

多双涡卷忆阻 Hopfield 神经网络动力学分析及其实 现 *

李子涵¹⁾²⁾ 罗敏¹⁾²⁾ 邱达¹⁾²⁾ 杨婷¹⁾²⁾ 刘嵩^{1)2)†}

1) (湖北民族大学, 智能科学与工程学院, 湖北恩施 445000)

2) (湖北民族大学, 超轻弹性体材料绿色制造国家民委重点实验室, 湖北恩施 445000)

多双涡卷忆阻 Hopfield 神经网络凭借其复杂的非线性混沌动力学特性, 在图像加密、信息安全等领域展现出重要的应用价值。然而, 构建多双涡卷的忆阻模型通常采用多项式的方法, 其数学形式较为复杂, 从而限制了其应用。为解决这一问题, 本文提出了一种基于分段函数的忆阻模型, 并将其作为可变突触权重引入至 Hopfield 神经网络中, 替代固定权重的突触, 进而构建了一种新型的双忆阻全连接 Hopfield 神经网络。理论分析表明, 该系统能够生成数目可控的多双涡卷混沌吸引子, 其中包含复杂的网格多双涡卷混沌吸引子, 且涡卷数量可通过忆阻的内部参数灵活调整。此外, 研究发现该系统可展现出具有初始偏移增强特性的共存吸引子, 其数量也可由忆阻模型的内部参数进行调控。同时, 基于 NIST SP 800-22 测试结果, 验证了该网络生成的混沌序列具备良好的随机性与不可预测性, 满足密码学应用要求, 预示了其潜在的应用价值。最后, 基于 FPGA 完成了该系统的数字电路实现, 并验证了其物理存在性与可行性。

关键词: 忆阻 Hopfield 神经网络; 多涡卷; 共存吸引子; FPGA 实现

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 84.35.+i, 85.25.-j

1 引言

人脑是一个高度复杂且结构精密的非线性系统, 由数百亿个神经元通过突触相互连接构成, 能够呈现出丰富的混沌动力学特征^[1]。神经元间包含复杂的放电活动, 这些活动与大脑的信息处理机制密切相关

† 通信作者. E-mail: liusong@hbmzu.edu.cn (通信作者)

第一作者. E-mail: 202430345@hbmzu.edu.cn (第一作者)

* 基金: 中国高校产学研创新基金 (批准号: 2024IT118)、湖北省自然科学基金联合基金 (批准号: 2026AFC0242)

关^[2]。为了探究生物神经网络的结构与工作原理,研究人员构建了多种人工神经网络模型。其中, Hopfield 神经网络 (HNN) 凭借其复杂的拓扑结构, 为模拟人脑的复杂混沌行为提供了有效途径^[3]。

传统神经网络的突触权重由定值电阻实现, 难以反映生物突触的动态可塑性, 因而在生成复杂非线性动力学行为上存在固有缺陷。忆阻器作为一种非线性的两端元件, 其阻值不仅随通过的电流或电压动态变化, 更能在断电后持续保持。这种记忆特性与生物突触的功能高度相似, 被视为模拟生物突触的理想器件, 并且还可采用忆阻桥结构实现全范围的突触权重调节^[4]。近年来, 研究人员构建了多种忆阻 Hopfield 神经网络, 用以研究其复杂的动力学行为, 如隐藏吸引子^[5,6]、多稳态^[7,8]、混沌簇发放电^[9,10]、暂态混沌^[11,12] 与多涡卷^[13-15] 等。可以广泛应用于图像加密^[16,17]、保密通信^[18] 及联想记忆^[19] 等领域。

近年来, 多双涡卷作为忆阻 Hopfield 神经网络的重要研究方向, 受到广泛关注。Lin 等^[20] 利用多个符号函数的忆阻模型, 构建了一个 Hopfield 神经网络模型, 其双涡卷的数量可以通过忆阻模型参数轻松切换, 并且还能表现出初值偏移共存现象。Yu 等^[21] 研究了三神经元暴露于外部电磁辐射下的 Hopfield 神经网络的动态特性, 发现该网络在电磁辐射强度下能够产生涡卷数可控的吸引子。Hu 等^[22] 报道了一种四神经元忆阻 Hopfield 神经网络, 该网络使用双曲正切忆阻模型产生不同数量的多双涡卷吸引子, 并可用于增强图像安全性。Zhang 等^[23] 采用磁控双曲型忆阻模型作为神经元突触耦合至 Hopfield 神经网络中, 构造了一种新型 Hopfield 神经网络, 研究发现该系统能够产生任意方向、任意数量的多双涡卷结构。此外, 通过改变初始值, 还发现了该系统存在无限数量个初始偏移增强共存的多双涡卷混沌吸引子。赖强等^[24] 提出了一个含有反正切函数的忆阻模型, 在此基础上构建了一个能够产生涡卷数可控的忆阻双神经元网络。

综上所述, 当前关于多双涡卷忆阻 Hopfield 神经网络的研究已成为热点, 并已取得了许多良好成果。然而, 多数构建的模型仅依赖单个忆阻模型实现调控, 生成的多双涡卷混沌吸引子呈现出单向。此外, 现有研究多采用具有多项式特征的忆阻模型来构造系统, 其涡卷数随多项式项数的变化而变化。这一方式虽实现了涡卷数的可编程调控, 但复杂的数学形式限制了其应用。基于此, 本研究采用分段函数构建了一个新的忆阻模型, 并将其分别作为神经元自突触与互突触权重, 引入至 Hopfield 神经网络中。理论分析表明, 该忆阻 Hopfield 神经网络具有任意数量的多双涡卷吸引子, 且涡卷数可通过忆阻控制参数进行灵活调控。本文的主要贡献如下:

(1) 设计了一种新型忆阻 Hopfield 神经网络, 详细地阐明了多双涡卷的产生机理与调控机制。并且该模型还可以进一步拓展忆阻突触用以构建更高维度的网络模型, 具有灵活性与普适性。

(2) 可通过灵活调节忆阻模型控制参数，系统能够在相空间中产生任意数量的多双涡卷吸引子。

(3) 系统具有初始偏移增强的动力学行为，且吸引子的数量可通过忆阻的控制参数进行调节，存在超级多稳态现象。

本文其余部分的结构安排如下。第 2 节设计新型忆阻模型。第 3 节构建忆阻 Hopfield 神经网络模型。第 4 节分析其动力学行为。第 5 节评估混沌序列的随机性。第 6 节实现该网络。最后对全文工作进行总结。

2 忆阻模型

根据 Chua ^[25] 提出的忆阻器理论，提出了一种基于分段函数的磁控忆阻模型，具体如下：

$$\begin{cases} i = W(\varphi)v = (a + bf(\varphi))v \\ \dot{\varphi} = g(v, \varphi) = cv - df(\varphi) \end{cases} \quad (1)$$

式中 i 表示流经忆阻器的电流， v 表示忆阻器两端的电压， φ 表示磁通量， $W(\varphi)$ 为忆导函数， $g(v, \varphi)$ 为状态演化函数。 a, b, c, d 为忆阻参数， $f(\varphi)$ 为忆阻内部状态变量函数，可由 $f_1(\varphi)$ 或 $f_2(\varphi)$ 两种形式表示：

$$f_1(\varphi) = \begin{cases} A_x & \varphi > \frac{N + 0.25}{F_x} \\ A_x \sin(2\pi F_x \varphi) & -\frac{N + 0.25}{F_x} \leq \varphi \leq \frac{N + 0.25}{F_x} \\ -A_x & \varphi < -\frac{N + 0.25}{F_x} \end{cases} \quad (2)$$

$$f_2(\varphi) = \begin{cases} A_x & \varphi > \frac{M + 0.75}{F_x} \\ -A_x \sin(2\pi F_x \varphi) & -\frac{M + 0.75}{F_x} \leq \varphi \leq \frac{M + 0.75}{F_x} \\ -A_x & \varphi < -\frac{M + 0.75}{F_x} \end{cases} \quad (3)$$

在该模型中， A_x 、 F_x 、 N 、 M 为忆阻参数。本文将 A_x 和 F_x 分别设置为 1 和 0.5。在忆阻器两端施加正弦电压 $V = A \sin(2\pi Ft)$ ，式中 A 为幅值， F 为频率。忆阻参数设置为 $a = 1, b = 1, c = 1, d = 0.1$ ，控制参数 $N = 1$ ，固定幅值 $A = 1 \text{ V}$ ，分别设置频率 $F = 0.5, 1, 2, 20 \text{ Hz}$ ，得到如图 1(a) 所示的紧磁滞回线。结果表明，随着频率的增大，磁滞回线会逐渐收缩为一条单值函数。固定频率 $F = 0.5 \text{ Hz}$ ，幅值分别设置为 $A = 0.5, 0.8, 1 \text{ V}$ ，图 1(b) 绘制了此条件下忆阻器的磁滞回线。由此可知，随着幅值的增大，紧磁滞回线会逐渐变宽。综上所述，该模型具备忆阻器特性。忆阻器的 POP 曲线能直观地展现了其记忆特性，

将忆阻器端电压 v 设置为 0，绘制的 POP 曲线如图 1(c) 所示。可以看出 POP 曲线与 x 轴存在 5 个负斜率交点，这些交点说明忆阻器的忆导能够根据当前状态保持在某值，则说明该忆阻器具有非易失性。

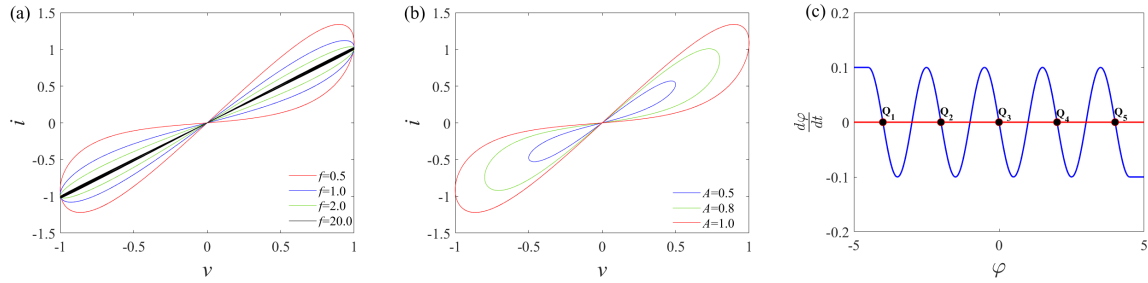


图 1 忆阻器特征分析 (a) 不同频率下的紧磁滞回线; (b) 不同幅值下的紧磁滞回线; (c) POP 曲线

Fig. 1. Fig. 1. Memristor characteristic analysis: (a) Frequency-dependent pinched hysteresis loops; (b) Amplitude-dependent pinched hysteresis loops; (c) POP Curves

3 忆阻 Hopfield 神经网络建模

3.1 忆阻 Hopfield 神经网络模型

Hopfield 神经网络作为一种典型的类脑神经网络，常用于模拟大脑的动态行为。对于包含 n 个神经元的 HNN，第 i 个神经元的电路方程可表示为：

$$C_i \dot{x}_i = -\frac{x_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n w_{ij} \tanh(x_j) + I_i \quad (4)$$

其中 x_i 表示第 i 个神经元上的膜电压； C_i 和 R_i 分别为神经元内外的膜电容和膜电阻； w_{ij} 为神经元 i 和 j 之间的突触权重； $\tanh(\cdot)$ 为激活函数； I_i 则为外部输入的偏置电流。通常设置 $C_i = 1$ ， $R_i = 1$ ， $I_i = 0$ 。设置合适的突触权重，则原始三神经元 Hopfield 神经网络数学模型为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 1.2 \tanh(x_1) + 1.2 \tanh(x_2) - 5.85 \tanh(x_3) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 1.05 \tanh(x_1) + 0.01 \tanh(x_2) + 2.75 \tanh(x_3) \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 0.8 \tanh(x_1) - 2.05 \tanh(x_2) + 4.1 \tanh(x_3) \end{cases} \quad (5)$$

将忆阻器分别作为神经元 1 的自突触以及神经元 1 与神经元 2 之间的互突触，即以 $k_1 W_1(\varphi_1) = k_1(a_1 + b_1 f(\varphi_1))$ 替代突触权重 w_{11} ， $k_2 W_2(\varphi_2) = k_2(a_2 + b_2 f(\varphi_2))$ 替代突触权重 w_{12} ，这里 k_1, k_2 为忆阻耦合强度，其拓扑结构如图 2 所示。

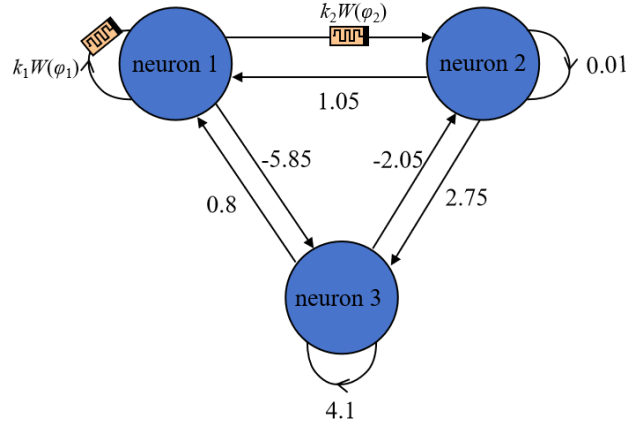


图 2 双忆阻 Hopfield 神经网络连接拓扑

Fig. 2. Connection topology of the dual-memristor Hopfield neural network

双忆阻 Hopfield 神经网络可以用无量纲表达式如下：

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = -x_1 + k_1 W_1(\varphi_1) \tanh(x_1) + k_2 W_2(\varphi_2) \tanh(x_2) - 5.85 \tanh(x_3) \\
 \dot{x}_2 = -x_2 + 1.05 \tanh(x_1) + 0.01 \tanh(x_2) + 2.75 \tanh(x_3) \\
 \dot{x}_3 = -x_3 + 0.8 \tanh(x_1) - 2.05 \tanh(x_2) + 4.1 \tanh(x_3) \\
 \dot{\varphi}_1 = -c_1 f(\varphi_1) + d_1 \tanh(x_1) \\
 \dot{\varphi}_2 = -c_2 f(\varphi_2) + d_2 \tanh(x_2)
 \end{cases} \quad (6)$$

3.2 平衡点与特征值

令式 (6) 中等式右侧等于 0，可得平衡点状态方程如式所示：

$$\begin{cases}
 -x_1 + k_1 W_1(\varphi_1) \tanh(x_1) + k_2 W_2(\varphi_2) \tanh(x_2) - 5.85 \tanh(x_3) = 0 \\
 -x_2 + 1.05 \tanh(x_1) + 0.01 \tanh(x_2) + 2.75 \tanh(x_3) = 0 \\
 -x_3 + 0.8 \tanh(x_1) - 2.05 \tanh(x_2) + 4.1 \tanh(x_3) = 0 \\
 -c_1 f(\varphi_1) + d_1 \tanh(x_1) = 0 \\
 -c_2 f(\varphi_2) + d_2 \tanh(x_2) = 0
 \end{cases} \quad (7)$$

由于式 (7) 是超越方程，难以直接求解，因此可采用高斯消元的思想。设置参数 $k_1 = -1.2$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0.001$, $c_1 = 1.35$, $d_1 = 1.6$, $N_1 = 1$, $k_2 = 1.2$, $a_2 = 1$, $b_2 = 0.001$, $c_2 = 1.35$, $d_2 = 2.45$, $N_2 = 1$ 。

可得此参数条件下关于状态变量 x_1 和 x_2 的方程组 $g_1(x_1, x_2)$ 和 $g_2(x_1, x_2)$, 如下所示:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = -x_1 - 1.2(1 + 0.001f(\varphi_1)) \tanh(x_1) + 1.2(1 + 0.001f(\varphi_2)) \tanh(x_2) - 5.85 \tanh(x_3) \\ g_2(x_1, x_2) = -x_3 + 0.8 \tanh(x_1) - 2.05 \tanh(x_2) + 4.1 \tanh(x_3) \\ x_3 = \operatorname{atanh}(0.363636(x_2 - 1.05 \tanh(x_1) - 0.01 \tanh(x_2))) \\ f(\varphi_1) = 1.185185 \tanh(x_1) \\ f(\varphi_2) = 1.814815 \tanh(x_2) \end{cases} \quad (8)$$

借助 MATLAB 绘制 $g_1(x_1, x_2)$ 和 $g_2(x_1, x_2)$ 的局部曲线图, 两曲线的交点即为平衡点, 如图 3(a) 所示。

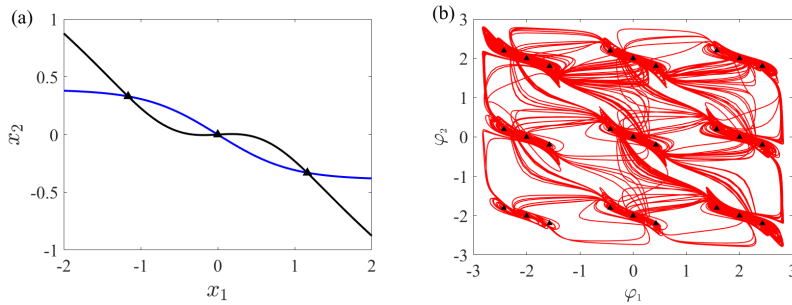


图 3 平衡点求解 (a) 局部曲线图; (b) 3×3 网格多双涡卷吸引子和 27 个平衡点

Fig. 3. Solution of Equilibrium Points (a) Local Curve Plot; (b) 3×3 Grid Multi-Double-Scroll Attractor and 27 Equilibrium Points

将 x_1, x_2 的值带入式 (8), 即可求解对应的平衡点坐标 $(x_1, x_2, x_3, \varphi_1, \varphi_2)$ 。通过求解系统的雅可比矩阵, 可求得平衡点处对应的特征值, 并由此可判断出平衡点的类型, 其雅可比矩阵如 (9) 所示。

$$J = \begin{bmatrix} -1 - 1.2W_1(\varphi_1) \operatorname{sech}^2(x_1) & 1.2W_2(\varphi_2) \operatorname{sech}^2(x_2) & -5.85 \operatorname{sech}^2(x_3) & -0.0012f'(\varphi_1) \tanh(x_1) & 0.0012f'(\varphi_2) \tanh(x_2) \\ 1.05 \operatorname{sech}^2(x_1) & -1 + 0.01 \operatorname{sech}^2(x_2) & 2.75 \operatorname{sech}^2(x_3) & 0 & 0 \\ 0.8 \operatorname{sech}^2(x_1) & -2.05 \operatorname{sech}^2(x_2) & -1 + 4.1 \operatorname{sech}^2(x_3) & 0 & 0 \\ 1.6 \operatorname{sech}^2(x_1) & 0 & 0 & -1.35f'(\varphi_1) & 0 \\ 0 & 2.45 \operatorname{sech}^2(x_2) & 0 & 0 & -1.35f'(\varphi_2) \end{bmatrix} \quad (9)$$

根据 Shil'nikov 定理, 平衡点处的特征值存在一个实根 γ 和两个共轭复根 $\sigma \pm j\omega$ 且满足 $|\sigma/\gamma| < 1$ 和 $\sigma\gamma < 0$, 若实根 $\gamma < 0$, 共轭复根实部 $\sigma > 0$, 则平衡点类型为不稳定的指标-2 鞍焦点, 其附近会生成涡卷; 若实根 $\gamma > 0$, 共轭复根实部 $\sigma < 0$, 则该平衡点类型为不稳定的指标-1 鞍焦点, 其会生成键轨道将涡卷连接起来形成双涡卷结构。进一步地, 多个双涡卷相连接会生成多双涡卷结构。根据周期函数的性质, 自变量变化一个周期时, 函数值相等。由于 φ_1 和 φ_2 以 2 为周期偏移, 因此偏移 ± 2 后的平衡点与

原平衡点具有完全相同的雅可比矩阵，即特征值一致。可用于生成双涡卷的平衡点及其特征值与其类型如表 1 所示，这些平衡点被标记在图 4(b) 中。设置初始值 $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), \varphi_1(0), \varphi_2(0)] = [0.1, 0, 0, 0, 0]$ ，此条件下该模型在 φ_1 - φ_2 平面的相轨迹也被绘制在图 4(b) 中。

对于原始 Hopfield 神经网络,用相同方法求解得到 3 个平衡点 $E_1 = (0, 0, 0), E_2 = (1.164, -0.331, -0.464), E_3 = (-1.164, 0.331, 0.464)$ ，平衡点 E_1 对应的特征值为 $\lambda_1 = 0.594, \lambda_{2,3} = -0.342 \pm 1.279i$ ；平衡点 $E_{2,3}$ 对应的特征值为 $\lambda_1 = -0.739, \lambda_{2,3} = 0.346 \pm 1.096i$ 。研究发现，该模型所产生的吸引子与双忆阻 Hopfield 神经网络类似，均属于双涡卷混沌吸引子，但双涡卷的数量和方向均有所变化。这表明，忆阻器的引入不仅能够调控多双涡卷的数量，还能拓展其生成方向。为验证上述特性，并系统揭示忆阻 Hopfield 神经网络的复杂动力学行为，下一章将采用数值仿真方法展开进一步研究。

表 1 平衡点，特征值及平衡点类型

Table 1. Equilibrium point, eigenvalue, and equilibrium point type

平衡点	特征值	平衡点类型
$(0, 0, 0, 0, 0)$		
$(0, 0, 0, \pm 2, 0)$	$-4.241, -4.241, 0.594, -0.342 \pm 1.279i$	不稳定的指标-1 鞍焦点
$(0, 0, 0, 0, \pm 2)$		
$(0, 0, 0, \pm 2, \pm 2)$		
$(-1.164, 0.331, 0.464, -0.429, 0.197)$		
$(-1.164, 0.331, 0.464, 0.429, 0.197 \pm 2)$	$-3.454, -0.941, -0.739, 0.346 \pm 1.096i$	不稳定的指标-2 鞍焦点
$(-1.164, 0.331, 0.464, -0.429 \pm 2, 0.197)$		
$(-1.164, 0.331, 0.464, -0.429 \pm 2, 0.197 \pm 2)$		
$(1.164, 0.331, 0.464, -0.429, 0.197)$		
$(1.164, 0.331, 0.464, -0.429, 0.197 \pm 2)$	$-3.454, -0.941, -0.739, 0.346 \pm 1.096i$	不稳定的指标-2 鞍焦点
$(1.164, 0.331, 0.464, 0.429 \pm 2, 0.197)$		
$(1.164, 0.331, 0.464, -0.429 \pm 2, 0.197 \pm 2)$		

4 忆阻 Hopfield 神经网络动力学行为分析

Matlab 仿真步长设置为 0.01，固定参数 $a_1 = 1, b_1 = 0.001, c_1 = 1.35, a_2 = 1, b_2 = 0.001, c_2 = 1.35$ ，其余参数均可变。本节使用分岔图、Lyapunov 指数谱、吸引盆等数值分析方法，分析忆阻 Hopfield 神经

网络系统的动力学行为。结果表明，该系统呈现丰富的动力学特征，具体如下。

4.1 忆阻突触耦合强度动力学行为

在研究非线性动力系统的行为时，参数的变化往往会对系统的动态特性产生显著影响。以本文提出的忆阻 Hopfield 神经网络为例，设置参数 $d_1 = 1.6$, $d_2 = 2.45$, $N_1 = 2$, $N_2 = 0$, $k_2 = 1.2$, 初值 $[0.1, 0, 0, 0, 0]$, 绘制此条件下系统对应的分岔图与 Lyapunov 指数谱，如图 4 所示。从分岔图和 Lyapunov 指数谱中可以观察到，系统依次经历点、周期、混沌、周期的状态。

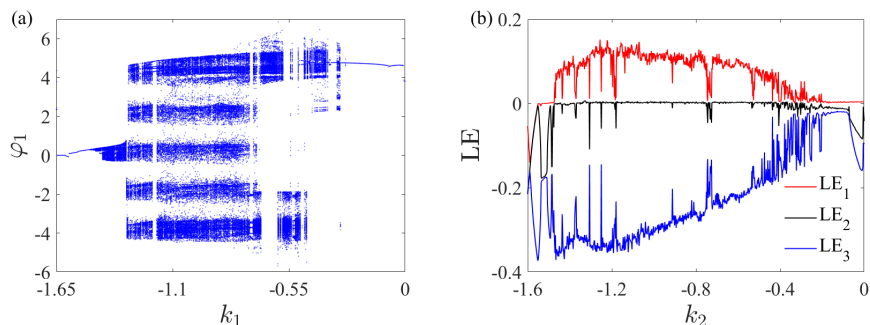


图 4 随 k_1 变化的动力学行为 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱

Fig. 4. Dynamics behavior varying with k_1 (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponent spectrum

为直观展示参数对系统状态的影响，选取 $k_1 = -1.5$ 、 -1.2 、 -0.6 三种情况进行分析。此时，系统依次呈现周期 1 吸引子、5 双涡卷混沌吸引子及混沌吸引子，对应相图如图 5 所示。该结果与分岔图反映的状态变化基本吻合。

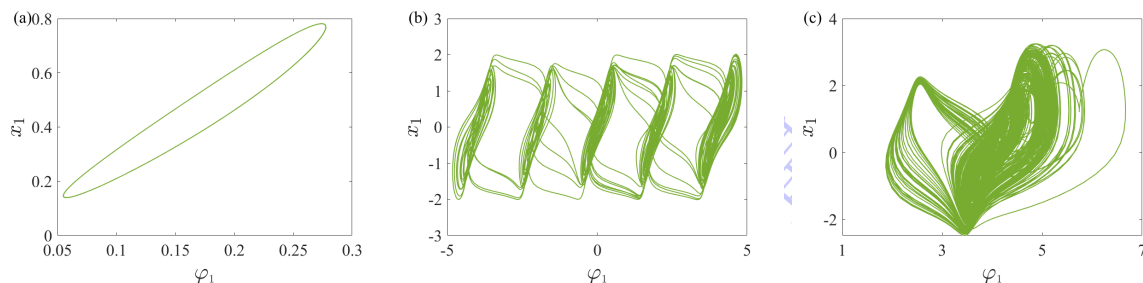


图 5 不同参数 k_1 下的吸引子相图 (a) $k_1 = -1.5$; (b) $k_1 = -1.2$; (c) $k_1 = -0.6$

Fig. 5. Dynamics behavior varying with k_1 (a) $k_1 = -1.5$; (b) $k_1 = -1.2$; (c) $k_1 = -0.6$

进一步研究表明，与其他类型的吸引子相比，多双涡卷混沌吸引子能呈现出更强的混沌特性。具体而言，其最大 Lyapunov 指数为 0.151 位于 5 双涡卷区域，这进一步印证了涡卷结构增多会显著增强系统的混沌程度。基于这一特性，多双涡卷混沌系统在图像加密领域可展现出重要的应用潜力。

4.2 可控多双涡卷混沌吸引子

选择合适的控制参数 N 或 M ，忆阻 Hopfield 神经网络可生成任意数量的多双涡卷结构。结果表明，本文提出的双忆阻 Hopfield 神经网络不仅具备不同方向的单向多双涡卷吸引子，还可产生复杂的网格多双涡卷吸引子。

设置参数 $d_1 = 1.6$, $d_2 = 1.01$, $k_1 = -1.2$, $k_2 = 1.2$, $N_2 = 0$ ，初始条件设为 $[0.1, 0, 0, 0, 0]$ ，绘制该参数条件下系统关于控制参数 N_1 的分岔图，结果如图 6 所示。从图中可以观察到，随着 N_1 逐渐增大，混沌分块区域的数量显著增加，混沌吸引子在 φ_1 方向发生重构扩展，这一现象是多双涡卷混沌系统的典型特征。分别选取 $N_1 = 0, 1, 2, 3$ ，系统在此参数条件下的相图也被绘制在图 6 中，从相图中可以看出，控制参数 N_1 调控系统生成奇数个双涡卷，即双涡卷的数量为 $2N_1 + 1$ 。

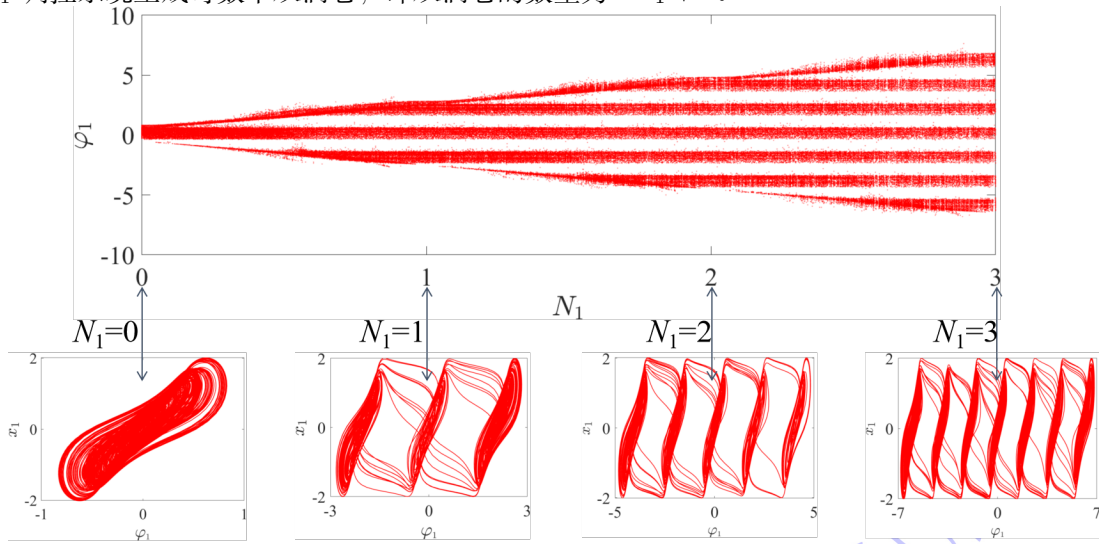


图 6 随控制参数 N_1 变化的分岔图与相图

Fig. 6. Bifurcation diagram and phase portraits with respect to the control parameter N_1

同理，系统关于控制参数 M_1 的分岔图和相图如图 7 所示。可以看出，控制参数 M_1 调控系统产生偶数个双涡卷，且双涡卷的数量为 $2M_1 + 2$ 。需要说明的是，为便于探究多双涡卷的可控规律，该文仅选取部分参数进行研究；实际上进一步增大 N_1/M_1 ，该系统可沿 φ_1 方向产生任意数目的多双涡卷。

设置参数 $d_1 = 1$, $d_2 = 2.45$, $k_1 = -1.2$, $k_2 = 1.2$, $N_1 = 0$ ，初始条件设为 $[0.1, 0, 0, 0, 0]$ ，分别选取控制参数 $N_2 = 0, 1, 2$ 或 $M_2 = 0, 1, 2$ ，系统在此参数条件下对应的相图如图 8 所示。同理，随着控制参数 N_2/M_2 增大，系统在 φ_2 方向上的吸引子发生重构扩展，形成沿 φ_2 方向的多双涡卷混沌吸引子，涡卷数仍符合 $2N_2 + 1/2M_2 + 2$ 的关系。这表明该忆阻 Hopfield 神经网络具有生成单向多双涡卷混沌吸引子的能力。

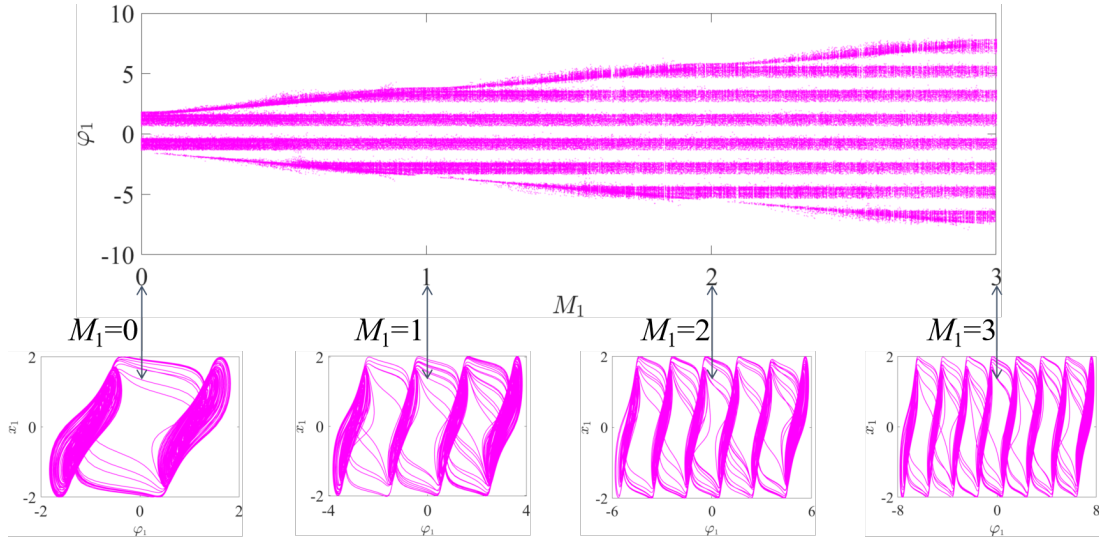


图 7 随控制参数 M_1 变化的分岔图与相图

Fig. 7. Bifurcation diagram and phase portraits with respect to the control parameter M_1

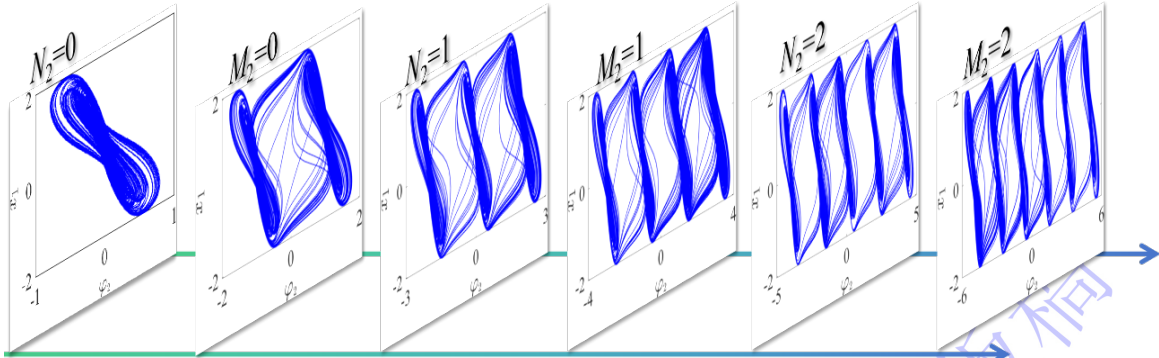


图 8 沿 φ_2 方向变化的多双涡卷混沌吸引子

Fig. 8. Multi-double-scroll attractors varying along φ_2 direction

综合前文可知,系统可分别沿 φ_1 或 φ_2 方向独立生成涡卷数可控的混沌吸引子。在此基础上,固定参数 $d_1 = 1.6$, $d_2 = 2.45$, $k_1 = -1.2$, $k_2 = 1.2$ 及初始条件 $[0.1, 0, 0, 0, 0]$,若同时调节控制参数,系统在该条件下的相图如图 9 所示。由相图可知,随着控制参数的变化,吸引子将沿 φ_1 与 φ_2 两个方向同步进行重构拓展,形成具有网格状的多双涡卷混沌吸引子,并且双涡卷个数为 $[(2N_1 + 1)/(2M_1 + 2)] \times [(2N_2 + 1)/(2M_2 + 2)]$ 。由此可见,网格状吸引子所产生的总涡卷数,恰好等于 φ_1 方向与 φ_2 方向上可生成的双涡卷数目的乘积。这一可控的网格多双涡卷生成机制表明,通过增加忆阻突触数目,可构建出具有更高维度的多双涡卷忆阻 Hopfield 神经网络,进而反映了本系统的设计具有良好的可靠性与通用性。

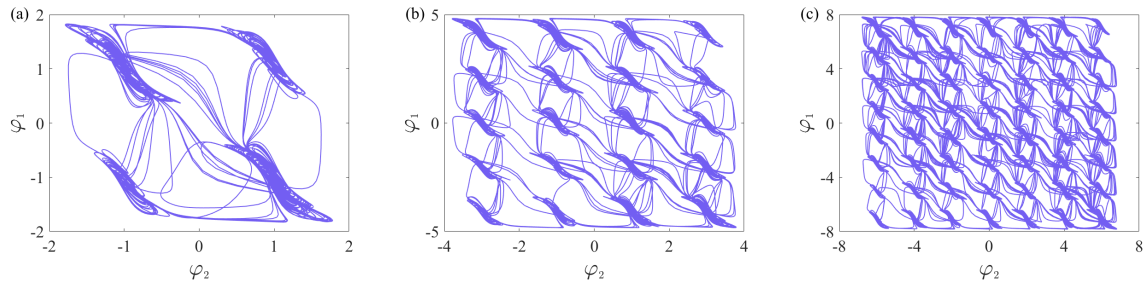


图 9 网格多双涡卷混沌吸引子 (a)2×2 网格多双涡卷混沌吸引子 (b)5×4 网格多双涡卷混沌吸引子 (c)7×8 网格多双涡卷混沌吸引子

Fig. 9. Grid multi-double-scroll chaotic attractors (a) 2×2 grid multi-double-scroll chaotic attractor; (b) 5×4 grid multi-double-scroll chaotic attractor; (c) 7×8 grid multi-double-scroll chaotic attractor

4.3 初始偏移增强动力学行为

在系统参数固定的情况下，仅通过改变初始条件，系统能够产生多个共存吸引子的现象，则将此现象称之为多稳态。其中，若系统产生的共存吸引子形状相同但位置不同，则称其具有同质多稳态现象。当这类共存的吸引子数量为无限多时，则称为超级多稳态现象。该现象体现了混沌系统对初值的极端敏感性，也反映了系统动力学的高度复杂性。

在参数设置为 $d_1 = 1$, $d_2 = 2.45$, $k_1 = -1.2$, $k_2 = 1.2$, $N_1 = N_2 = 2$, 初始条件为 $[0.1, 0, 0, \varphi_1(0), 0]$ 的情况下，令忆阻模型初始条件 $\varphi_1(0)$ 在 $[-5, 5]$ 范围内变化，得到系统关于状态变量 φ_1 与 φ_2 的分岔图分别如图 10(a) 和 (b) 所示，对应的 Lyapunov 指数谱如图 10(c) 所示。从图 10(a) 可以看出，分岔图可分为五个区域，且状态变量 φ_1 的振幅区域呈现出阶梯状变化规律，并且每个区域均对应一个混沌吸引子。从图 10(b) 可知，这些共存吸引子在 φ_2 方向上始终保持多双涡卷混沌状态。图 10(c) 则显示，该参数范围内系统的最大 Lyapunov 指数恒为正，表明其具备鲁棒混沌特性，适用于保密通信等领域。

分别取 $\varphi_1(0)$ 为 -4 、 -2 、 0 、 2 、 4 ，得到系统对应的相轨迹图和时间序列图分别如图 10(d) 与 10(e) 所示。从相图和时序图中可观察到，系统在相平面上可产生 5 个沿 φ_1 方向偏移的共存 5 双涡卷吸引子，且各吸引子始终处于混沌状态。图 10(f) 展示了系统的吸引盆分布，不同颜色区域对应的形状与大小基本一致，但位置各异的吸引子。值得注意的是，相图、分岔图与吸引盆的结果相吻合，共同揭示了该多双涡卷忆阻 Hopfield 神经网络存在的同质多稳态现象。

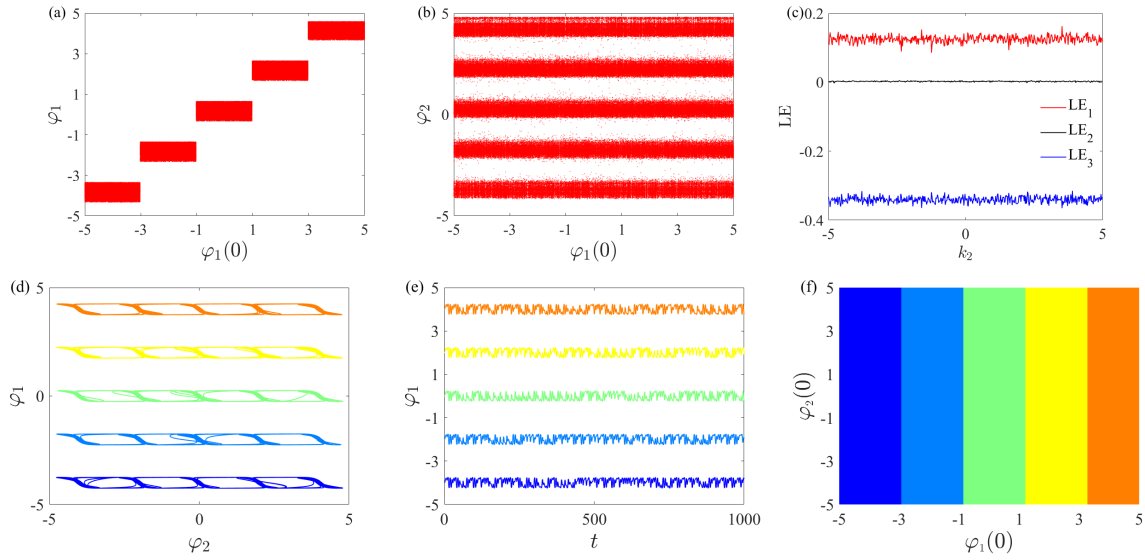


图 10 随初始值 $\varphi_1(0)$ 变化的动力学行为 (a) 沿 φ_1 方向变化的分岔图 (b) 沿 φ_2 方向变化的分岔图 (c) Lyapunov 指数谱 (d) 五个共存的 5-双涡卷混沌吸引子 (e) 时间序列图 (f) 吸引盆

Fig. 10. Dynamic behaviors varying with initial condition $\varphi_1(0)$: (a) Bifurcation diagram along the φ_1 direction ; (b) Bifurcation diagram along the φ_2 direction ; (c) Lyapunov exponent spectrum ; (d) Five coexisting 5-double-scroll chaotic attractors ; (e) Time series plots ; (f) Basin of attraction

为了进一步研究控制参数 N_1/M_1 对忆阻 Hopfield 神经网络中共存吸引子数量的影响, 在固定其他参数条件下, 分别设置 $N_1 = 3$, $M_1 = 2, 3$, 可得相应的吸引盆如图 11 所示。结果表明, 随着控制参数的变化, 系统中共存吸引子的数目也呈现出相应的规律变化, 其数量为 $2N_1 + 1/2M_1 + 2$ 。

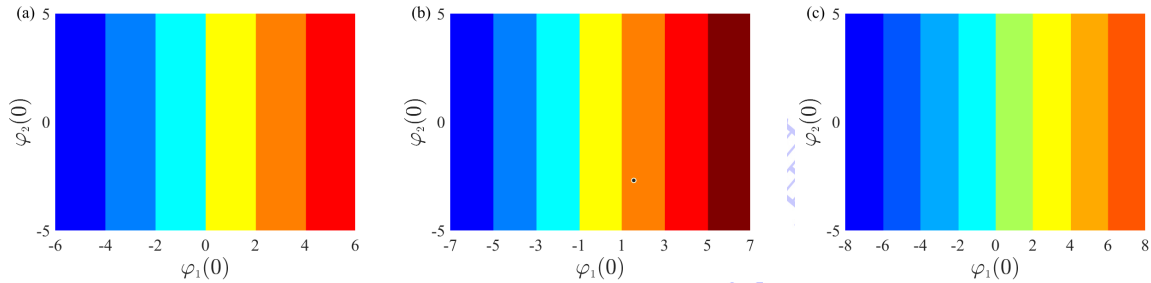


图 11 与控制参数 N_1/M_1 相关的初值偏移增强吸引子所对应的吸引盆 (a) $M_1 = 2$, 6 个共存吸引子 (b) $N_1 = 3$, 7 个共存吸引子 (c) $M_1 = 3$, 8 个共存吸引子

Fig. 11. The initial value offset related to the control parameter N_1/M_1 enhances the suction basin corresponding to the attractor (a) $M_1 = 2$, six coexisting attractors; (b) $N_1 = 3$, seven coexisting attractors; (c) $M_1 = 3$, eight coexisting attractors

设置参数 $d_1 = 1.6$, $d_2 = 2.2$, $k_1 = -1.2$, $k_2 = 1.2$, $N_1 = N_2 = 2$, 初值设置为 $[0.1, 0, 0, 0, \varphi_2(0)]$, 令忆阻模型初始条件 $\varphi_2(0)$ 在 $[-5, 5]$ 范围内变化, 得到系统关于状态变量 φ_2 的分岔图与吸引盆分别如图 12(a) 和 12(b) 所示。分别选取 $\varphi_2(0)$ 为 -4 、 -2 、 0 、 2 、 4 , 得到相应的相轨迹图如图 12(c) 所示。从图中可以看出, 系统在相平面上可产生 5 个沿 φ_2 方向偏移的共存 5 双涡卷吸引子。

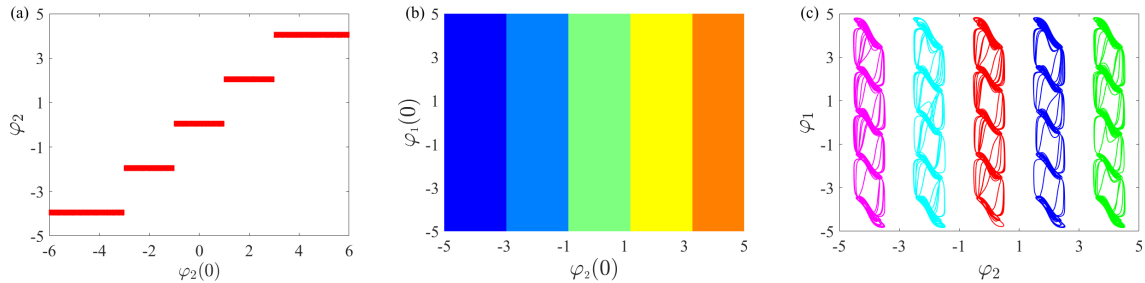


图 12 随初始值 $\varphi_2(0)$ 变化的动力学行为 (a) 分岔图 (b) 吸引盆 (c) 五个共存的 5-双涡卷混沌吸引子

Fig. 12. Dynamic behaviors varying with initial condition $\varphi_2(0)$ (a) Bifurcation diagram; (b) Basin of attraction; (c) Five coexisting 5-double-scroll chaotic attractors

在保持其余参数不变的前提下, 通过调整参数 N_2/M_2 并设置合适的初始值, 可得到此条件下系统对应的相图如图 13 所示。从图中可以看出, 随着控制参数的改变, 系统中吸引子的数量也可呈现出规律性的变化, 其具体数量关系为 $2N_2 + 1/2M_2 + 2$ 。由此可见, 该忆阻 Hopfield 神经网络可生成无限多个共存的多双涡卷混沌吸引子。为了方便分析, 这里仅选取了几个控制参数。实际上, 随着 N_2/M_2 逐渐增大, 系统产生的吸引子数量也会持续增加并最终趋于无穷, 这一结果也表明该系统具有超级多稳态现象。

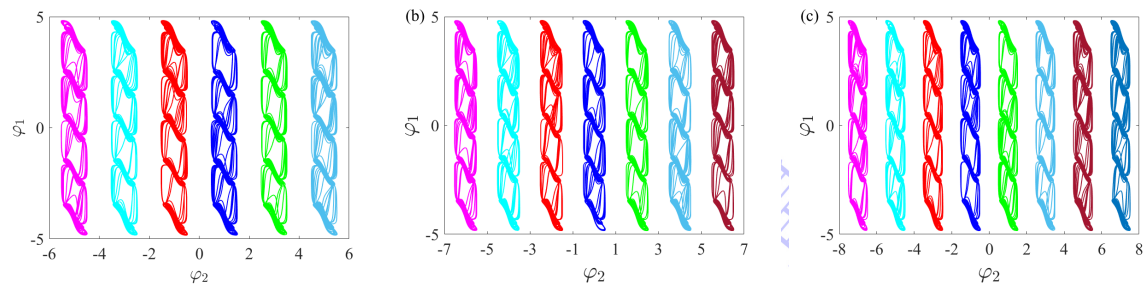


图 13 随控制参数变化的共存多双涡卷混沌吸引子 (a) 六个共存吸引子 (b) 七个共存吸引子 (c) 八个共存吸引子

Fig. 13. Coexisting multi-double vortex chaotic attractors varying with control parameters (a) Six coexisting attractors; (b) Seven coexisting attractors; (c) Eight coexisting attractors

根据前文可知, 系统能够分别沿 φ_1 或 φ_2 方向生成数量可控个吸引子。在此基础上, 固定参数 $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $k_1 = -1.2$, $k_2 = 1.2$, $N_1 = N_2 = 1$, 初始条件为 $[0.1, 0, 0, \varphi_1(0), \varphi_2(0)]$, 当初始值 $\varphi_1(0)$ 与 $\varphi_2(0)$

在 $[-3, 3]$ 区域内变化时, 系统吸引盆的分布情况如图 14(a) 所示。从图中可以看出, 吸引盆呈现出网格状分布。进一步选取 $\varphi_1(0) = 0, \pm 2$ 与 $\varphi_2(0) = 0, \pm 2$, 可得 9 个共存的双涡卷混沌吸引子, 其相图如图 14(b) 所示。考虑到系统特性, 吸引子在 φ_1 与 φ_2 两个方向上可产生等距离偏移, 从而实现对初值在平面上的位移调控。

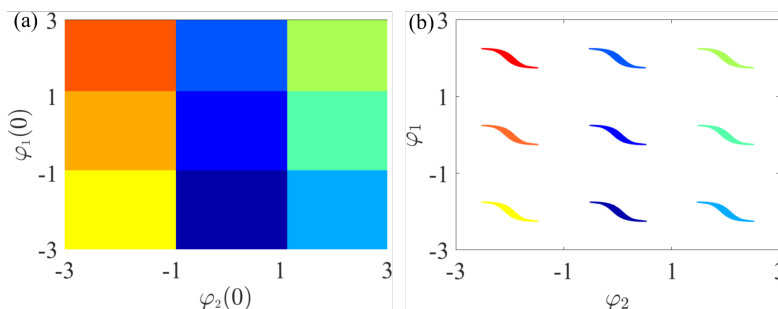


图 14 平面偏移共存双涡卷混沌吸引子 (a) 吸引盆; (b) 共存吸引子相图

Fig. 14. Planar-offset coexisting double-scroll chaotic attractors (a) Basins of attraction; (b) Phase portraits of coexisting attractors

5 FPGA 硬件实现

忆阻 Hopfield 神经网络从理论走向实际应用, 关键在于硬件实现的研究。通过构建硬件电路平台进行物理验证, 可直接检验系统的可实现性。目前, 硬件实现方案主要可分为模拟电路实现与数字电路实现两种技术路线。鉴于分段函数具有复杂的非线性特征, 并且其函数形式难以用其他函数形式有效近似, 因此该系统利用模拟电路实现起来较为困难。相比之下, 基于 FPGA 的数字电路实现兼具高精度、运算速度快和抗干扰能力强等优势, 并能借助软件灵活完成系统参数和初始值的精确设定。基于此, 本文选用基于 FPGA 的数字电路方案, 对所设计的忆阻 Hopfield 神经网络进行硬件实现。

本研究基于 FPGA 平台, 利用可编程片上系统 (System on a Programmable Chip, SOPC) 技术实现了所设计的忆阻 Hopfield 神经网络。硬件实现平台如图 15 所示, 核心器件包括英特尔 CYCLONE IV E 系列的 FPGA 芯片 EP4CE10F17C, 以及高速双通道 14 位数模转换芯片 ACM9767。SOPC 技术具备可集成、可编程的软硬件协同设计优势, 支持灵活的硬件配置与软件修改。具体实现时, 先在 Quartus 17.1 环境下完成系统设计、开发与配置, 再将配置文件下载到 FPGA 开发板; 随后通过 Nios IDE 编写并运行程序, 最后经数模转换模块将模拟信号输出至示波器, 观测系统相图。

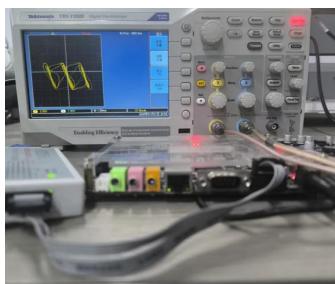


图 15 FPGA 硬件实验平台

Fig. 15. FPGA Hardware Experiment Platform

鉴于 FPGA 处理的是离散信号，本文选用欧拉（Euler）法对连续系统进行离散化。该方法计算效率高、内存占用小，且易于实现。采用与图 6、图 7 相图相同的参数进行硬件实现，在示波器上观测到的结果如图 16 所示。可以看出，实验所得相轨迹与 MATLAB 数值仿真结果基本一致。

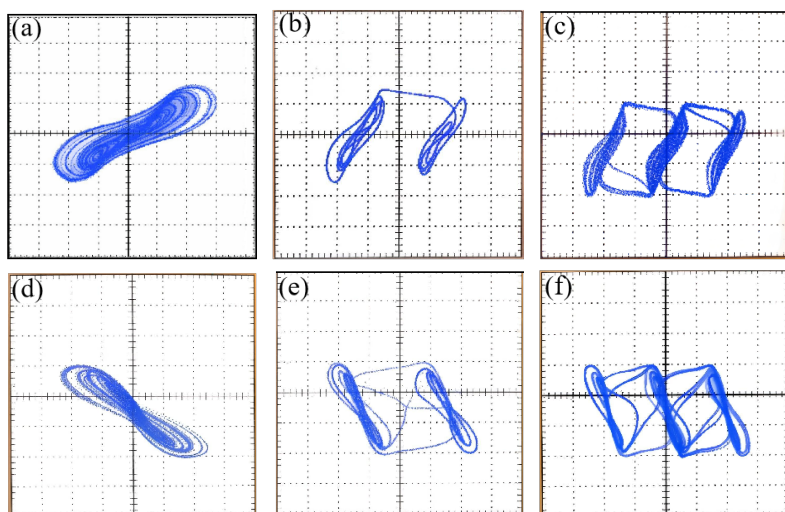


图 16 FPGA 硬件实现图 (a) φ_1 方向双涡卷吸引子 (b) φ_1 方向 2-双涡卷吸引子 (c) φ_1 方向 3-双涡卷吸引子 (d) φ_2 方向 1-双涡卷吸引子 (e) φ_2 方向 2-双涡卷吸引子 (f) φ_2 方向 3-双涡卷吸引子

Fig. 16. FPGA hardware implementation diagram: (a) φ_1 -direction dual-scroll attractor; (b) φ_1 -direction 2-scroll attractor; (c) φ_1 -direction 3-scroll attractor ; (d) φ_2 -direction dual-scroll attractor ; (e) φ_2 -direction 2-scroll attractor attractor ; (f) φ_2 -direction 3-scroll attractor

6 NIST 测试

在密码学领域，混沌序列的随机性与不可预测性是两项关键指标，可直接影响系统的安全强度。NIST 测试主要是用于验证混沌系统能否产生真正的随机序列或伪随机序列。NIST SP 800-22 测试套件是目前

评估序列随机性的常用工具，包含 15 项独立测试。P-value 是衡量序列随机性的重要指标。通常认为，当 P-value ≥ 0.01 时，则通过检验，表明序列具有随机性。P-value 的计算范围在 $[0, 1]$ 内，偏小表明序列的结果缺乏随机交替；偏大则表明序列存在周期性规律特征，其值越接近 0.5，序列的随机性越好。

设置参数 $a_1 = 1$, $b_1 = 0.001$, $c_1 = 1.35$, $d_1 = 1.6$, $N_1 = 5$, $a_2 = 1$, $b_2 = 0.001$, $c_2 = 1.35$, $d_2 = 1.6$, $N_2 = 5$ ，借助 MATLAB 生成 200 组长度为 100 万比特的二进制混沌序列。表 2 列出了 NIST 测试结果，从表中可以看出，15 项测试均成功通过，且通过率较高，此结果也表明该系统满足密码学应用中对随机序列的要求，适用于图像加密等应用场景。

表 2 NIST 测试结果与通过率对比

Table 2. Comparison of NIST test results and pass rates

测试项	本文		文献 ^[26]		文献 ^[27]	
	P-value	通过率	P-value	通过率	P-value	通过率
频率测试	0.0414	99.00%	0.7444	—	0.7565	99.17%
块内频率测试	0.2557	99.00%	0.9225	—	0.3115	97.50%
累积和测试	0.6579	98.00%	0.8462	—	0.5852	100.00%
游程/运行测试	0.6579	99.50%	0.0317	—	0.1347	98.33%
最长游程测试	0.0966	99.50%	0.9708	—	0.9761	98.33%
矩阵秩测试	0.0288	99.00%	0.7872	—	0.0635	100.00%
傅里叶变换测试	0.1917	99.50%	0.0575	—	0.1223	100.00%
非重叠模板匹配	0.0352	99.50%	0.9716	—	0.0742	98.33%
重叠模板匹配	0.1816	97.50%	0.8648	—	0.8486	100.00%
通用测试	0.6059	100.00%	0.8861	—	0.9705	97.50%
近似熵测试	0.3925	97.84%	0.2416	—	0.1865	96.67%
随机游走测试	0.1846	98.56%	0.0500	—	0.7061	98.33%
随机游走变体	0.0174	99.50%	0.0673	—	0.7399	98.43%
序列测试	0.4466	98.00%	0.9691	—	0.1481	100.00%
线性复杂度	0.2077	99.50%	0.9374	—	0.8881	100.00%

表 2 还列出了本文与其它文献的 NIST 测试结果对比。可以看出，与文献^[26]相比，该系统在多项测试中的 P-value 更接近 0.5，表明其随机性更优。与文献^[27]相比，该系统在 8 项中表现出更接近 0.5 的 P-value，且在 8 项中表现出更大的通过率。这一结果说明了该系统具备良好的安全冗余度，并能更有效

地抵御已知明文/密文下的统计攻击。

7 结论

本文设计了一种新型忆阻模型，分别将其作为神经元自突触与互突触权重，构建了一个全新的忆阻 Hopfield 神经网络。与以往采用多项式生成可控多双涡卷吸引子的忆阻模型不同，本模型不包含任何多项式，从而避免了庞大电路的构建。本文对吸引子产生的多双涡卷结构的生成方式与产生机理进行实验分析，结果表明：忆阻器的引入不仅能够借助其控制参数来调控多双涡卷的数量，还能通过拓展忆阻突触数目来扩展其生成方向。MATLAB 数值仿真验证了该系统具有初始偏移增强动力学行为，且吸引子数量可由忆阻模型控制参数决定。此外，该系统还可表现出鲁棒混沌特性，适用于安全通信等领域。NIST 测试结果证实其随机性良好，表明在图像加密等方面具有应用潜力，验证了该系统潜在的应用价值。最后，基于 FPGA 的数字电路实现验证了该系统设计的合理性，为实际工程应用提供了基础。

参考文献

- [1] Lin H R, Wang C H, Yu F, Sun J R, Du S C, Deng Z K, Deng Q L 2023 *Math.* **11** 1369
- [2] Hu B, Guan Z H, Chen G R, Chen C L P 2021 *IEEE Trans. Cybern.* **52** 10214
- [3] Bao B C, Zhou C L, Bao H, Chen B, Chen M 2025 *Chaos, Solitons Fractals* **194** 116234
- [4] Song R, Chen L, Li C D, Zeng X Y 2026 *Acta Phys. Sin.* **75** 7 (in Chinese) [宋润, 陈玲, 李传东, 曾晓洋 2026 物理学报 **75** 7]
- [5] Bao H, Ding R Y, Liu X F, Xu Q 2024 *Integration* **96** 102164
- [6] Wan Z Q, Pu Y F, Lai Q 2025 *Neural Networks* **188** 107473
- [7] Wu H G, Bian Y X, Chen M, Xu Q 2024 *J. Electron. Inf. Technol.* **46** 3818 (in Chinese) [武花干, 边逸轩, 陈墨, 徐权 2024 电子与信息学报 **46** 3818]
- [8] Zhang S, Li Y X, Wang X P, Zeng Z G 2024 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **72** 2024
- [9] Jia M M, Cao J W, Bai M M 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 41 (in Chinese) [贾美美, 曹佳伟, 白明明 2024 物理学报 **73** 41]

- [10] Wang X, Du J R, Li Z J, Ma M L, Li C L 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 26 (in Chinese) [王璇, 杜健嵘, 李志军, 马铭磷, 李春来 2024 物理学报 **73** 26]
- [11] Li X X, Qiu D, Chen S Q, Luo M, Liu S 2024 *Electron. Compon. Mater.* **43** 1264 (in Chinese) [李旭鑫, 邱达, 陈世强, 罗敏, 刘嵩 2024 电子元件与材料 **43** 1264]
- [12] Li X X, Luo M, Zhang B, Liu S 2025 *Chaos, Solitons Fractals* **199** 116657
- [13] Yu F, Kong X X, Yao W, Zhang J, Cai S, Lin H R, Jin J 2024 *Chaos, Solitons Fractals* **179** 114440
- [14] Wan Q Z, Chen S M, Yang Q, Liu J, Sun K L 2023 *Nonlinear Dynamics* **111** 18505
- [15] Liu S, Li Z H, Qiu D, Luo M, Lai Q 2026 *J. Electron. Inf. Technol.* **48** 417 (in Chinese) [刘嵩, 李子涵, 邱达, 罗敏, 赖强 2026 电子与信息学报 **48** 417]
- [16] Lai Q, Wan Z Q, Zhang H, Chen G R 2022 *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* **34** 7824
- [17] Qin M H, Lai Q 2023 *Optik* **272** 170407
- [18] Xue Y B, Tong D B, Chen Q Y, Mao Q 2025 *Appl. Math. Mech.* **46** 1622 (in Chinese) [薛彦斌, 童东兵, 陈巧玉, 毛琦 2025 应用数学和力学 **46** 1622]
- [19] Wang L M, Cheng J J, Hu C, Zhou Y J, Ge M F 2023 *J. Electron. Inf. Technol.* **45** 2667 (in Chinese) [王雷敏, 程佳俊, 胡成, 周映江, 葛明峰 2023 电子与信息学报 **45** 2667]
- [20] Lin H R, Wang, C H, Xu C, Zhang X, Herbert H C I 2022 *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.* **42** 942
- [21] Yu F, Shen H, Yu Q L, Kong X X, Sharma P K, Cai S 2022 *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* **10** 845
- [22] Hu Z H, Zhao Z Z 2025 *Mathematics* **13** 3972
- [23] Zhang S, Chen C J, Zhang Y Z, Cai J M, Wang X P, Zeng Z G 2024 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **55** 735
- [24] Lai Q, Xu Y D 2025 *J. Fujian Norm. Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **41** 1 (in Chinese) [赖强, 徐雨笛 2025 福建师范大学学报 (自然科学版) **41** 1]

- [25] Chua L 2003 *IEEE Trans. Circuit Theory* **18** 507
- [26] Zhang L, Li Z Y, Yang Z L, Liu D 2026 *Acta Phys. Sin.* **75** 7 (in Chinese) [张力, 李中意, 杨宗立, 刘丹 2026 *物理学报* **75** 7]
- [27] Lai Q, Xu Y D, Fortuna L 2025 *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* **36** 18805

Dynamical Analysis and Implementation of Multi-Double-Scroll Memristive Hopfield Neural Networks*

LI Zihan¹⁾²⁾ LUO Min¹⁾²⁾ QIU Da¹⁾²⁾ YANG Ting¹⁾²⁾ LIU Song¹⁾²⁾†

1) (*College of Intelligent Systems Science and Engineering, Hubei Minzu University, Enshi 445000, China*)

2) (*Key Laboratory of Green Manufacturing of Super-light Elastomer Materials of State Ethnic Affairs Commission, Hubei Minzu University, Enshi 445000, China*)

Recent research on multi-double-scroll memristive Hopfield neural networks has attracted considerable attention, and significant progress has been made. However, most existing models rely on a single memristor for regulation, yielding unidirectional multi-double-scroll chaotic attractors. Moreover, current systems are typically constructed using polynomial-based memristor models, in which the number of scrolls varies with the number of polynomial terms. Although such approaches allow programmable control of scroll count, their complex mathematical formulations hinder further application.

To overcome this limitation, this study proposes a new memristor model based on piecewise functions, which is incorporated into a Hopfield neural network as both a self-synaptic and an inter-synaptic weight.

* fund: China University Industry-University-Research Innovation (Grant No. : 2024IT118) and Hubei Provincial Natural Science Joint Foundation (Grant No. : 2026AFC0242)

† Corresponding author. E-mail: liusong@hbmzu.edu.cn

The First Author. E-mail: 202430345@hbmzu.edu.cn

Theoretical analysis shows that the proposed memristive Hopfield neural network can generate an arbitrary number of multi-double-scroll attractors, and the scroll count can be flexibly adjusted via the memristor's control parameters. In addition, the model can be extended by adding more memristive synapses to construct higher-dimensional networks, demonstrating flexibility and generality.

The nonlinear dynamics of the system are investigated using bifurcation diagrams, Lyapunov exponent spectra, phase portraits, and basins of attraction. Results indicate that the system can produce grid-style multi-double-scroll chaotic attractors, where the total number of scrolls equals the product of the scroll counts generated along each of the two directions. Further analysis reveals that the system exhibits initial-offset-enhanced coexisting attractors: varying only the initial condition of the memristor yields multiple chaotic attractors with identical shapes but shifted positions. The number of these coexisting attractors can also be controlled via parameters, indicating the presence of super-multistability.

The chaotic sequences generated by the network pass all 15 tests of the NIST SP 800-22 statistical suite, with p-values above 0.01, confirming their randomness and unpredictability for cryptographic applications such as image encryption and secure communication. Comparative results with recent studies show that the proposed system achieves p-values closer to 0.5 and relatively high pass rates across multiple tests, demonstrating satisfactory randomness.

Finally, the proposed system is implemented on an FPGA platform using SOPC technology and the Euler discretization method. Oscilloscope measurements agree well with MATLAB numerical simulations, verifying its physical realizability and feasibility.

Keywords: Memristive Hopfield neural network, Multi-double-scroll chaotic attractor, Co-existing attractors, FPGA hardware implementation