

球形动态界面的弹性 Rayleigh-Taylor 不稳定性*

鲁怡展¹⁾ 孙渊博^{2)†} 邹立勇¹⁾

1) (中国工程物理研究院流体物理研究所, 冲击波物理与爆轰物理全国重点实验室, 绵阳 621999)

2) (北京理工大学, 爆炸科学与安全防护全国重点实验室, 北京 100081)

摘要

球形内爆是惯性约束聚变及武器物理研究中实现极端压缩的核心过程, 其特有的几何收缩效应使得界面失稳的演化规律比平面情形更加复杂. 针对这一物理问题, 引入势流模型与弹性本构方程, 推导并数值求解了控制球形界面运动和稳定性的耦合方程, 探讨了材料弹性与外部驱动压力对界面演化和扰动增长的影响. 结果表明, 随着剪切模量和驱动压力增大, 界面振荡频率增加, 弹性抑制了界面收缩幅值, 外部压力则起到相反的促进作用. 引入了扰动增长函数量化扰动振幅增长情况, 结果表明增加外部压力会加剧短波长扰动, 而弹性对短波长扰动具有抑制作用, 且扰动增长存在截止模态及相应的截止剪切模量. 进一步, 通过分析外部压力和剪切模量参数空间内界面失稳情况, 发现扰动模数增大能扩展保持界面稳定的参数范围, 提高诱发界面失稳所需的临界驱动压力. 最后, 通过将理论模型和数值模拟结果比较, 证实了该模型在捕捉复杂介质界面动力学特征方面的有效性. 本研究深化了对动态球形收缩几何中 Rayleigh-Taylor 不稳定性的理解, 并为进一步探索非线性扰动增长及材料弹塑性转变提供了有用的理论框架.

关键词: Rayleigh-Taylor 不稳定性, Bell-Plesset 效应, 球形几何, 弹性

PACS: 47.20.Ma, 52.57.Fg, 47.15.km

基金: [科学挑战专题 \(批准号: TZ2025016\)](#) 和国家自然科学基金 (批准号: 12472397, 92052108) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: sunyb@bit.edu.cn

第一作者. E-mail: luyizhan22@gscaep.ac.cn

1 引言

Rayleigh-Taylor(RT)不稳定性是指轻介质支撑或加速重介质时扰动界面的失稳增长过程^[1,2], 广泛存在于惯性约束聚变(inertial confinement fusion, ICF)^[3-5]、高能量密度物理^[6-8]和天体物理^[9]等研究领域.在 ICF 中, 通过内爆压缩燃料靶丸产生极端物理条件以诱发聚变反应, RT 不稳定性的演化会破坏靶丸内部多界面壳层结构的压缩对称性, 加剧冷热等离子体混合, 严重削弱内爆效率并降低聚变产额^[10,11].因此, RT 不稳定性是决定 ICF 点火成功的关键因素之一.

然而, 在 ICF 压缩的早期阶段, 靶丸处于高压但尚未完全等离子化的固体或致密态, 这使得传统的理想流体模型不再适用, 此时固体的强度效应成为不可忽视的影响因素.在极端物理条件下, 受加速的固体界面会诱发 RT 不稳定性, 而固体材料的本构特性(如弹性、塑性、弹塑性和黏弹性等)可以减轻扰动的增长^[12,13], 这种抑制机制也常被用作反演材料在高应变和应变率下物理性质的重要工具^[14-17].固体 RT 不稳定性的显著特点是存在截止波长, 即低于该波长时界面扰动将受到完全抑制.针对线弹性材料固液及固固界面的 RT 不稳定性演化过程, Terrones^[18]推导出描述扰动增长率精确渐进解, 然而受限于数学复杂性不能描述真实存在的弹塑性转变.因此, 势流方法被广泛应用于研究弹塑性转变规律.例如: Piriz 等^[19]采用势流理论建立了弹塑性平板与无黏流体界面的 RT 不稳定性增长模型, 给出了扰动振幅随时间演化的完整解析解, 通过对不稳定性阈值的分析发现, 即使材料局部发生了塑性屈服, 只要初始扰动振幅未超过临界值, 弹性力仍可起到使界面保持稳定的作用.

为了增强内爆压缩性, 常见的工程应用中通常采用具有高对称度的球形或柱形等向心汇聚构型^[20,21].圆柱构型包含电磁驱动圆柱套筒 Z-箍缩实验(美国 Sandia 国家实验室^[22])、高能重离子束驱动的行星科学实验(德国 LAPLAS 实验室

[23])等, 而球面构型则在激光驱动 ICF(美国国家点火装置^[11]、中国神光系列装置^[24])、水下爆炸^[25]等背景下进行研究.此时几何收缩效应成为 RT 不稳定性分析中不可忽视的因素, 当界面发生运动, Bell-Plesset(BP)效应会改变汇聚构型下的 RT 不稳定性演化^[26,27], 扰动幅值在界面半径收缩的同时进一步增长.因此, 柱形或球形构型中的 RT 不稳定性演化规律已成为理解常见工程问题的重要理论基础, 特别是在涉及极端条件下复杂本构特性的材料研究中^[28-30].近期, Blinnikov 等^[31]进行了高能炸药爆轰驱动多层金属壳层向心内爆实验, 实现了压力高达百 Mbar 的超高压准等熵压缩, 实验观测显示向心内爆减速阶段金属界面会产生剧烈的 RT 与 Richtmyer-Meshkov(RM)不稳定性, 其结果表明固体中流体力学不稳定性导致的几何结构三维非对称演化是限制超高压形成的关键因素.此外, 金属材料固有的非线性弹塑性本构特征进一步增加了汇聚几何下尖钉演化的复杂性^[32,33].上述研究充分表明, 深入探讨含几何效应的固体界面不稳定性具有重要的科学意义.

在此背景下, 针对球柱构型下界面 RT 失稳规律的研究已初步展开.Terrones 等^[13,34]研究了黏性流体界面的球形 RT 不稳定性, 获得了静止界面下的最不稳定的模态, 并揭示了曲率效应对扰动增长率的抑制作用以及黏性对扰动振幅的阻尼效应.针对强度介质, Sun 等^[20,35]在静止界面假设下建立了球形及柱形几何下固体界面弹性 RT 不稳定性问题的理论分析模型, 发现几何曲率效应对截止波长及截止半径具有显著影响, 且低阶扰动模态在汇聚几何中表现出与平面构型截然不同的演化特征.最近, Piriz 等^[36,37]进一步考虑了内爆滞止阶段 BP 效应对柱面 RT 不稳定性的影响, 建立了弹塑性 RT 不稳定性临界振幅判据, 由于球柱收缩流场结构不同, 研究柱形问题时通常需要引入有限外边界尺度, 外部约束条件将对柱形 RT 演化规律产生影响.在此基础上, Wang 等^[38]定量分析了黏性、弹性材料本构性质对柱面 RT 不稳定性扰动增长的调控作用.这些研究将人们对柱形界面的研

究从静止推向动态.

上述研究多集中于圆柱构型, 而球形构型并非圆柱构型的简单维数推广, 二者的物理规律存在差异;且鉴于球形内爆实验诊断难度极高, 开展深入的理论研究显得尤为迫切.此外, 尽管对静态球形 RT 不稳定性规律已进行了初步探索, 但在动态界面演化过程中, 材料弹性与外部压力等因素如何影响不稳定性发展仍待明确.基于此, 本文基于势流理论框架, 采用柯西应力张量形式的弹性本构方程, 精准描述球形汇聚几何下介质的复杂应力状态, 研究了材料弹性与外部驱动压力对球形动态界面 RT 不稳定性的影响机制, 以期增强对含弹塑性效应固体界面稳定性的理解, 同时也为固体 RT 及 RM 不稳定性的非线性分析提供了关键的基础参考.

2 数学模型

考虑半径为 R_0 的球形界面, 其内部充满气体, 外部被半无限固体介质包围. 取界面未变形时的几何位置作为参考构形, 坐标原点设为球心处, 初始时刻外部介质中任一点的坐标 (X_1, X_2, X_3) 可用位置向量 $\mathbf{X}=\mathbf{r}_0$ 表示, 如图 1(a)所示.仅考虑界面径向变形时, 界面半径在 t 时刻变为 R , 与初始时刻对应的物质点的坐标变为 $\mathbf{x}'=\mathbf{r}_s(r_0, t)$, 如图 1(b)所示; 当界面引入振幅远小于波长 λ 的扰动后, 对应点的空间坐标 (x_1, x_2, x_3) 则随之演变为 $\mathbf{x}=\mathbf{r}(r_0, \theta, \varphi, t)$, 如图 1(c)所示.

界面变形前后构形的变化由变形梯度张量描述, 其在球坐标系中定义如下:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_0} & \frac{1}{r_0} \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{1}{r_0 \sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \\ 0 & \frac{r}{r_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{r_0} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

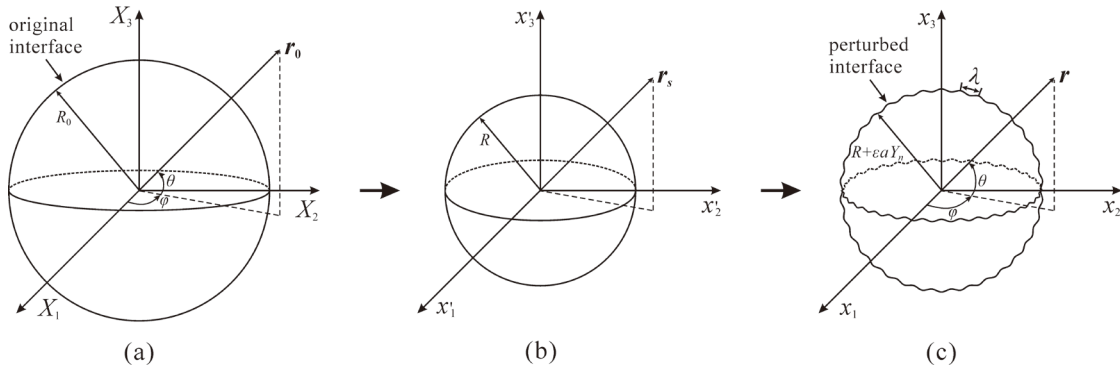


图1 界面变形过程的构形及坐标系示意图：

(a)初始参考构形；(b)球形构形；(c)扰动构形

Fig.1. Schematic of the configuration and coordinate system for the interface deformation process:

(a) Original reference configuration; (b) Spherical configuration; (c) Perturbed configuration

假设界面附近固体介质是不可压缩的，有

$$|\mathbf{F}| = 1. \quad (2)$$

此外，忽略流动内部产生的涡量，速度势 ϕ 在球坐标系中满足拉普拉斯方程，即

$\nabla^2 \phi = 0$ [27]. 当界面为理想球面时，固体介质中任意点的速度满足

$$\frac{u}{U} = \frac{R^2}{r^2}, \quad (3)$$

其中 U 是球面速度，等于半径 R 对时间的导数 R' . 受扰动影响的界面可以用以下方程描述：

$$r = R + \epsilon a Y_n, \quad (4)$$

其中 $0 < \epsilon \ll 1$ ，随后的分析仅考虑一阶项； a 是扰动振幅， $Y_n(\theta, \varphi)$ 为 n 阶球谐勒让德函数，其满足

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2} = -n(n+1) Y_n. \quad (5)$$

考虑方程(2)和方程(4)，通过在界面处积分可得到以下表达式：

$$r_s = (r_0^3 + R^3 - R_0^3)^{\frac{1}{3}}, \quad (6)$$

$$r = (r_0^3 + R^3 + 3R^2 \epsilon a Y_n - R_0^3)^{\frac{1}{3}}. \quad (7)$$

通过将方程(4)对时间求导，推导出固体介质表面处的径向速度边界条件如

下:

$$u = R' + \varepsilon a' Y_n. \quad (8)$$

根据拉普拉斯方程的通解及相应的条件方程(3)和方程(8),可积分得外部固体介质的速度势为

$$\phi = \frac{R^2 R'}{r} + \frac{\varepsilon R^{n+2}}{(n+1)r^{n+1}} Y_n \left(a' + 2a \frac{R'}{R} \right). \quad (9)$$

对于胡克固体,根据广义胡克定律,介质的柯西应力张量为^[39]

$$\mathbf{T} = G(\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - (2G + \mathcal{P})\mathbf{I}, \quad (10)$$

其中 G 是弹性固体的剪切模量, $\mathcal{P}$ 是伪压力, $\mathbf{I}$ 是单位张量.则界面外弹性介质的柯西应力张量可写为

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2G \frac{\partial r}{\partial r_0} - 2G - \mathcal{P} & G \frac{1}{r_0} \frac{\partial r}{\partial \theta} & G \frac{1}{r_0 \sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \\ G \frac{1}{r_0} \frac{\partial r}{\partial \theta} & 2G \frac{r}{r_0} - 2G - \mathcal{P} & 0 \\ G \frac{1}{r_0 \sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \varphi} & 0 & 2G \frac{r}{r_0} - 2G - \mathcal{P} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

扰动表面满足方程 $\Sigma \equiv r - R - \varepsilon a Y_n = 0$.因此,球体表面任意一点的单位法向量为

$$\mathbf{n}_s = \mathbf{e}_r - \varepsilon \frac{a}{r} \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \varepsilon \frac{a}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (12)$$

因此,弹性介质柯西应力张量的法向分量 T_{nn} 和径向分量 T_{rr} 的一阶近似为

$$T_{nn} = T_{rr} = 2G \frac{r_0^2}{r^2} - 2G - \mathcal{P}, \quad (13)$$

其中 r_0 和 r 在界面处分别等于 R_0 和 $R + \varepsilon a Y_n$,而在无穷远处 $r_0/r = 1$.固体介质的动量平衡方程可以写为

$$\rho \mathbf{a}_s = \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (14)$$

其中 ρ 是固体介质的密度, $\mathbf{a}_s$ 是固体介质的加速度矢量.仅考虑半径方向分量有

$$(a_s)_r = \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right), \quad (15)$$

$$(\nabla \cdot T)_r = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \cot \theta \frac{T_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial \varphi}. \quad (16)$$

通过将方程(5)(9)(11)(15)和(16)代入方程(14)，从球面积分到无穷远处，可得

$$\begin{aligned} & \rho \left(RR'' + \frac{3}{2} R'^2 \right) + \rho \varepsilon Y_n \frac{Ra'' + 3R'a' - (n-1)R''a}{n+1} \\ &= \mathcal{P}(s) - \mathcal{P}(\infty) - \frac{n(n+1)}{2} \frac{\varepsilon a Y_n G}{R} \frac{1 + \frac{R_0}{R}}{1 + \frac{R_0}{R} + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\mathcal{P}(\infty)$ 是无穷远处的伪压力，等于界面外部压力 p_e ； $\mathcal{P}(s)$ 是界面处的伪压力，

可以通过将方程(13)代入界面法向应力平衡方程来求解，如下所示：

$$p_i - p_s = \frac{2\sigma}{R} + \frac{(n-1)(n+2)}{R^2} \varepsilon a Y_n, \quad (18)$$

其中 σ 是表面张力系数， p_s 是界面处弹性介质侧的压力， p_i 是界面内部的压力，考

虑球面内部填充均匀理想气体，对于绝热过程有

$$p_i = p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa}, \quad (19)$$

其中 p_0 是初始时刻内部气体压力， κ 是绝热指数，且能够证明界面的扰动不会使球

形体积发生变化.因此，方程(17)可写为

$$\begin{aligned} & \rho \left(RR'' + \frac{3}{2} R'^2 \right) + \rho \varepsilon Y_n \frac{Ra'' + 3R'a' - (n-1)R''a}{n+1} \\ &= 2G \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - 1 \right] + (p_i - p_e) - \frac{2\sigma}{R} \\ &+ \frac{\varepsilon a Y_n}{R} \left[-4G \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - \frac{(n-1)(n+2)\sigma}{R} - \frac{n(n+1)G}{2} \frac{1 + \frac{R_0}{R}}{1 + \frac{R_0}{R} + \left(\frac{R_0}{R}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

上式与 Y_n 无关的项描述了弹性固体包围的球形界面运动：

$$RR'' + \frac{3}{2} R'^2 = \frac{2G}{\rho} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - 1 \right] + \frac{(p_i - p_e)}{\rho} - \frac{2\sigma}{\rho R}. \quad (21)$$

扰动界面的稳定性方程则由与 Y_n 成比例的项确定：

$$a'' + 3 \frac{R'}{R} a' - a \left\{ (n-1) \frac{R''}{R} - \frac{(n-1)(n+1)(n+2)\sigma}{\rho R^3} - \frac{(n+1)G}{\rho R^2} \left[4 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 + \frac{n(n+1)}{2} \frac{1 + \frac{R_0}{R}}{1 + \frac{R_0}{R} + \left(\frac{R_0}{R} \right)^2} \right] \right\} = 0. \quad (22)$$

可以看到，扰动振幅演化依赖于 R, R', R'' 的变化。

为了简便分析，引入以下无量纲量：

$$\tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \tilde{R} = \frac{R}{R_0}, \tilde{a} = \frac{a}{R_0}, \tilde{p} = \frac{p\tau^2}{\rho R_0^2}, \tilde{G} = \frac{G\tau^2}{\rho R_0^2}, \quad (23)$$

其中 τ 是特征时间尺度，无量纲量 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{G}$ 分别表示压力和弹性力相对于惯性力的大小。在高能量密度物理领域，由于物质处于极端高温状态，界面处分子间的相互作用消失，表面张力效应难以维持，通常忽略与 σ 相关的项^[40]。因此，界面运动和界面扰动特征的无量纲方程可以表示为

$$\tilde{R}\tilde{R}'' + \frac{3}{2}\tilde{R}'^2 = 2\tilde{G}(\tilde{R}^{-2} - 1) + \tilde{p}_0\tilde{R}^{-3\kappa} - \tilde{p}_e, \quad (24)$$

$$\tilde{a}'' + 3 \frac{\tilde{R}'}{\tilde{R}} \tilde{a}' - \tilde{a} \left[(n-1) \frac{\tilde{R}''}{\tilde{R}} - (n+1) \tilde{G} \tilde{R}^{-2} \left(4\tilde{R}^{-2} + \frac{n(n+1)}{2} \frac{1 + \tilde{R}^{-1}}{1 + \tilde{R}^{-1} + \tilde{R}^{-2}} \right) \right] = 0, \quad (25)$$

方程(25)可以通过变量替换

$$\tilde{a} = \tilde{\alpha} \exp \left(\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} -\frac{3\tilde{R}'}{2\tilde{R}} d\tilde{t} \right) = \tilde{R}^{-\frac{3}{2}} \tilde{\alpha}, \quad (26)$$

简化为

$$\tilde{\alpha}'' - \tilde{I} \tilde{\alpha} = 0, \quad (27)$$

其中扰动增长函数

$$\tilde{I} = \frac{3}{4} \left(\frac{\tilde{R}'}{\tilde{R}} \right)^2 + (n + \frac{1}{2}) \frac{\tilde{R}''}{\tilde{R}} - (n+1) \tilde{G} \tilde{R}^{-2} \left(4\tilde{R}^{-2} + \frac{n(n+1)}{2} \frac{1 + \tilde{R}^{-1}}{1 + \tilde{R}^{-1} + \tilde{R}^{-2}} \right). \quad (28)$$

对于此类二阶常微分方程，界面的稳定性依赖于函数 $\tilde{I}$ 。当 $\tilde{I} < 0$ 时，扰动是

稳定振荡的，而若 $\tilde{F} > 0$ ，扰动则存在指数增长的不稳定解。此外，为了验证该理论模型的可行性，本文参考了Chang等^[30]关于球形汇聚几何RT不稳定性的模拟，并在3.3节中比较分析了本文模型与相同参数下的数值结果。

3 结果与讨论

在前文中已推导出考虑弹性和驱动压力的内爆界面运动及其稳定性耦合方程。由以上方程可以看出，与平面构型相比，汇聚构型下界面扰动不再是在固定几何背景上演化。对于平面弹性 RT 不稳定性，扰动主要在给定波长下由法向加速度诱发的不稳定性增长与弹性力相互竞争；而在汇聚构型中，界面半径的变化会直接进入外部流场和界面扰动方程，使扰动演化还受到几何效应的影响。进一步，球形构型与柱形构型间也存在本质差异。在数学结构上，对于未扰动的外部流场，球形径向收缩过程满足式(3)中 $r^2 u = R^2 R'$ ，而柱形情形则满足 $ru = RR'$ ，即球形速度场随 r^2 衰减，柱形速度场随 r^1 衰减。这表明柱形界面向轴线汇聚，而球形界面向中心点汇聚，后者具有更强的三维向心收缩特征。相应地，在界面变形关系上，柱形构型对应 $r^2 - R^2 = r_0^2 - R_0^2$ ，而本文球形构型对应式(6)三次方关系 $r^3 - R^3 = r_0^3 - R_0^3$ ，因此球形构型下介质应力对界面半径变化更加敏感，从而使球形扰动演化方程中的弹性项表现出比柱形更明显的半径相关性。从扰动演化方程看，柱形动态界面中的 BP 几何项通常表现为 $2R'a'/R$ ，本模型中该项在式(22)中表现为 $3R'a'/R$ ，说明球形界面的半径变化对扰动振幅具有更显著的几何影响。因此球形弹性 RT 不稳定性不能看作平面问题的简单曲率修正，也不能由柱形结果直接类推，其物理图像应理解为动态球面上扰动在两角向方向同时受到几何压缩，并在 BP 效应和三维弹性力共同作用下演化。

在本节中，对方程(24)、(25)和(28)进行数值求解，系统探讨弹性本构特性与

外部驱动压力对界面运动及扰动演化的影响. 该方法能够为进一步探索球形几何结构中弹塑性转变提供理论指导, 对深入分析内爆物理中动态界面行为具有重要意义. 假设界面经历瑞利塌缩 (Rayleigh collapse), 周围介质的压力在初始时刻瞬间增加到 $\tilde{p}_e$, 界面因此即刻发生运动. 通过取 $\tilde{p}_0 = 1$, 定义界面收缩的特征时间为 $\tau = R_0 \rho^{1/2} p_0^{-1/2}$. 考虑界面最初保持静止, 后文讨论的所有案例均采用统一的参数设置: 界面初始半径 $\tilde{R}_0 = 1$, 初始速度 $\tilde{R}'_0 = 0$, 初始扰动振幅 $\tilde{a}_0 = 0.001$, 初始扰动速度 $\tilde{a}'_0 = 0$; 考虑到内爆过程内部气体处于高温完全电离状态, 视其为单原子理想气体, 取绝热指数 $\kappa = 1.67$ [41].

3.1 弹性效应

由方程(24)可知, 界面运动行为与扰动模数 n 无关, 仅受 $\tilde{p}_e$ 和 $\tilde{G}$ 这两个独立的无量纲参数控制. 弹性对球形界面运动的影响如图 2 所示, 图 2(a)和(b)分别展示了驱动压力 $\tilde{p}_e = 20$ 时不同弹性参数 ($\tilde{G} = 5$ 和 50) 下界面半径 $\tilde{R}$ 、速度 $\tilde{R}'$ 和加速度 $\tilde{R}''$ 随时间的演化图像. 可以看到, 界面的运动会经历四个阶段: 加速收缩、减速收缩、加速膨胀和减速膨胀, 当界面半径处于波谷位置时, 界面速度经历由极小值向极大值的转变, 此时球形体积的高度压缩导致内部气体对界面施加的压力达到峰值, 从而在界面处产生了最大的正向加速度. 由于忽略了系统内部的能量耗散, 界面半径在其初始值以下经历恒定幅度的周期性振荡. 对比分析发现, 当固体介质的弹性增强时, 界面收缩受到抑制, 界面运动的速度和加速度显著降低, 其演变趋势趋于平缓. 此外, 弹性增加亦使界面运动周期缩短, 使半径振荡频率加快.

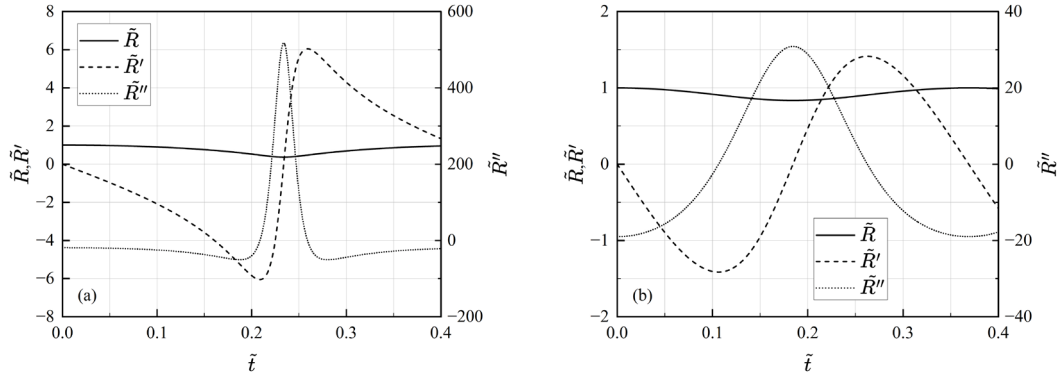


图 2 $\tilde{p}_e = 20$ 时不同弹性下界面半径、速度和加速度的时间演化: (a) $\tilde{G} = 5$; (b) $\tilde{G} = 50$

Fig. 2. Time evolution of interface radius, velocity and acceleration for various elasticity with

$\tilde{p}_e = 20$: (a) $\tilde{G} = 5$; (b) $\tilde{G} = 50$.

在本文模型线性理论框架中，扰动振幅 $\tilde{a}$ 实际上刻画了尖钉与气泡相对于界面半径 $\tilde{R}$ 的偏离程度，在线性扰动阶段尖钉和气泡保持相同的增长振幅、相反相位，因此下文所讨论的扰动振幅演化表征了其结构在早期阶段的相对位置变化。尖钉与气泡结构的形成本质上来源于线性阶段扰动增长的非对称发展，因此线性阶段扰动增长规律是理解后续尖钉和气泡非线性演化的理论基础。图 3 展示了在驱动压力 $\tilde{p}_e = 40$ 、剪切模量 $\tilde{G} = 5$ 的条件下，扰动模数 $n = 5, 10, 20, 35$ 和 50 时扰动振幅 $\tilde{a}$ 随时间的演化情况。在较低模态(如 $n = 5$)下，扰动幅度在初始值附近表现出稳定的振荡，界面扰动处于稳定状态。随着模数 n 的增大，振荡频率增加，其幅度在演化后期趋于指数增长。具体而言，当 n 增加至 10 和 20 时， $\tilde{a}$ 经历急剧增长，其量级较初始值显著增加，导致界面逐渐失稳。当达到高模态($n = 50$)时， $\tilde{a}$ 的演变重新恢复为稳定振荡，这意味着在从低模态到高模态的过渡过程中，必然存在一个最不稳定的模态，使扰动幅度增长最快。图 4 给出了图 3 对应条件下扰动增长函数 $\tilde{f}$ 的时间演化曲线。作为表征界面稳定性的核心物理量， $\tilde{f}$ 数值的正负决定扰动振幅的发展趋势，反映了界面的稳定性。初始时间范围内 $\tilde{f} < 0$ ，界面变形在数学上处于稳定区间，扰动幅度保持在初始值 $\tilde{a}_0$ 附近。在界面半径收缩到最小

值(本算例中 $\tilde{t} = 0.15$)附近时, 由于方程(28)中的几何项: $\frac{3}{4}\left(\frac{R'}{R}\right)^2$ 的增大导致 $\tilde{f}$ 短暂剧烈地增加. 一旦 $\tilde{f}$ 跨越零点变为正值, 界面即突破稳定性阈值而得以发展. 需指出的是, 在 $\tilde{f}$ 恰好从负变为正的時刻, 界面加速度仍有 $\tilde{R}'' < 0$, 即加速度方向依然指向几何中心. 在此阶段, 系统的失稳并非由加速度驱动, 尚未进入 RT 不稳定性区域, 而是源于半径 $\tilde{R}$ 的减小和速度 $|\tilde{R}'|$ 的增大, 由界面运动期间半径收缩与速度激增共同导致. 这种由几何收缩效应引起的扰动增强是球形汇聚几何的固有特征, 即 BP 效应. 随着演化继续发展, 在 $\tilde{f}$ 变正后的一段时间, 由于内部压力的增加, 向内加速度变为零后反向, 一段时间区间内加速度方向与界面运动方向保持相反, 标志着界面进入 RT 不稳定性范围, 界面扰动发展得更迅速. 此外, $\tilde{f}$ 方程中涉及弹性的第三项始终为负值, 表明弹性力起到减缓不稳定性发展的作用.

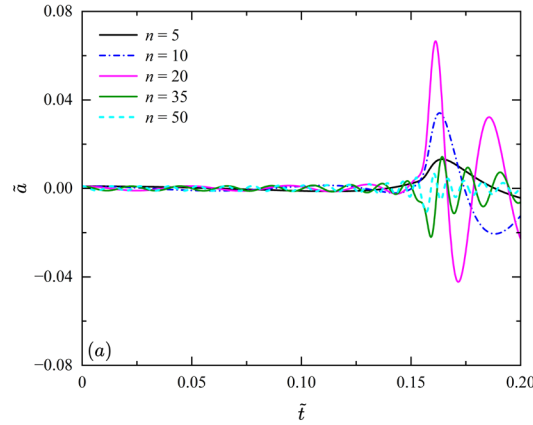


图 3 $\tilde{p}_e = 40$, $\tilde{G} = 5$ 时不同扰动模数下扰动振幅的时间演化

Fig. 3. Time evolution of perturbation amplitude for various perturbed modes with $\tilde{p}_e = 40$ and $\tilde{G} = 5$.

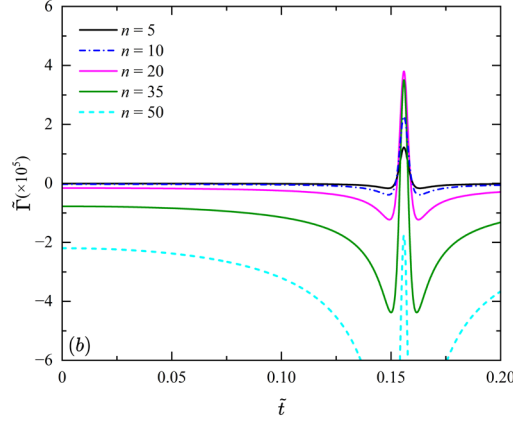


图 4 $\tilde{p}_e = 40$, $\tilde{G} = 5$ 时不同扰动模数下扰动增长函数 $\tilde{\Gamma}$ 的时间演化

Fig. 4. Time evolution of perturbation growth function $\tilde{\Gamma}$ for various perturbed modes with

$$\tilde{p}_e = 40 \text{ and } \tilde{G} = 5.$$

通过对比图 3 和图 4 的曲线峰值可知, 扰动振幅增长的程度与扰动增长函数的最大值 $\tilde{\Gamma}_m$ 呈正相关, $\tilde{\Gamma}_m$ 越大意味着扰动振幅的增长更剧烈. 例如当 $n = 20$ 时, 扰动幅度经历最显著的增长, 与之对应 $\tilde{\Gamma}_m$ 也处于最大值. $\tilde{\Gamma}_m$ 随模数 n 呈现先增大后减小的演化趋势, 并在跨越最不稳定模态后单调递减, 最终回归至稳定的负值区间. 通常而言, 扰动振幅的增速随模数 n 先增大后减小, 而振幅的振荡频率随模数 n 单调增加.

需要指出的是, 在球形几何中, 对于给定的扰动模数 n , 其无量纲等效波数可定义为 $\tilde{k}(t) = \frac{n}{\tilde{R}}$. 与平面几何不同, 球形构型下的波数伴随界面收缩而动态增大. 对比 $\tilde{R}$ 和 $\tilde{a}$ 的时间演化情况可以发现, 扰动振幅的快速失稳往往发生在半径收缩至最小值附近的时间窗口, 正对应于波数 $\tilde{k}$ 达到最大值的时刻. 从物理机制上看, 弹性力对不稳定性增长的抑制作用与波数的平方成正比, 对于相同的材料, 当界面收缩导致波数超过该状态下的临界波数时, 扰动即出现进一步增长, 这解释了为何界面往往在收缩后期失稳.

为了进一步量化弹性效应对扰动振幅的影响, 图 5 展示了当 $\tilde{p}_e = 40$ 条件下, $\tilde{G} = 4, 5, 6, 7$ 和 8 时 $\tilde{\Gamma}_m$ 随扰动模数 n 的演化规律. 结果表明, 在低模态范围

内, 弹性对扰动增长的抑制作用十分有限, 为了保持界面稳定性, 需要材料具有相对较高的剪切模量. 相反, 在高模态区域, 弹性显著抑制短波扰动. 随着剪切模量减小, $\tilde{f}_m$ 峰值向高模态数方向偏移, 表明需要更短的扰动波长来实现快速增长模式, 这在确定非线性演化起始方面具有重要参考价值. 鉴于最大增长率的扰动模态会导致界面对称性发生最严重的破坏, 对其进行深入研究具有重要的工程实际意义. 此外, 可以观察到球形界面扰动发展存在截止模态(cut-off mode), 即当模数 n 超过临界值后, $\tilde{f}_m$ 始终小于 0, 界面具有本征稳定性, 类似于其平面几何中出现截止波长的情况. 对于特定的扰动模数, 存在对应的弹性截止阈值, 即当材料的剪切模量超过该点时扰动完全被抑制. 增大弹性介质的剪切模量对抑制界面扰动发展有正向作用.

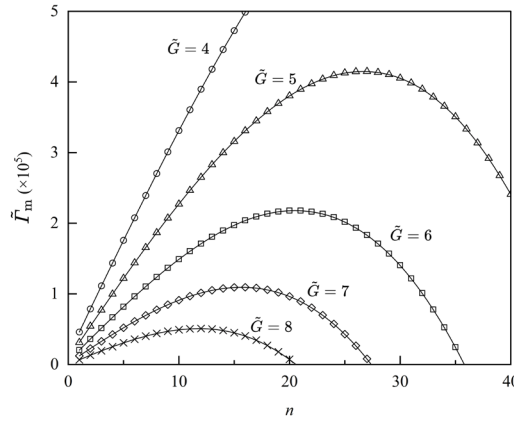


图 5 $\tilde{p}_e = 40$ 时不同剪切模量下扰动增长函数最大值随扰动模数的演化

Fig. 5. Evolution of the maximum perturbation growth function versus perturbed modes for various shear moduli with $\tilde{p}_e = 40$.

3.2 驱动压力效应

驱动压力同样是调控界面运动的关键因素. 图 6 展示了 $\tilde{G}=5$ 的条件下 $\tilde{p}_e=10, 30$ 和 50 时界面半径 $\tilde{R}$ 和速度 $\tilde{R}'$ 的时间演化图像. 与弹性力机制不同的是, 驱动压力在加速界面运动、提升内爆速度的同时, 会使界面收缩的频率更高. 图 7 给出了界面半径最小值 $\tilde{R}_{\min}$ 随驱动压力的变化曲线, 其中包含 $\tilde{G}=1, 10$ 和 20 等

三种情况.可以看到当压力较小时, 界面收缩的极限位置对介质弹性的敏感度很高, 材料的剪切强度是制约界面压缩深度的关键因素.随着外部压力增大, 界面最小半径逐渐趋于常数, 且该值受压力影响不大, 进一步增大压力对提升压缩深度的贡献大幅减弱, $\tilde{R}_{\min}$ 表现出饱和特性.

为进一步探究驱动压力对扰动振幅增长的影响, 在图 8 中展示了 $\tilde{G}=10$ 条件下, $\tilde{p}_e$ 分别为 55, 60, 65, 70 和 75 时 $\tilde{I}_m$ 随扰动模数 n 的演化情况.结果表明, 外部压力对低模态下的扰动增长率影响很小, 但显著促进了短波长扰动的增长.随着 $\tilde{p}_e$ 的增长, $\tilde{I}_m$ 峰值向高模态数方向偏移, 表明需要更短的扰动波长来实现快速增长模式.但与材料弹性对界面不稳定性的抑制作用不同, 驱动压力起到促进扰动振幅增长的作用.

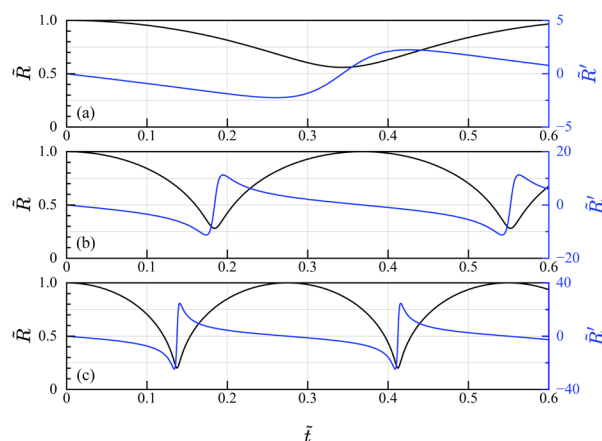


图 6 $\tilde{G}=5$ 时不同无量纲驱动压力下界面半径和速度的时间演化: (a) $\tilde{p}_e=10$; (b) $\tilde{p}_e=30$; (c) $\tilde{p}_e=50$

Fig. 6. Time evolution of interface radius and velocity for various dimensionless driving pressure with $\tilde{G}=5$: (a) $\tilde{p}_e=10$; (b) $\tilde{p}_e=30$; (c) $\tilde{p}_e=50$.

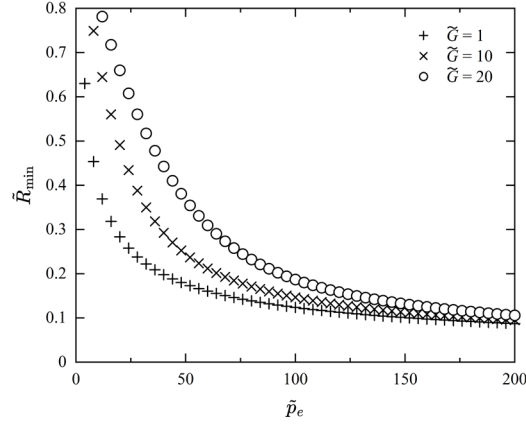


图 7 界面半径最小值随无量纲驱动压力的变化情况

Fig. 7. Variation of the minimum interface radius with dimensionless driving pressure.

图 9 展示了参数空间 $(\tilde{p}_e, \tilde{G}) \in [0, 100] \times [0, 10]$ 内扰动增长函数的最大值 $\tilde{\Gamma}_m$ 的分布情况, 模数 n 依次取 10, 20, 50 和 100. $\tilde{\Gamma}_m < 0$ 时界面扰动增长处于稳定区间内, 在图中 $(\tilde{p}_e, \tilde{G})$ 参数平面内以青色区域标出, 表示在该参数域内扰动不会失稳. 结果表明, 随着扰动模数的增大, 界面稳定的参数范围显著扩展, 意味着在介质弹性保持不变的前提下需要更高的外部驱动压力激活界面失稳. 例如 $\tilde{G} = 10$ 时, $\tilde{p}_e$ 的临界值由 40 提高至约 80. 然而, 在界面已发生失稳的情况下, 相同的 $(\tilde{p}_e, \tilde{G})$ 参数组合下 $\tilde{\Gamma}_m$ 可能与 n 呈正相关, 即虽然扰动模数增大使界面失稳变得困难, 但能够加速失稳情况下的扰动振幅发展.

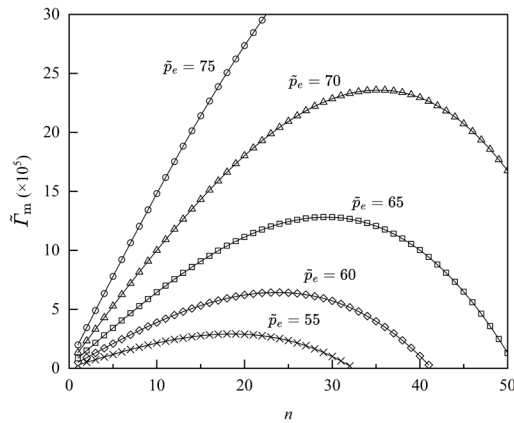


图 8 $\tilde{G} = 10$ 时不同无量纲驱动压力下扰动增长函数最大值随扰动模数的演化

Fig. 8. Evolution of the maximum perturbation growth function versus perturbed modes for various dimensionless driving pressure with $\tilde{G} = 10$.

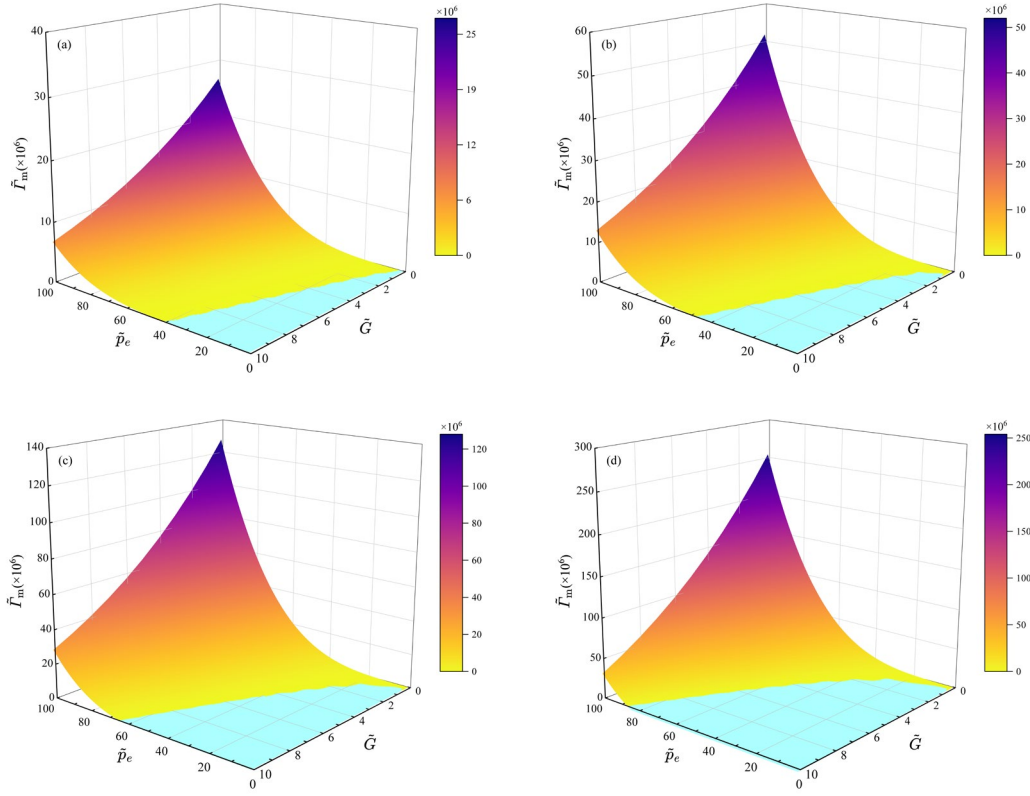


图 9 扰动增长函数最大值 $\tilde{I}_m$ 在 $\tilde{p}_e$ - $\tilde{G}$ 参数空间中的分布:

(a) $n = 10$; (b) $n = 20$; (c) $n = 50$; (d) $n = 100$

Fig. 9. Distribution of the maximum perturbation growth function $\tilde{I}_m$ in the $\tilde{p}_e$ - $\tilde{G}$ parameter space: (a) $n = 10$; (b) $n = 20$; (c) $n = 50$; (d) $n = 100$.

3.3 与模拟的比较

为了验证本文理论分析的正确性,将模型计算结果与 Chang 等^[30]关于球形内爆过程 RT 不稳定性的模拟结果进行了比较.在该模拟算例中,参数设定如下:

$p_0 = 3.3333 \times 10^8$ Pa, $p_{ex} = 3.3333 \times 10^9$ Pa, $\kappa = 5/3$ 和 $\rho = 2700$ kg/m³. 固体介质铝的剪切模量和屈服强度为 $G = 2.6 \times 10^{10}$ Pa 和 $Y = 3.25 \times 10^8$ Pa, 在模拟中采用了 von Mises 理想塑性模型. 扰动模数 $n = 28\pi$.

Chang 的模拟研究表明,界面演化过程主要受塑性主导,弹性阶段仅存在于向内运动初始阶段(0.503 μ s)、停滞期(6.000 到 6.500 μ s)以及周期结束时(13.502 μ s)等极短时间窗口.鉴于驱动压力较屈服强度高出一个数量级,为简化模型,一旦材料进入塑性区域,其力学行为将趋向于理想流体.在此假设下,方程(21)转换为以

下形式:

$$\rho(RR'' + \frac{3}{2}R'^2) = p_{in} - p_{ex}. \quad (29)$$

图 10 的对比结果验证了上述处理的合理性.如图 10(a)所示, 基于方程(21)弹性理论模型(虚线)和数值模拟结果(点线)在界面半径的振荡周期上保持了良好的一致性.尽管由于忽略了塑性耗散, 弹性模型显著低估了界面的最大径向位移, 但如图 10 中实线所示, 一旦演化进入塑性主导阶段, 模拟结果便与方程(29)描述的理想流体情形高度吻合.这归因于在整个内爆物理周期内, 塑性流动占据了界面运动演化的主导地位.上述结果进一步解释了弹塑性介质动力学的典型特征: 界面的振荡周期主要受材料弹性属性调控, 而位移幅值则由塑性变形决定.这一现象在平面几何下对弹塑性材料的 RT 与 RM 不稳定性研究中被观察到^[19,42].由此可见, 方程(21)与(29)分别代表了真实弹塑性响应的两个极端情形.数值模拟结果介于两条理论曲线之间, 不仅符合物理预期, 也验证了本文理论框架在捕捉复杂介质界面不稳定性特征方面的有效性.

如图 10(b)所示的界面速度演化也支撑了上述结论.此外, 通过对比扰动振幅的理论预测与模拟结果发现, 当应用本文纯弹性模型时, 扰动振幅在初始值附近呈现高频振荡, 由于本文模型忽略了塑性力导致系统出现过早的失稳倾向.相比之下, 模拟得到的扰动振幅与径向运动保持同频稳定振荡, 再次凸显了材料塑性在不稳定性研究中起着关键作用.需要指出的是, 本文模型采用纯弹性和不可压缩假设, 因此其预测结果适用于材料尚未发生明显塑性流动、扰动发展仍处于线性阶段且介质压缩性较弱的情形.在真实 ICF 或高能量密度内爆中, 若外部驱动压力超过材料屈服强度, 材料抵抗剪切变形的能力将弱于纯弹性模型, 塑性流动和塑性耗散会改变界面运动幅值及扰动振幅的演化规律.因此, 纯弹性模型可能高估弹性致稳作用和高模态截止能力, 从而在屈服后的非线性阶段低估短波扰动的增长;

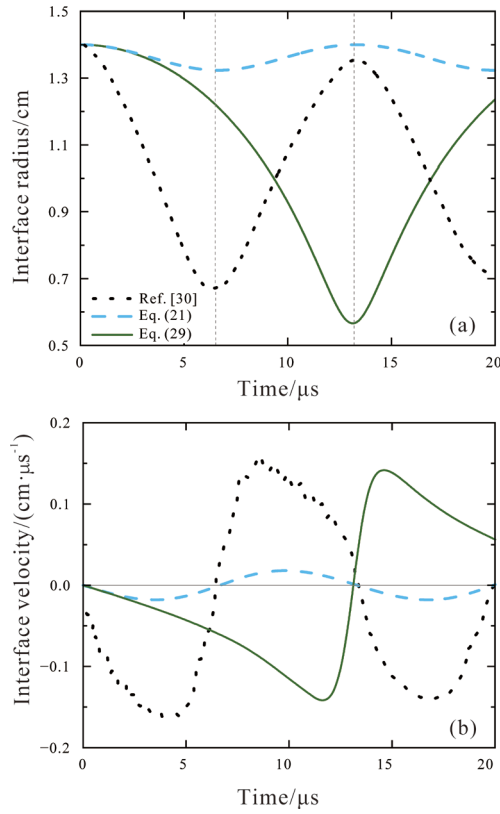


图 10 理论模型与模拟结果的对比：(a)界面半径的时间演化；(b)界面速度的时间演化

Fig.10. Comparison between theoretical model in this study and the simulation results:

(a) Interface radius versus time; (b) Interface velocity versus time.

同时，由于未包含塑性耗散，对界面反弹阶段的振荡幅值和相位也可能产生偏差。对于不可压缩假设而言，已有对汇聚几何 RT 不稳定性的研究表明，介质可压缩性通常会削弱 BP 几何汇聚效应对扰动增长的促进作用，而在弹性或黏性非理想介质中，几何汇聚效应对介质可压缩性更加敏感。因此，本文不可压缩模型可能高估几何汇聚项对扰动增长的贡献，尤其是在界面接近最小半径、压力升高和材料压缩性增强的阶段。综上所述，本文模型可以预测界面运动的频率，证实了弹性在很大程度上是决定界面运动的周期的主导因素，而理论预测值与模拟结果之间的偏差主要源于当前工作对材料塑性变形及流体可压缩性效应的简化处理。针对这些物理机制的耦合讨论，将作为后续研究工作的重点予以进一步完善。

4 结 论

本文采用势流理论研究球形内爆界面的 RT 不稳定性，建立了描述界面运动

和稳定性的耦合方程并进行了数值求解，深入分析弹性和外部驱动压力对界面行为的影响，得到以下主要结论：

(1) 界面运动行为与扰动模数 n 无关.界面运动经历加速收缩、减速收缩、加速膨胀和减速膨胀四个阶段，由于本文模型考虑纯弹性固体，界面半径显示出无阻尼的周期性振荡.弹性起到抑制界面收缩深度的作用，材料剪切模量 $\tilde{G}$ 越大，界面收缩受到的阻力越大，导致界面的最小半径 $\tilde{R}_{\min}$ 增大，限制了系统内爆阶段的极端压缩.此外，弹性增加会使界面运动周期缩短，半径振荡频率加快.驱动压力在加速界面运动、提升内爆压缩比的同时，会使界面收缩的频率更高.随着驱动压力增大， $\tilde{R}_{\min}$ 趋于常数，进一步提高压力对提升压缩深度的作用十分有限.

(2) 扰动振幅 $\tilde{a}$ 的增长存在随扰动模数增大先加快后减慢，直至稳定的特征，界面失稳存在最不稳定模式，且扰动增长是 BP 效应和 RT 不稳定性共同作用的结果，扰动增长程度与扰动增长函数最大值 $\tilde{f}_m$ 正相关.弹性有抑制不稳定性发展的作用，能够显著抑制短波区扰动.对于特定的扰动模数，存在截止剪切模量阈值，当材料的剪切模量超过该值时扰动完全被抑制.驱动压力则促进界面不稳定性发展，显著促进短波长扰动的增长.

(3) 对 $(\tilde{p}_e, \tilde{G})$ 参数空间内的界面不稳定性研究发现，扰动模数增大能够扩展保持界面稳定的参数范围，提高相同材料激活界面失稳所需的外部驱动压力.对于已失稳的参数组合，增大扰动模数则可能加速扰动发展.

(4) 通过与弹塑性数值模拟结果的对比较证，证实了本文模型在预测特征频率方面的准确性，并揭示了界面的运动周期主要由弹性性质决定，而半径变形幅值则取决于塑性变形引起的能量耗散.本文理论框架在捕捉复杂介质界面动力学特征方面具有有效性.

本工作为理解 ICF 及高能密度物理相关实验中的动态界面不稳定性规律提供

了基础理论框架.未来的研究将进一步扩展该模型,通过引入弹塑性转变与非线性效应, 以实现球形 RT 不稳定性演化过程更精确的物理描述.

参考文献

- [1] Rayleigh L 1882 *Proc. London Math. Soc.* **s1-14** 170
- [2] Taylor G I 1950 *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.* **201** 192
- [3] Zhou Y 2017 *Phys. Reports* **720** 1
- [4] Zhou Y 2017 *Phys. Reports* **723** 1
- [5] Zhou Y, Sadler J, Hurricane O 2025 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **57** 197
- [6] Sun J S 2009 *Adv. Mech.* **39** 460 (in Chinese) [孙锦山 2009 力学进展 **39** 460]
- [7] Park H S, Rudd R E, Cavallo R M, Barton N R, Arsenlis A, Belof J L, Blobaum K J M, El-dasher B S, Florando J N, Huntington C M, Maddox B R, May M J, Plechaty C, Prisbrey S T, Remington B A, Wallace R J, Wehrenberg C E, Wilson M J, Comley A J, Giraldez E, Nikroo A, Farrell M, Randall G, Gary G T 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 065502
- [8] Krygier A, Powell P D, McNaney J M, Huntington C M, Prisbrey S T, Remington B A, Rudd R E, Swift D C, Wehrenberg C E, Arsenlis A, Park H S, Graham P, Gumbrell E, Hill M P, Comley A J, Rothman S D 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 205701
- [9] Hester J J 2008 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **46** 127
- [10] Chen Z, Yuan Y T, Wang L F, Tu S Y, Miao W Y, Wu J F, Ye W H, Deng B, Deng K L, Hou L F, Wei M X, Li Y J, Yin C S, Dai Z S, Han X Y, Li Y S, Li Z Y, Zhang C, Pu Y D, Dong Y S, Yang D, Yang J M, Zheng W D, Zou S Y, Wang M, Ding Y K, Zhu S P, Zhang W Y, He X T 2024 *Phys. Rev. Lett.* **133** 135101
- [11] Hurricane O A, Patel P K, Betti R, Froula D H, Regan S P, Slutz S A, Gomez M R,

Sweeney M A 2023 *Rev. Mod. Phys.* **95** 025005

[12] Piriz A R, Sun Y B, Tahir N A 2014 *Phys. Rev. E* **89** 063022

[13] Terrones G, Carrara M D 2015 *Phys. Fluids* **27** 054105

[14] Yin J W, Pan H, Wu Z H, Hao P C, Duan Z P, Hu X M 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 204701 (in Chinese) [殷建伟, 潘昊, 吴子辉, 郝鹏程, 段卓平, 胡晓棉 2017 物理学报 **66** 204701]

[15] Li B Y, Peng J X, Gu Y, He H L 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 094701 (in Chinese) [李碧勇, 彭建祥, 谷岩, 贺红亮 2020 物理学报 **69** 094701]

[16] Chen H, Gan Y C, Peng J X, Yu Y Y, Hu J B 2024 *Adv. Mech.* **54** 771 (in Chinese) [陈涵, 甘元超, 彭建祥, 俞宇颖, 胡建波 2024 力学进展 **54** 771]

[17] Wang X, Peng J X, Hu X M, Yu Y Y, Hu J B, Yin J W, Pan H, Wu Z H 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 195202 (in Chinese) [王曦, 彭建祥, 胡晓棉, 俞宇颖, 胡建波, 殷建伟, 潘昊, 吴子辉 2025 物理学报 **74** 195202]

[18] Terrones G 2005 *Phys. Rev. E* **71** 036306

[19] Piriz A R, López Cela J J, Tahir N A 2009 *Phys. Rev. E* **80** 046305

[20] Sun Y B, Zeng R H, Tao J J 2020 *Phys. Fluids* **32** 124101

[21] Wang T, Wang B, Lin J Y, Zhong M, Bai J S, Li P, Tao G 2020 *Explosion And Shock Waves* **40** 052201 (in Chinese) [王涛, 汪兵, 林健宇, 钟敏, 柏劲松, 李平, 陶钢 2020 爆炸与冲击 **40** 052201]

[22] Springstead M P, LeFevre H J, Huegel I D, Loisel G P, Bailey J E, Klein S R, Schell J P, Drake R P, Kuranz C C 2026 *Phys. Plasmas* **33** 013301

[23] Tahir N A, Shutov A, Neumayer P, Bagnoud V, Piriz A R, Lomonosov I V, Piriz S A 2021 *Phys. Plasmas* **28** 032712

[24] Zheng W, Wei X, Zhu Q, Jing F, Hu D, Yuan X, Dai W, Zhou W, Wang F, Xu D, Xie X, Feng B, Peng Z, Guo L, Chen Y, Zhang X, Liu L, Lin D, Dang Z, Xiang Y, Zhang R, Wang F, Jia H, Deng X 2017 *Matter Radiat. Extremes* **2** 243

[25] Johnson E, Colonius T 2009 *J. Fluid Mech.* **629** 231

[26] Bell G I 1951 *Report No. LA-1321 LANL* **1321** 91873-9

- [27] Plesset M S 1954 *J. Appl. Phys.* **25** 96
- [28] Liu J, Feng Q J, Zhou H B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 155201 (in Chinese) [刘军, 冯其京, 周海兵 2014 物理学报 **63** 155201]
- [29] Velikovich A L, Schmit P F 2015 *Phys. Plasmas* **22** 122711
- [30] Chang C H, Douglass R W, 2020 *Physica D* **411** 132607
- [31] Blinnikov S I, Ilkaev R I, Mochalov M A, Mikhailov A L, Iosilevskiy I L, Yudin A V, Glazyrin S I, Golubev A A, Gryaznov V K, Fortova S V 2019 *Phys. Rev. E* **99** 033102
- [32] Piriz A R, López Cela J J, Piriz S A, Tahir N A 2023 *Phys. Rev. E* **108** 055102
- [33] Piriz A R, Piriz S A, Tahir N A 2023 *Phys. Rev. E* **107** 035105
- [34] Terrones G, Heberling T 2020 *Phys. Fluids* **32** 094105
- [35] Sun Y B, Zeng R H, Tao J J 2021 *Phys. Plasmas* **28** 062701
- [36] Piriz A R, Piriz S A, Tahir N A 2021 *Phys. Rev. E* **104** 035102
- [37] Piriz A R, Piriz S A, Tahir N A 2022 *Phys. Rev. E* **106** 015109
- [38] Wang Y W, Han H, Sun Y B, Zeng R H 2025 *Phys. Plasmas* **32** 022711
- [39] Hoger A, Johnson B E 1995 *J. Elast.* **38** 69
- [40] Drake R P, Davison L, Horie Y 2006 *High-Energy-Density Physics: Fundamentals, Inertial Fusion, and Experimental Astrophysics* (Springer Press) p172
- [41] Lindl J 1995 *Phys. Plasmas* **2** 3933
- [42] Piriz A R, López Cela J J, Tahir N A 2008 *Phys. Rev. E* **78** 056401

Elastic Rayleigh–Taylor instability of a spherical dynamic interface^{*}

LU Yizhan¹⁾ SUN Yuanbo^{2)†} ZOU Liyong¹⁾

1) (*National Key Laboratory of Shock Wave and Detonation Physics, Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621999, China*)

2) (*State Key Laboratory of Explosion Science and Safety Protection, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

Abstract

Spherical implosion is the core process for achieving extreme compression in inertial confinement fusion (ICF) and weapons physics research. Its inherent geometric convergence effects make the evolution of interface instabilities significantly more complex than in planar cases. To address this physical problem, a potential flow model and elastic constitutive equations are introduced to derive and numerically solve the coupled equations governing the motion and stability of a spherical interface. Furthermore, the influences of material elasticity and external driving pressure on interface evolution and perturbation growth are investigated. Theoretical analysis indicates that the [motion of the spherical](#) interface is independent of the perturbed mode. The interface motion undergoes four stages: accelerated contraction, decelerated contraction, accelerated expansion, and decelerated expansion. Since the proposed model considers a purely elastic solid, the interface radius exhibits undamped periodic oscillations. As the shear modulus and driving pressure increase, the oscillation frequency of the interface rises. Specifically, elasticity suppresses the contraction depth of the interface, whereas the external pressure promotes it. With increasing driving pressure, the contraction ratio tends toward a constant value, suggesting that further increasing pressure has a limited effect on enhancing compression depth. The growth of the perturbation amplitude exhibits a characteristic of initially accelerating and then decelerating with the increase of the perturbation mode number until stabilization is reached. The perturbation growth function is introduced to quantify the evolution of the amplitude, showing that the extent of perturbation growth is positively correlated with the maximum value of this function. The results demonstrate that elasticity suppresses the development of instability, particularly inhibiting short-wavelength perturbations. For a specific perturbed mode, a cutoff shear modulus threshold exists, above which the perturbation is completely suppressed. Conversely, the driving pressure promotes interface instability and

significantly enhances the growth of short-wavelength perturbations. Furthermore, the investigation within the parameter space of driving pressure and shear modulus reveals that increasing the perturbation mode number expands the stable parameter range, thereby raising the external driving pressure required to trigger interface instability for the same material. Finally, a comparison between the theoretical model and numerical simulations confirms the validity of the model in capturing the interface dynamic characteristics of complex media. This work advances the understanding of Rayleigh-Taylor instability in dynamic spherical geometries and offers a useful theoretical framework for further exploration of nonlinear behavior and elasto-plastic transitions, particularly in conjunction with numerical simulations.

Keywords: Rayleigh-Taylor instability; Bell-Plesset effect; spherical geometry; elasticity

* Project supported by [the Science Challenge Project, China \(Grant No. TZ2025016\)](#), and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12472397, 92052108).

† Corresponding author. Email: sunyb@bit.edu.cn
The first author. Email: luyizhan22@gscaep.ac.cn