科学基金(批准号: 12235014)资助的课题。

#同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: [zcangtao@sztu.edu.cn](mailto:zcangtao@sztu.edu.cn)

第一作者. E-mail: [2400261007@stumail.sztu.edu.cn](mailto:2400261007@stumail.sztu.edu.cn)

# 1 引言

相对论强度的短脉冲激光与等离子体相互作用在诸多领域中存在广泛应用，例如惯性约束聚变快点火、激光驱动新型粒子源、反物质产生等<sup>[1-7]</sup>。在这些应用场景中，激光不可避免地需要穿过由激光预脉冲产生的低密度等离子体区域，研究表明<sup>[8-13]</sup>，高斯焦斑的激光束在低密度等离子体传播时，可诱发丝状化和水流管等非线性不稳定性。当入射激光束功率高于临界功率时，激光自聚焦达到极限时，光斑由于衍射效应形成衍射环，由于方位角调制不稳定性导致衍射环破裂成细丝。另一方面，研究发现<sup>[12]</sup>椭圆高斯激光在等离子体中经历各向异性的自聚焦和衍射过程，不稳定衍射环得到抑制，激光大部分能量集中在中心区域。

随着超强激光调制技术的发展，携带有限轨道角动量的拉盖尔高斯（Laguerre-Gaussian, LG）涡旋激光束与等离子体的相互作用引发广泛关注。因其具有螺旋相位和光学奇点，LG 激光在粒子俘获、光通信和等离子体等多个领域得到广泛应用<sup>[14-20]</sup>。当 LG 激光在低密度等离子体传播时，由于光学奇点的存在，环形 LG 光束在自聚焦的过程中被压缩达到极限后，破裂形成细丝，光丝的分布呈现圆环状<sup>[21-25]</sup>。

相对论涡旋光束可采用透射螺旋等离子体相位板、等离子体反射光扇法、背向拉曼放大等技术获得<sup>[26-31]</sup>，以往，人们经常采用圆形焦斑的相对论涡旋光与等离子体相互作用研究光束的传播特征、以及新型粒子源产生等问题。但注意实验上测量到的激光光斑一般不是严格的圆形，而是具有一定椭圆度。

基于实验测量到的椭圆光束特征，本工作利用相对论非线性薛定谔方程，首次详细研究了椭圆相对论拉盖尔-高斯激光束在低密等离子体中的传播特征，发现激光在等离子体中传播时，在三个激光入射功率区域显现完成不同的特征。为实际中用标准圆形拉盖尔高斯光束模型无法解释的实验现象提供了理论依据与思路，对现象分析和实际应用有重要意义。本文结构如下：第二部分给出了最大成丝数目理论估算表达式，第三部分详细模拟研究了不同激光入射功率情况下椭圆 LG 光束在低密度等离子体中的传播特征，并将模拟所观察到的最大成丝束数目与理论预测进行了对比，最后部分给出了本工作的简单总结与展望。

## 2 调制不稳定性和最大成丝数目估算

考虑相对论效应和激光有质动力，在激光群速度的运动坐标系中，相对论激光在低密度等离子体中传播满足的缓变包络振幅方程可表述为<sup>[25]</sup>

$$2ik_L \frac{\partial a}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 a + k_p^2 \left(1 - \frac{n}{\gamma}\right) a = 0 \quad (1)$$

其中 $z$ 是激光的传播方向， $a$ 表示激光束归一化振幅， $k_L$ 是激光的波数， $k_p = \omega_p/c$ 是等离子体的波数， $\omega_p = \sqrt{(e^2 n_{e0}/\epsilon_0 m_e)}$ 为等离子体的角频率， $c$ 为真空中的光速， $e$ 和 $m_e$ 为电子的电荷和密度， $n_{e0}$ 为初始电子密度， $n_e$ 为电子密度， $n = n_e/n_{e0}$ 为归一化的电子密度， $\epsilon_0$ 为真空介电常数， $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为 $(x, y)$ 平面上的拉普拉斯算子， $\gamma = \sqrt{1 + |a|^2}$ 为洛伦兹因子。归一化电子密度 $n = 1 + k_p^{-2} \nabla_{\perp}^2 (\gamma + \alpha \ln n)$ 必须为非零， $\alpha = T_e/m_e c^2$ 为归一化电子温度， $T_e$ 为电子温度，上述方程对电子温度 $\alpha \ll 1$ 成立，即电子的热运动应该是非相对论。

众所周知，LG激光在真空中的拉盖尔-高斯 $TEM_{p,l}$ 模式满足亥姆霍兹方程解，考虑径向指数 $p = 0$ 和拓扑荷 $l = m$ ，激光束的初始轮廓可表示为

$$a(r, \theta, 0) = a_0 \sqrt{\frac{1}{m!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \exp(im\theta) \quad (2)$$

这里 $a_0$ 和 $w_0$ 分别表示初始的归一化电场振幅和激光束腰， $m$ 为光学涡旋光束的拓扑荷数， $\theta$ 是相位角，范围为0到 $2\pi$ 。当 $p = 0$ ， $m = 0$ 时，它退化为普通的高斯光束，而高斯激光的临界自聚焦功率是 $P_{cr} \approx 17.47(n_c/n_{e0})GW$ <sup>[12]</sup>。对于LG激光，自聚焦的临界功率 $P_{crm}(m)$ 随着拓扑荷数的增加而增大，可以使用近似公式 $P_{crm} = (4m\sqrt{3}/1.86)P_{cr}$ 进行计算<sup>[25]</sup>。

LG激光的成丝模式源于其环形结构上的方位角调制不稳定性。假设环形光束 $a_s(r, \theta, z)$ 是方程(1)的定态解，为方便处理，将光束看成无厚度的圆环，取光强为最大值所对应光环的振幅为 $a_m = \frac{1}{\sqrt{m!}} m^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{m}{2}}$ ，圆环的半径近似为 $r_m = \sqrt{\frac{m}{2}} w_0$ ，此时，横向拉普拉斯算子可以简化为 $\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r_m^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 。考虑环形结构的微小方位角扰动为 $\delta a(r, \theta, z)$ ，此时激光包络振幅表达式就可以写成

$$a = a_s(r, \theta, z) + \delta a(r, \theta, z) \quad (3)$$

假设微扰的形式为

$$\delta a = \delta \exp(i\lambda z) \exp(iN\theta) \quad (4)$$

其中 $N$ 表示扰动的方位角数。将方程（3）和（4）代入方程（1）中，进行微扰分析，就可以得到扰动的特征值方程，从而得到最不稳定模的增长率

$$\Gamma = \frac{1}{2k_L} \frac{N}{r_m} \sqrt{k_p^2 (1 + \gamma_0 f) \frac{a_m}{\gamma_0^3} - \left(\frac{N}{r_m}\right)^2} \quad (5)$$

其中 $\gamma_0 = \sqrt{1 + a_m^2}$ ， $f = \frac{\left(\frac{N}{r_m}\right)^2}{k_p^2 + \alpha \left(\frac{N}{r_m}\right)^2}$ ，对于冷等离子体 $\alpha = 0$ ，最大的成丝数目可以估算为

$$N_{max} \approx r_m k_p \frac{a_m}{\sqrt{\gamma_0}} \quad (6)$$

而对于椭圆 LG 激光，可以将其看成形变后的圆环形状，所以我们通过对弧长进行积分平均，得到一个等效圆模型。于是我们可以对 $\nabla_{\perp}^2 \delta a$ 进行修正

$$\overline{\nabla_{\perp}^2 \delta a} = \frac{\int \nabla_{\perp}^2 \delta a ds}{\int ds} = -\frac{N^2 K(e)}{r_m^2 E(e)} \quad (7)$$

其中 $s$ 为弧长， $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$ 。修正后可以得到一个椭圆 LG 激光成丝的等效圆模型，同样用

方位角调制不稳定性来描述，此时（6）式中 $r_m = \sqrt{\frac{E(e)}{K(e)}} \frac{m}{2} w_0$ ，这样其临界功率可以修正为 $P_{crmh} =$

$\frac{E(e)}{K(e)} P_{crm}$ ，其中 $K(e) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}}$ 和 $E(e) = \int 1 - e^2 \sin^2 \theta d\theta$ ，分别为第一类和第二类椭圆积分，

$e = 1 - \frac{1}{h^2}$ 为椭圆的离心率， $h$ 是长短轴的比。当 $e \rightarrow 0$ 时， $\frac{E(e)}{K(e)} \rightarrow 1$ ，当 $e < 1$ 时， $0 < \frac{E(e)}{K(e)} < 1$ 。可以

看出，由于对称性破缺，修正的临界功率表明椭圆 LG 激光的自聚焦临界功率小于 LG 激光，

符合文献预测<sup>[24]</sup>。此时激光第一次自聚焦到达最高值的距离可估算为  $z_f = z_R /$

$\sqrt{(P / P_{crmh}) - 1}$ ，其中  $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$  是瑞利长度， $\lambda$  是激光器的中心波长。

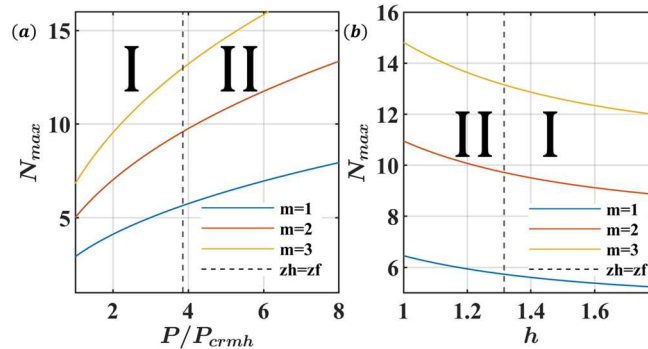


图 1 不同激光的入射功率和椭圆度对应的成丝数目图 (a) 同一椭圆度  $h = 1.3$  时, 不同的拓扑荷数  $m$  的椭圆 LG 激光束的最大成丝数  $N_{max}$  与入射功率  $P/P_{crmh}$  对于关系的曲线图。虚线表示  $z_h = z_f$  的分界线。(b) 是当入射功率  $P = 4P_{crmh}$  时, 不同的拓扑荷数  $m$ , 对应的最大成丝数  $N_{max}$  与椭圆度  $h$  的关系图。其余模拟的初始参数为  $w_0 = 10\mu m$ ,  $n_{e0} = 0.2n_c$ ,  $\lambda = 1\mu m$ 。

Fig.1. Number of filaments generated by different laser input powers and ellipticity (a) For the same ellipticity  $h = 1.3$ , the relationship between the maximum filament number  $N_{max}$  and the laser input power  $P/P_{crmh}$  for elliptical LG laser beams with different topological charge numbers  $m$  is plotted. The dashed line indicates the  $z_h = z_f$  boundary. (b) When the laser input power  $P = 4P_{crmh}$ , the relationship between the maximum filament number  $N_{max}$  and ellipticity  $h$  for different topological charge numbers  $m$  is shown. Other simulations parameters are  $w_0 = 10\mu m$ ,  $n_{e0} = 0.2n_c$ ,  $\lambda = 1\mu m$ 。

我们在如图 1 中给出了成丝数目与激光入射功率、椭圆度之间的对应关系。图 1 (a) 表明, 在同一椭圆度下, 随着功率的增加, 最大成丝数目增加, 同时成丝数目也随着拓扑荷  $m$  的增加而增加。图 1 (a) 中的黑色实线给出了  $z_h = z_f$  时所对应的值, 其中  $z_h = \frac{z_R}{h^2}$  是椭圆瑞利长度, 我们随后的研究表明, 当  $z_h < z_f$  时, 即区域 I, 理论预言与数值模拟的结果并不一致, 但当  $z_h > z_f$  时, 即区域 II, 上述理论结果所预言的成丝束数目与数值模拟结果相一致, 这说明上述理论结果仅在激光瑞利长度大于自聚焦长度时成立。

图 1 (b) 表明, 在同级别功率的前提下, 随着椭圆度的增加, 成丝数目下降, 但是下降幅度并不明显。尤其对于低拓扑荷时, 成丝数目基本保持不变。同时成丝数目随着拓扑荷  $m$  的增大而增大。考虑在区域 II 中, 不同的拓扑荷, 以及不同的椭圆度进行模拟预测。当  $m = 1$  时, 椭圆度  $h = 1.1, 1.2, 1.3$  所对应的成丝数目分别为 6, 6, 6。当  $m = 2$  时, 椭圆度  $h = 1.1, 1.2, 1.3$  所对应的成丝数目分别为 11, 10, 10 当  $m = 3$  时, 椭圆度  $h = 1.1, 1.2, 1.3$  所对应的成丝数目分别为 14, 13, 13。这些理论结果

将分别在下面的模拟中得到证实。

### 3 相对论椭圆拉盖尔高斯激光束在低密等离子体中的成丝特征

在椭圆坐标系中,  $x = r \cos \theta, y = r/h \sin \theta, \theta = \tan^{-1} \left( \frac{hy}{x} \right)$ 。对于  $z = 0$  处, 椭圆 LG 激光的初始光斑, 可根据方程 (2) 写为

$$a(x, y; h) = a_0 \sqrt{\frac{1}{m!} \left( \frac{x^2 + h^2 y^2}{w_0^2} \right)^{\frac{m}{2}}} \exp \left( -\frac{x^2 + h^2 y^2}{w_0^2} \right) \exp(im\theta) \quad (8)$$

为了研究椭圆 LG 激光在低密度等离子体中的传播动力学过程, 我们将方程 (8) 为激光的初始条件  $a$  的取值<sup>[12]</sup>, 在数值上求解激光的非线性薛定谔方程 (1)。方程变形为  $\frac{\partial}{\partial z} a = i(\hat{L}a + \hat{N}a)$ , 其中  $\hat{L} = \frac{1}{2k_L} \nabla_{\perp}^2$ , 代表动量作用,  $\hat{N} = \frac{k_p^2}{2k_L} \left( 1 - \frac{n}{\gamma} \right)$ , 代表非线性作用。再在空间横向部分采用快速傅里叶方法, 求解  $\hat{L}a$  和  $\hat{N}a$ 。纵向传播部分, 当传播距离  $\alpha$  很小时, 可以近似  $\alpha = dz$ 。为了保证精度采用四阶龙格库达方法, 带入不同的  $\alpha$  进行求解, 得到传播后的  $a$  值。

首先考虑椭圆 LG 激光入射功率小于自聚焦临界功率情况, 在模拟中, 固定激光初始参量为  $P = 0.5P_{crmh}$ ,  $w_0 = 10\mu m$ ,  $n_{e0} = 0.2n_c$ ,  $\lambda = 1\mu m$ ,  $m = 3$ , 我们考虑三种不同  $h$  情况:  $h = 1.1$  (图 2a, 2d),  $h = 1.6$  (图 2b, 2e),  $h = 5$  (图 2c, 2f)。由于入射功率未达到自聚焦的阈值, 激光在传播的过程中, 光斑在旋转的同时也向外扩散, 其能量逐渐向椭圆长轴两端聚集。从图 2 中可以看出, 椭圆度的值  $h$  越大, 长轴两端的能量越集中, 对于  $h = 5$  情况, 光斑最终分裂为 4 束独立的光丝。从图 2 (d-f) 的形状来看, 这样的光斑与涡旋厄米高斯 (Hermite Gaussian, HG) 光束相似, 其表达式可写为<sup>[32]</sup>:

$$a(x, y; h) = a_0 i^m \left( \frac{h^2 - 1}{h^2 + 1} \right)^{\frac{m}{2}} H_m \left( \frac{i\sqrt{2}(x + y)}{w_0 \sqrt{h^2 - 1}} \right) \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right) \quad (9)$$

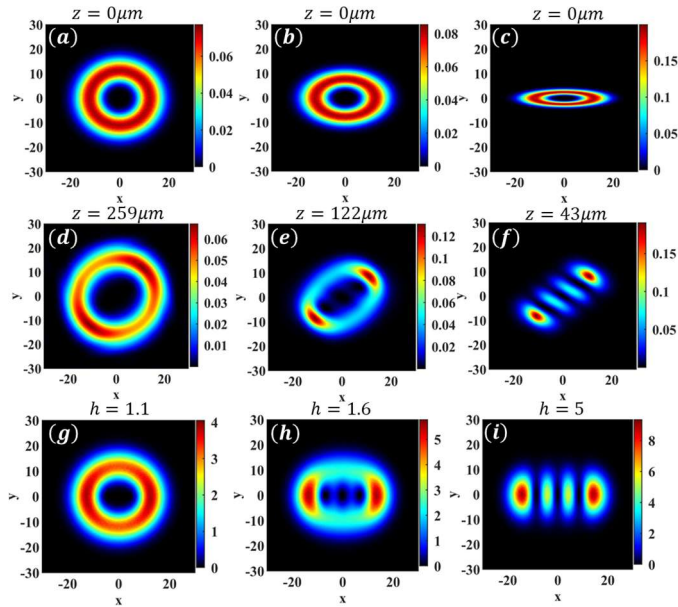


图 2 激光入射功率在自聚焦的临界功率以下时，椭圆涡旋光束向涡旋厄米高斯光束演化的结果，与对应涡旋厄米高斯光束的对比图。其中 (a-f) 是椭圆涡旋光的模式转换示意图，其中 (a, d) 对应的椭圆度是  $h = 1.1$ ，(b, e) 对应的椭圆度是  $h = 1.6$ ，(c, f) 对应的椭圆度是  $h = 5$ 。(g-i) 是对应涡旋厄米高斯光束的初始光斑，参数分别为  $h = 1.1, 1.6, 5$ 。其余模拟的初始参数为  $P = 0.5P_{cr}$ ， $w_0 = 10\mu\text{m}$ ， $n_{e0} = 0.2n_c$ ， $\lambda = 1\mu\text{m}$ ， $m = 3$ 。光斑的光强度单位为  $I = 10^{18}\text{W} / \text{cm}^2$ 。

Fig.2. the evolution of elliptical vortex beams into vortex Hermite Gaussian beams when the laser incident power is below the self-focusing critical power, with comparative plots of the corresponding vortex Hermite Gaussian beams. The schematic diagrams (a-f) illustrate the mode conversion of elliptical vortex beams, where (a, d) correspond to ellipticity  $h = 1.1$ , (b, e) to  $h = 1.6$ , and (c, f) to  $h = 5$ . (g-i) The Initial Spot of the Vortex Hermite Gaussian Beam with Different Ellipticity  $h = 1.1, 1.6, 5$ . Other simulations parameters are  $P = 0.5P_{cr}$ ,  $w_0 = 10\mu\text{m}$ ,  $n_{e0} = 0.2n_c$ ,  $\lambda = 1\mu\text{m}$ ,  $m = 3$ . The unit of light intensity for a spot is  $I = 10^{18}\text{W} / \text{cm}^2$ .

为方便比较起见，我们在图 2 (g-i) 中，分别给出了不同参数  $h = 1.1, 1.6, 5$  所对应的涡旋 HG 光束。从叠加的角度可以认为椭圆 LG 光束是有两个不同束腰的 HG 光束叠加形成。很明显，因为初

始的椭圆 LG 光束并不是非线性薛定谔方程 (1) 的本征态解, 随着激光在低密度等离子体中传播, 光斑在旋转的过程中向涡旋 HG 基态转换, 转换的距离约为椭圆瑞利长度。相比于自由空间中的传播, 转换距离大大缩小。换言之, 厄米高斯光束也可由椭圆 LG 光经过适当密度的等离子体来获得。

我们现在考虑入射功率略高于自聚焦功率情况。图 3 描绘了当入射功率为  $P = 1.1P_{crmh}$  时, 椭圆 LG 激光的拓扑荷数分别为  $m=1,2,3$  的传播特征。结果表明椭圆 LG 激光在具有不同拓扑荷数的情况下, 光束旋转的特性仍可观测到, 但是光束不再分解演化, 而是通过调制不稳定性进行自聚焦。其能量在自聚焦的过程中不断向长轴方向集中。随着拓扑荷的增加, 自聚焦距离长度减少, 能量转移的速度更快, 椭圆 LG 光束均最终在长轴上形成两根向外扩散的光丝, 每根光丝的能量均重复经过自聚焦和自组织过程。

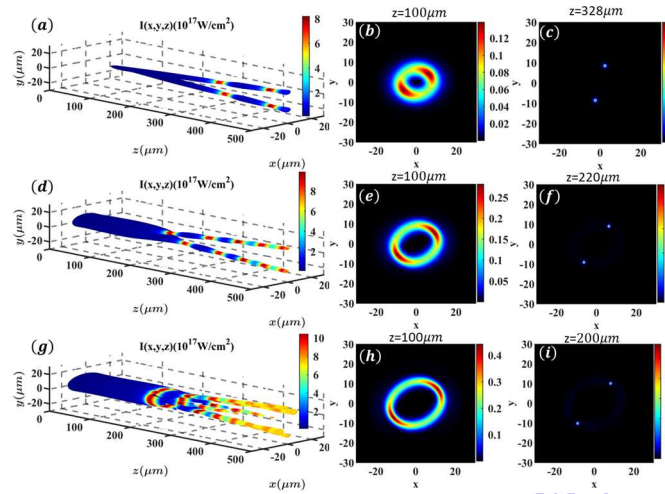


图 3 当入射功率略高于自聚焦功率时, 椭圆 LG 光束在低密度等离子体中的传播示意图。(a-c) 的拓扑荷数是  $m = 1$ 。(b-f) 的拓扑荷数是  $m = 2$ 。(g-i) 的拓扑荷数是  $m = 3$ 。其余初始参数为入射功率  $P = 1.1P_{crmh}$ ,  $w_0 = 10\mu\text{m}$ ,  $n_{e0} = 0.2n_c$ ,  $\lambda = 1\mu\text{m}$ ,  $h = 1.3$ ,  $\delta_{max} = 0.05$ 。光斑的光强强度为  $I = 10^{18} \text{W} / \text{cm}^2$ 。

Fig.3. Schematic diagram of elliptical LG beam propagation in low-density plasma when incident power is slightly higher than self-focusing power. topological charge number (a-c)  $m = 1$ . (b-f)  $m = 2$ . (g-i)  $m = 3$ . Other simulations parameters are  $P = 1.1P_{crmh}$ ,

$w_0 = 10\mu\text{m}$ ,  $n_{e0} = 0.2n_c$ ,  $\lambda = 1\mu\text{m}$ ,  $h = 1.3$ ,  $\delta_{max} = 0.05$ 。The unit of light intensity for a spot is  $I = 10^{18}\text{W} / \text{cm}^2$ 。

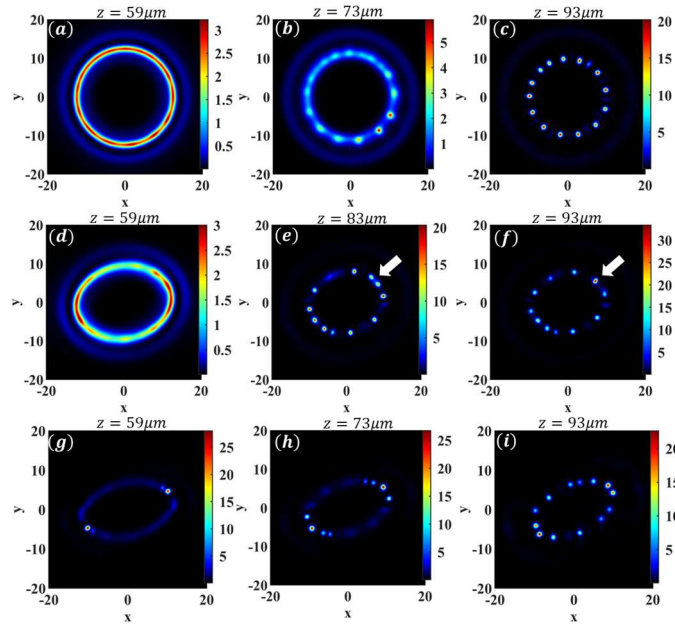


图 4 不同区域的椭圆 LG 涡旋光束成丝模式与涡旋光成丝模式的对比图。(a-c)是 $h = 1$ 的涡旋光束的成丝模式图。(d-f)是 $h = 1.3$ 的椭圆涡旋光束的成丝模式图，位于区域 II。(g-i)是 $h = 1.8$ 的椭圆涡旋光束的成丝模式图，位于区域 I。其余初始参数为 $P = 4P_{crmh}$ ,  $w_0 = 10\mu\text{m}$ ,  $n_{e0} = 0.2n_c$ ,  $\lambda = 1\mu\text{m}$ ,  $m = 3$ ,  $\delta_{max} = 0.05$ 。光斑的光强强度为 $I = 10^{18}\text{W} / \text{cm}^2$ 。

Fig.4. Comparison of filamentation patterns for elliptical LG vortex beams and vortex beams across different regions. (a-c)  $h = 1$ . (d-f)  $h = 1.3$  in Region II (g-i)  $h = 1.8$  in Region I. Other simulations parameters are  $P = 4P_{crmh}$ ,  $w_0 = 10\mu\text{m}$ ,  $n_{e0} = 0.2n_c$ ,  $\lambda = 1\mu\text{m}$ ,  $m = 3$ ,  $\delta_{max} = 0.05$ . The unit of light intensity for a spot is  $I = 10^{18}\text{W} / \text{cm}^2$ 。

随着入射功率的进一步增加，椭圆 LG 激光在低密度等离子体中成丝传播的行为更为复杂。图 4 给出了不同椭圆度的椭圆 LG 光束在低密度等离子体中自聚焦的图像。为比较起见，选取能量转移更明显的拓扑荷 $m = 3$ 的涡旋光束作为展示。图 4 (a-c) 给出了圆形 LG 光束的成丝模式，当 $P = 4P_{crmh}$ 时，由于涡旋光束的中间是相位奇点，激光不能像高斯光束一样聚焦形成焦点。激光在自聚

焦的过程中，环形光束逐渐收缩，随后由于扰动光束开始形成相连的光丝，随着进一步的自聚焦，光环破裂最终形成完全独立的光丝。对比图 4 (a-c) 和图 4 (d-f) (椭圆度  $h = 1.3$ )，椭圆 LG 光束的自聚焦过程与圆形 LG 基本类似。不同点在于椭圆 LG 光束在自聚焦过程中，其光轴旋转一定角度，光斑能量逐渐向长轴两端转移，形成长轴分布密集的非均匀分布，导致长轴上的成丝光斑更快成形。此外，如图 4 (e, f) 中箭头指示的位置可以发现相近的光丝将会合并，最终的成丝束数目为 13 个，这与理论预言 (见图 1a) 完全一致。

椭圆度  $h = 1.8$  对应图 1 (b) 的参数区域 I，此时激光瑞利长度小于激光自聚焦峰值长度。图 4 (g-i) 表明光束在旋转过程中其能量很快地长轴两端转移，并通过自聚焦形成二根很亮的光丝，同时在椭圆环上仍有明显的光强分布，随着激光进一步传播，经过自组织过程后，在椭圆环上形成非均匀光丝强度分布，成丝束数目与理论预言不一致。

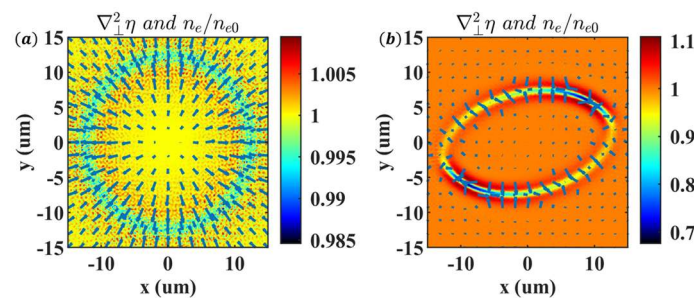


图 5 涡旋光束与椭圆涡旋光束在自聚焦到达一定距离时，等离子体密度和折射率梯度的分布对比图。(a) 是 LG 光束。(b) 是  $h = 1.8$  的椭圆 LG 光束。强度图是归一化的等离子体密度，单位为  $n_{e0} = 0.2n_c$ 。箭头则代表折射率梯度的分布。其余初始参数为  $P = 4P_{c\text{r}mh}$ ， $w_0 = 10\mu\text{m}$ ， $\lambda = 1\mu\text{m}$ ， $m = 3$ ， $\delta_{\text{max}} = 0.05$ 。

Fig. 5. Comparison of plasma density and refractive index gradient distributions for vortex beams and elliptical vortex beams at self-focusing distances. (a) shows the LG beam, (b) elliptical LG beam with  $h = 1.8$ . The intensity map represents normalized plasma density  $n_{e0} = 0.2n_c$ . The arrow represents the distribution of the refractive

index gradient. Other simulations parameters are  $P = 4P_{crmh}$ ,  $w_0 = 10\mu m$ ,  $\lambda = 1\mu m$ ,  $m = 3$ ,  $\delta_{max} = 0.05$ .

为了更清楚地说明椭圆 LG 光束在自聚焦时其光斑能量向长轴两端转移这一过程，我们在图 5 中比较了标准的 LG 光束与椭圆 LG 光束在等离子体中传播时的密度分布和折射率梯度。对于椭圆涡旋光束，其折射率可以用公式  $\eta = \sqrt{1 - n_e / n_c} \gamma$  描述。对于非均匀光斑的折射率梯度，则可以用公式计算<sup>[13]</sup>

$$|\nabla_{\perp} \eta| = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right)^2} \quad (10)$$

很明显，有质动力的存在使得激光在自聚焦时排开电子，形成等离子体密度差，导致折射率差异。折射率的梯度指向反应了等离子体密度的变化过程。对于圆形 LG 激光，折射率梯度具有各向同性，这样激光在自聚焦的过程中，光斑的对称性在自聚焦达到峰值之前仍被保持。但对于椭圆 LG 激光，等离子体折射率梯度明显指向长轴两侧，使自聚焦过程中能量向长轴两侧汇聚，从而形成特殊的成丝模式。

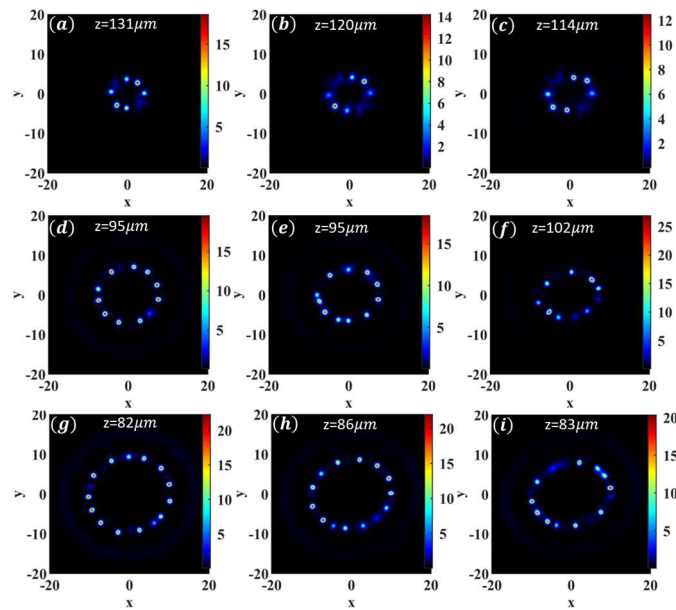


图 6 区域 II 中，不同椭圆度以及不同拓扑荷数的椭圆 LG 涡旋光束的成丝模式对比图。其中 (a-c) 对应的拓扑荷数是  $m = 1$ ，对应的椭圆度分别是  $h = 1.1, 1.2, 1.3$ ，(d-f) 对应的拓扑荷数是  $m = 2$ ，

对应的椭圆度分别是 $h = 1.1, 1.2, 1.3$ , (g-i) 对应的拓扑荷数是 $m = 3$ , 对应的椭圆度分别是 $h = 1.1, 1.2, 1.3$ 。其余初始参数 $P = 4P_{crmh}$ ,  $w_0 = 10\mu m$ ,  $n_{e0} = 0.2n_c$ ,  $\lambda = 1\mu m$ ,  $\delta_{max} = 0.05$ 。光斑的光强强度为 $I = 10^{18} W / cm^2$ 。

Fig. 6. different filamentation patterns of elliptical LG vortex beams with varying ellipticity and topological charge numbers in Region II. (a-c)  $m = 1$ ,  $h = 1.1, 1.2, 1.3$ , (d-f)  $m = 2$ ,  $h = 1.1, 1.2, 1.3$ , (g-i)  $m = 3$ ,  $h = 1.1, 1.2, 1.3$ . Other simulations parameters are  $P = 4P_{crmh}$ ,  $w_0 = 10\mu m$ ,  $n_{e0} = 0.2n_c$ ,  $\lambda = 1\mu m$ ,  $\delta_{max} = 0.05$ . The unit of light intensity for a spot is  $I = 10^{18} W / cm^2$ .

在进一步的研究中，我们详细比较了理论估算与数值模拟所观察到的成丝数目情况。在模拟中，固定入射功率 $P = 4P_{crmh}$ ，比较了 $m = 1, 2, 3$ 三种拓扑荷，并分别选取了不同椭圆度 $h = 1.1, 1.2, 1.3$ （对应图 1 (b) 中的区域 II）。从图 6 中可以看出，对于 $m = 1$ ，椭圆度为 $h = 1.1, 1.2, 1.3$ 椭圆 LG 涡旋光束而言，成丝数目为对于 6, 6, 6。对于 $m = 2$ ，椭圆度为 $h = 1.1, 1.2, 1.3$ 的涡旋光束而言，成丝数目为 11, 10, 10。对于 $m = 3$ ，椭圆度 $h = 1.1, 1.2, 1.3$ 的涡旋光束而言，成丝数目为对于 14, 13, 13。很显然，成丝的数目与理论预测完全一致。

## 4 总结与展望

相对论强度激光在低密度等离子体中的传播特征研究一直是激光等离子体领域中备受关注的课题，高斯光束和圆形焦斑的拉盖尔-高斯涡旋激光束与等离子体相互作用问题已得到了很好的研究。但是从实验上看，对于相对论级别的超短超强激光的光斑并不是完美的圆形，所产生的涡旋光束焦斑一般显椭圆形。并且椭圆 LG 光束演化成相近基态存在一定距离，在形状改变之前直接就可以进入低密度等离子体区，甚至直接作用于等离子体靶上。这样研究椭圆拉盖尔-高斯涡旋激光束与等离子体相互作用及其特征就是一个新的问题。本工作研究了该光束在低密度等离子体中的传播特征，发现当激光入射功率低于自聚焦临界功率时，光斑旋转一定角度后，逐渐演化成涡旋厄米高斯光束，这意味着

实验上要获得不同模式的涡旋厄米高斯光束可以通过调节入射光的椭圆度来实现。另一方面,研究发现椭圆光束的有质动力在排开电子时,其导致的折射率梯度显各向异性,使得激光的能量向长轴转移,转移的速度随着激光的拓扑荷、椭圆度、入射功率的增加而增加。研究结果对强激光导引、光通信、新型粒子源产生等潜在应用具有明显的意义。

## 参考文献

- [1] Miller G H, Moses E I, Wuest C R 2004 *Nucl. Fusion* **44** S228
- [2] MacPhee A G, Divol L, Kemp A J, Akli K U, Beg F N, Chen C D, Chen H, Hey D S, Fedosejevs R J, Freeman R R, Henesian M, Key M H, Le Pape S, Link A, Ma T, Mackinnon A J, Ovchinnikov V M, Patel P K, Phillips T W, Stephens R B, Tabak M, Town R, Tsui Y Y, Van Woerkom L D, Wei M S, Wilks S C 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 055002
- [3] Esarey E, Schroeder C B, Leemans W P 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1229
- [4] Macchi A, Borghesi M, Passoni M 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 751
- [5] Chen H, Wilks S C, Bonlie J D, Liang E P, Myatt J, Price D F, Meyerhofer D D, Beiersdorfer P 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 105001
- [6] Di Piazza A, Müller C, Hatsagortsyan K Z, Keitel C H 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 1177
- [7] Zhong J, Li Y, Wang X, Wang J, Dong Q, Xiao C, Wang S, Liu X, Zhang L, An L, Wang F, Zhu J, Gu Y, He X, Zhao G, Zhang J 2010 *Nat. Phys.* **6** 984
- [8] Zhou C, He X T 1994 *Phys. Rev. E* **49** 4417
- [9] Mehrling T J, Fonseca R A, Martinez De La Ossa A, Vieira J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 174801
- [10] Akbari H, Bhatt A, La Hoz C, Semeter J L 2017 *Space Sci. Rev.* **212** 249
- [11] Huang T W, Zhou C T, He X T 2013 *Phys. Rev. E* **87** 053103
- [12] Huang T W, Zhou C T, Robinson A P L, Qiao B, Zhang H, Wu S Z, Zhuo H B, Norreys P A, He X T 2015 *Phys. Rev. E* **92** 053106

- [13] Huang T W, Zhou C T, He X T 2015 *Laser Part. Beams* **33** 347
- [14] He H, Friese M E J, Heckenberg N R, Rubinsztein-Dunlop H 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 826
- [15] Vieira J, Mendonça J T, Quéré F 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 054801
- [16] Ju L B, Zhou C T, Huang T W, Jiang K, Wu C N, Long T Y, Li L, Zhang H, Yu M Y, Ruan S C 2019 *Phys. Rev. Appl.* **12** 014054
- [17] Zhang X, Shen B, Shi Y, Wang X, Zhang L, Wang W, Xu J, Yi L, Xu Z 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 173901
- [18] Shi Y, Vieira J, Trines R M G M, Bingham R, Shen B F, Kingham R J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 145002
- [19] Wang W, Shen B, Zhang X, Zhang L, Shi Y, Xu Z 2015 *Sci. Rep.* **5** 8274
- [20] Hu L-X, Yu T-P, Lu Y, Zhang G-B, Zou D-B, Zhang H, Ge Z-Y, Yin Y, Shao F-Q 2019 *Plasma Phys. Control. Fusion* **61** 025009
- [22] Vinçotte A, Bergé L 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 193901
- [23] Vuong L T, Grow T D, Ishaaya A, Gaeta A L, 't Hooft G W, Eliel E R, Fibich G 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 133901
- [24] Fibich G, Gavish N 2008 *Phys. Rev. A* **77** 045803
- [25] Ju L B, Huang T W, Xiao K D, Wu G Z, Yang S L, Li R, Yang Y C, Long T Y, Zhang H, Wu S Z, Qiao B, Ruan S C, Zhou C T 2016 *Phys. Rev. E* **94** 033202
- [26] Long T, Zhou C, Wu S, Ju L, Jiang K, Bai R, Huang T, Zhang H, Yu M, Ruan S, He X 2021 *Phys. Rev. E* **103** 023204
- [27] Lee S, Yoon J W, Sung J H, Lee S K, Kim S Y, Yang J M, Hwang S I, Nam C H, Yeo W-J, Jeong S-K, Jeon M, Choi H-J, Kim M, Kim D U, Lee K-S, Chang K S, Pak S, Choi I W, Kim I J 2024 *Optica* **11** 1163
- [28] Leblanc A, Denoëud A, Chopineau L, Mennerat G, Martin Ph, Quéré F 2017 *Nat. Phys.* **13** 440
- [29] Zhang H, Zhang L, Huang H, Wang J, Yang Y, Tang W, Yu T 2025 *High Power Laser Sci. Eng.* **13** e2

- [30] Shi Y, Shen B, Zhang L, Zhang X, Wang W, Xu Z 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 235001
- [31] Vieira J, Trines R M G M, Alves E P, Fonseca R A, Mendonça J T, Bingham R, Norreys P, Silva L O 2016 *Nat. Commun.* **7** 10371
- [32] Kotlyar V V, Kovalev A A, Porfirev A P 2015 *Opt. Lett.* **40** 701

## Filamentation instability of relativistic elliptical Laguerre–Gaussian vortex beam in underdense plasma \*

Liang Shi<sup>2)</sup> Zhou Cang-Tao<sup>1) 2) 3) †</sup>

1) (Shenzhen Key Laboratory of ultra intense Laser and Advanced Materials Technology, Shenzhen, 518118)

2) (School of Engineering Physics in Shenzhen Technology University, Shenzhen, 518118)

3) (Super Laser Application Technology Research Center in Shenzhen Technology University, Shenzhen, 518118)

In recent years, Laguerre-Gaussian (LG) laser beams have gained significant attention in plasma physics due to their unique vortex characteristics. However, laser spots generated in experimental settings often deviate from a perfectly circular profile. Based on the Nonlinear Schrödinger Equation (NLSE) governing laser propagation in underdense plasmas, our study investigates the influence of spot ellipticity on the filamentation instability of LG beams. By solving the NLSE using the Split-Step Fourier Method (SSFM), we can characterize the propagation properties of the elliptical LG beams under various parameters in underdense plasmas. Numerical simulations show that when the incident power is below the critical power for self-focusing, the spot rotates by a certain angle depending on the sign of the topological

charge of the vortex beam. Then it gradually evolves into the neighboring ground state of the Helmholtz equation, a Vortex Hermite-Gaussian (VHG) beam. This evolution occurs over a distance approximately equal to the elliptical Rayleigh length. When the incident power exceeds the critical power, the elliptical spot with broken symmetry causes the plasma refractive index gradient to be directed toward the sides of the major axis, leading to the lateral migration of self-focused energy along this axis. Consequently, filaments mainly distribute along the major axis, forming earlier than in other regions and potentially exhibiting merging phenomena. At powers slightly above the critical power, only two filaments form. Furthermore, filamentation is classified into two cases based on the relationship between the self-focusing distance and the evolution distance. We also refined the azimuthal modulation instability theory and derived a modified expression for the critical power of elliptical LG beams. When the self-focusing distance is smaller than the evolution distance, the number of filaments obtained from simulations is consistent with theoretical predictions. These findings highlight the significant differences in propagation characteristics between elliptical and ideal LG beams due to symmetry breaking, providing crucial insights for the theoretical application and experimental study of ultra-intense laser beams.

**Keywords:** Elliptical Laguerre-Gaussian vortex beam, Underdense plasma, Filamentation instability

---

\*This work is supported by the Shenzhen Science and Technology Program(Grant No.ZDSYS20200811143600001), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12235014).

# These authors contributed equally.

† Corresponding author.E-mail:[zcangtao@sztu.edu.cn](mailto:zcangtao@sztu.edu.cn)

The first author.E-mail:<mailto:2400261007@stumail.sztu.edu.cn>