

# 宇称时间对称非厄米周期势中布洛赫波的调制不稳定性

邓成鑫钰<sup>1)</sup> 陆嘉昊<sup>1)</sup> 张永平<sup>1†)</sup>

1) (上海大学物理系, 上海 20044)

## 摘要

调制不稳定性是非线性物理中的重要概念之一。考虑到宇称时间对称非厄米周期势和高阶非线性分别是光学系统的研究热点, 本文将研究光束在宇称时间对称非厄米周期势中传输时由非线性诱导的调制不稳定性。该系统的本征波函数为布洛赫波, 我们针对最低布洛赫能带上的所有布洛赫波进行线性稳定性分析, 分别研究三次和五次非线性在 自散焦和自聚焦 情况下调制不稳定的区别。结果表明, 三次非线性时 自散焦和自聚焦 情况下调制不稳定在布里渊区占据区域形成互补; 而五次非线性时不论 自散焦 还是 自聚焦 情况, 所有布洛赫波都表现为调制不稳定, 我们揭示此时存在两种不同的不稳定机制。

**关键词:** 宇称时间对称, 非厄米周期势, 五次非线性, 调制不稳定性

**PACS:** 02.10.Yn, 33.15.Vb, 98.52.Cf, 78.47.dc

**基金:** 国家自然科学基金面上项目(批准号: 12374247)资助的课题。

† 通信作者. E-mail: Yongping11@t.shu.edu.cn

第一作者. E-mail: dcxy@shu.edu.cn

## 1 引言

宇称时间 (Parity-Time, PT) 对称的概念最早由 Bender 等人提出, 他们指出虽然哈密顿量是非厄米的, 但如果其满足 PT 对称, 它的本征谱仍可以为实数<sup>[1-3]</sup>, 这一理论引发了人们对非厄米物理的广泛研究。近年来, PT 对称的非厄米物理已经扩展至光学、声学、超材料等多个领域<sup>[4,5]</sup>。描述光在介质中的传播方程在傍轴近似后, 与薛定谔方程在形式非常相似, 使得光学系统成为模拟 PT 对称的理想平台之一。2007 年 El-Ganainy 等人提出了 PT 对称耦合光学结构模型<sup>[6]</sup>; 随后, Makris 等人将 PT 对称的概念推广到光学的周期势, 指出此类系统区别于厄米周期势的新现象<sup>[7]</sup>; Guo、Rüter 及 Regensburger 等团队分别在波导与合成维度的光学周期势中观测到 PT 对称破缺和非互易传播等效应<sup>[8-10]</sup>。这些工作奠定了 PT 对称在光学中的应用基础, 并推动了与非厄米物理相关的奇异点、单向运输、非互易调控等研究方向的发展<sup>[11-15]</sup>。

与厄米系统相比，具有 PT 对称性的非厄米周期势系统具有更丰富的能带结构与动力学特征。当引入非线性后，系统的性质会变得更加复杂，非线性与衍射或色散效应的竞争能够支持局域的孤子解。在 PT 对称周期势中，已经发现包括能隙孤子、基本孤子、偶极孤子以及涡旋孤子等多种新颖的孤子态<sup>[16-22]</sup>。另一方面，周期势的空间延展的本征解为布洛赫波，非线性可能会使某些布洛赫波出现调制不稳定性。该不稳定性会导致连续的布洛赫波在传输过程中失稳，表现为连续波被分解为一系列空间随机分布的局域态<sup>[23-25]</sup>。调制不稳定性是理解非线性系统中能量局域化、斑图形成及各类非线性波产生的关键物理机制。在厄米周期系统中，布洛赫波的调制不稳定性及其与孤子的联系得到了广泛的研究<sup>[26-33]</sup>。而目前，对于 PT 对称的非厄米周期系统的布洛赫波的调制不稳定性仍然缺乏足够的研究。

考虑到 PT 对称周期势在光学中的广泛应用，本文将详细地研究非线性对处于该周期势中布洛赫波的调制不稳定性的影响。另一方面，在光学系统中，除了通常的克尔非线性，即三次非线性，其他的高阶非线性效应也受到广泛关注。在某些高非线性系数材料或极高光强条件下，五次非线性的影响变得不可忽略。五次非线性会显著改变调制不稳定性发生条件、频谱范围及增益大小<sup>[34]</sup>，在三次-五次竞争非线性的介质中，孤子的传输性质存在新的规律<sup>[35-37]</sup>。由于五次非线性是当前非线性光学的研究热点，本文在 PT 对称周期势中分别引入三次和五次非线性，研究布洛赫波的调制不稳定性，进而甄别这两种不同非线性对于不稳定性影响的区别。考虑不同类型的非线性后，我们首先找到最低布洛赫能带上的所有非线性布洛赫波解，然后对它们进行线性稳定性分析。为了验证线性稳定性分析结果的正确性，我们最后将相应的布洛赫波作为初态，数值模拟其传输演化，观测其波形是否出现失稳。研究表明，无论自散焦还是自聚焦非线性，五次非线性均会显著增强调制不稳定性。我们揭示五次非线性导致调制不稳定的两种不同机制，其中一种来源于激发能谱中两条能带相碰撞，而另一种机制为能谱中出现离散的简并，而五次非线性不能够打破这些简并。我们特别研究了这两种机制对于不稳定的不同表现形式。本研究旨在深化对 PT 对称非线性系统中调制不稳定的理解，并为相关光学器件的稳定性设计提供理论依据。

## 2 理论模型

考虑光束在具有均匀背景折射率  $n_0$  的一维非线性波导阵列中传播，复折射率分布为  $n(x) = n_0 + n_R(x) + in_I(x)$ ，其中  $n_R(x)$  和  $n_I(x)$  分别为折射率调制的实部和虚部<sup>[7]</sup>。在傍轴近似下，光场包络  $E(x, z)$  的演化服从类薛定谔方程：

$$i \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + k_0 [n_R(x) + in_I(x)] E + \Gamma_{NL} |E|^\alpha E = 0, \quad (1)$$

其中： $z$  和  $x$  分别代表光传播方向的距离和横截面坐标， $\alpha$  为非线性阶次， $k_0 = 2\pi / \lambda_0$  为真空中的波数， $\lambda_0$  为光波长， $\Gamma_{NL}$  代表非线性。为方便分析，引入特征长度  $\pi x_0$  和相应的衍射长度  $L_D = k_0 n_0 x_0^2$ ，令  $\xi = z / L_D$ ， $\eta = x / x_0$ ， $\Psi(\eta, \xi) = \sqrt{\Gamma_{NL} L_D} E(x, z)$ ，定义势能为  $V(\eta) = k_0^2 n_0 x_0^2 [n_R(x) + in_I(x)]$ ，非线性系数为  $g = 1 / \Gamma_{NL} \frac{\alpha-1}{2} L_D^{\frac{\alpha-1}{2}}$ 。本文采用典型  $PT$  对称周期势，具体形式为：

$$V(\eta) = A[\cos^2(\eta) + iV_0 \sin(2\eta)], \quad (2)$$

其中： $A = k_0^2 n_0 x_0^2 n_R$  为周期势的强度，而  $n_R$  为  $n_R(x)$  的幅度， $V_0$  控制周期势虚部相对于实部的比值。式 (2) 形式的  $PT$  对称非厄米周期势由 Makris 等人在光学系统中首次引入<sup>[7]</sup>，引起人们广泛关注，成为重要的非厄米周期体系。将上述变量代入类薛定谔方程，可以得到描述光场传输演化的一维无量纲化非线性方程：

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + V(\eta) \Psi + g |\Psi|^\alpha \Psi, \quad (3)$$

其中： $\Psi(\eta, \xi)$  为无量纲光场包络， $g$  代表非线性系数。本文分别考虑两种非线性形式：三次非线性  $\alpha = 2$  和五次非线性  $\alpha = 4$ 。非线性系数  $g$  的符号决定了非线性的类型： $g < 0$  为自聚焦非线性， $g > 0$  为自散焦非线性。

为了研究调制不稳定性，首先需要求解出系统的非线性布洛赫波。根据布洛赫理论，式 (3) 的定态解为布洛赫波：

$$\Psi(\eta, \xi) = e^{-i\beta\xi + ik\eta} \phi_k(\eta), \quad (4)$$

其中：周期函数  $\phi_k(\eta)$  与  $PT$  对称势  $V(\eta)$  具有相同的周期， $k$  和  $\beta$  分别是布洛赫波数和传播常数。将周期函数  $\phi_k(\eta)$  在倒格矢空间用平面波展开：

$$\phi_k(\eta) = \sum_n c_n e^{in2\eta}, \quad (5)$$

代入式 (3) 进行数值求解，即可得到非线性布洛赫能带  $\beta(k)$  及其对应的本征态  $\phi_k(\eta)$ 。

一旦求得非线性布洛赫波，对其进行线性稳定性分析<sup>[38]</sup>。在式(4)中加入微扰后得到：

$$\Psi(\eta, \xi) = e^{-i\beta\xi + ik\eta} [\phi_k(\eta) + U(\eta)e^{iq\eta - i\omega\xi} + V^*(\eta)e^{-iq\eta + i\omega^*\xi}], \quad (6)$$

其中： $U(\eta)$ 和 $V(\eta)$ 为微扰振幅， $q$ 和 $\omega$ 分别为微扰的准动量和能量。将式(6)带入式(3)中，只保留 $U(x)$ 和 $V(x)$ 的线性项，可以得到以下本征方程：

$$\omega \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{M}^* & -\mathbf{L}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{M}$ 的具体形式取决于非线性类型，对于三次非线性（ $\alpha=2$ ），有：

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\partial_\eta + iq + ik)^2 + V(\eta) + 2g|\phi_k|^2 - \beta, \quad \mathbf{M} = g\phi_k^2; \quad (8)$$

对于五次非线性（ $\alpha=4$ ），则为：

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\partial_\eta + iq + ik)^2 + V(\eta) + 3g|\phi_k|^4 - \beta, \quad \mathbf{M} = 2g|\phi_k|^2\phi_k^2. \quad (9)$$

其中： $\phi_k$ ， $k$ 和 $\beta$ 来源于待分析的非线性布洛赫波。 $\omega(q)$ 构成了本征方程的集体激发谱，通过求解出 $\omega$ ，可以判断相应布洛赫波的调制稳定性：若存在任意 $q$ 使得 $\omega$ 具有非零正虚部值，则其对应的扰动模式将会随着传输指数级增长，该布洛赫态便称为调制不稳定的；反之，若 $\omega$ 对所有的 $q$ 均有零值虚部，则该布洛赫态是调制稳定的。为验证线性稳定性分析的结果，本文进一步将布洛赫波解作为初态，进行式(3)的传输演化。

### 3 结果与分析

基于前文的理论模型，本节系统地研究PT对称周期势中不同类型的非线性对系统最低布洛赫能带上布洛赫波调制稳定性的影响。固定势参数为 $A=1$ 和 $V_0=0.35$ ，确保系统处于PT对称未破缺相<sup>[7]</sup>。令非线性强度为 $|g|=0.05$ ，分别考虑自散焦非线性（ $g=0.05$ ）和自聚焦非线性（ $g=-0.05$ ）两种情况。通过求解线性稳定性分析的本征方程获得集体激发谱 $\omega$ ，然后根据它是否存在虚部，判断布洛赫波的稳定性。本节将通过绘制激发谱虚部最大值 $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$ 与布洛赫波数 $k$ 的关系，以及集体激发 $\omega$ 和微扰准动量 $q$ 的色散关系，揭示不稳定性的分布特征与物理机制。下文将分为自散焦非线性与自聚焦非线性两种情况展开讨论。

#### 3.1 自散焦非线性

在 自散焦 非线性下，对比了三次非线性和五次非线性对最低布洛赫能带上布洛赫波稳定性的影响。图 1 展示了系统最低布洛赫能带结构及对应的布洛赫波稳定性分析结果，图 1(a)和图 1(b)分别为三次非线性和五次非线性作用下，系统最低布洛赫态能带；图 1(c)和图 1(d)则分别为对应的集体激发虚部最大值随  $k$  的变化。

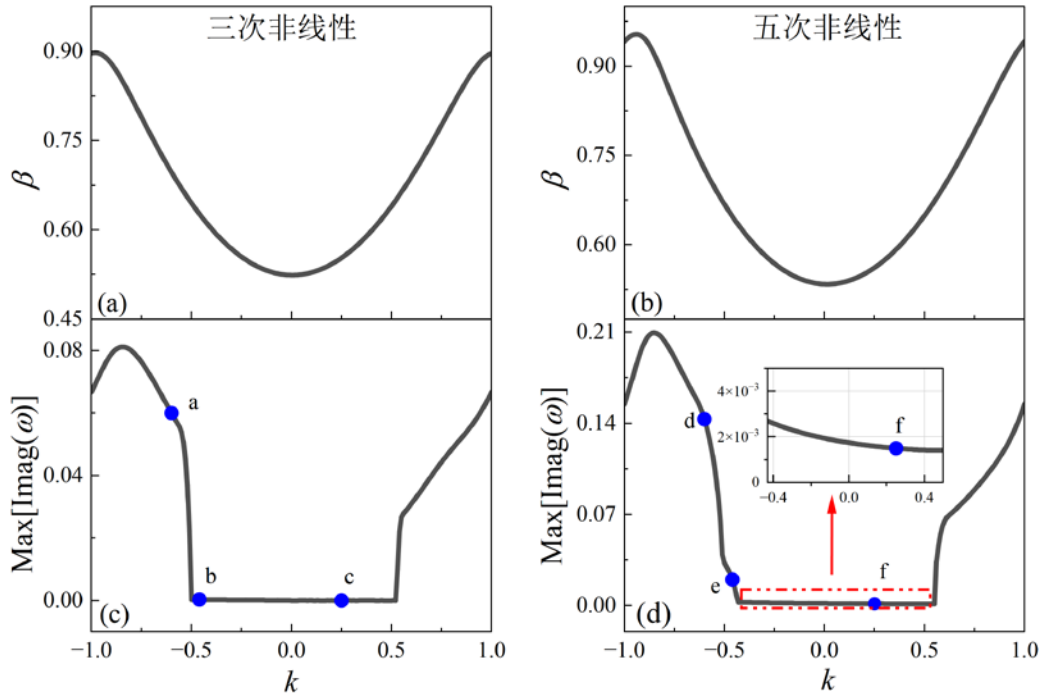


图1 自散焦非线性下最低布洛赫能带结构及对应的布洛赫波的线性稳定性分析。(a)三次非线性和(b)五次非线性最低布洛赫能带；(c)三次非线性和(d)五次非线性下线性稳定性分析集体激发的虚部最大值  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$  与布洛赫波数  $k$  的关系。

Fig. 1 The lowest Bloch band structure and linear stability analysis with under self-defocusing nonlinearity. The lowest Bloch band for (a) Cubic nonlinearity and (b) Quintic nonlinearity; The maximum of imaginary part of collective spectrum from the linear stability analysis,  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$ , as a function of Bloch wave number  $k$  in the cases of (c) Cubic nonlinearity and (d) Quintic nonlinearity.

图 1(a)和图 1(b)显示了 PT 对称周期势的最低布洛赫能带在出现非线性后，变得关于布里渊区中心  $k=0$  不对称，尤其是五次非线性时，该不对称较为明显。不对称的非线性布洛赫能带是 PT 对称非厄米周期势导致的特有性质，如果将周期势换成厄米形式时，不论三次或者五次非线性，布洛赫能带则变为关于  $k=0$  对称。通过对比图 1(c)和(d)，可以观察到非线性阶次对稳定性的显著影响。首先，不论三次还是五次非线性，由于能带关于  $k=0$  的不对称导致布洛赫波的不稳定性也关于  $k=0$  不对称。其次，在三次非线性情况下，布洛赫波的不稳定区域主要分

布在布里渊区边缘，布里渊区中心附近则为稳定区域；而在五次非线性的作用下，不稳定区域遍布整个布里渊区。说明五次非线性可以使得最低布洛赫能带上所有的布洛赫波呈现调制不稳定，而具体展现出两类明显不同的特征：布里渊区中心附近  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$  值非常小（见放大子图）；而布里渊区两端边界处  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$  值比较大。

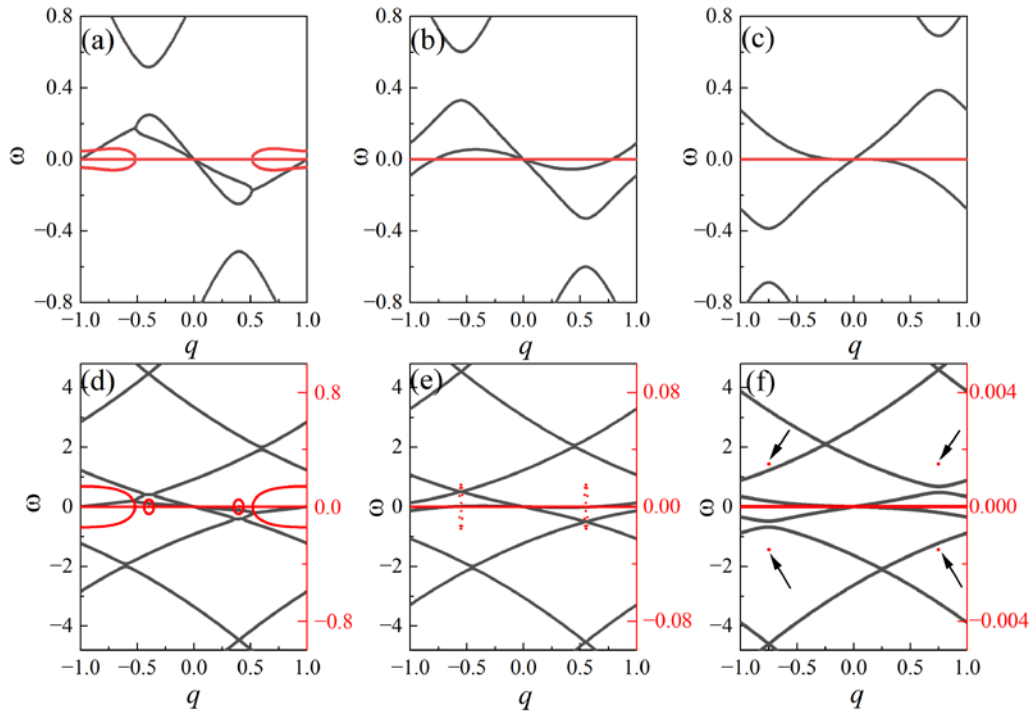


图2 自散焦非线性下特定布洛赫波的线性稳定性分析的集体激发谱。三次非线性时取图 1(c)中a,b,c三点处的布洛赫波，对应的线性稳定性分析的集体激发谱分别在 (a)  $k = -0.6$  (b)  $k = -0.45$  (c)  $k = 0.25$  显示；五次非线性时取图1(d)中d,e,f三点处的布洛赫波，对应的线性稳定性分析的集体激发谱分别在(d)  $k = -0.6$  (e)  $k = -0.45$  (f)  $k = 0.25$  显示。

Fig. 2 Collective excitation spectrum from eigenvalue equation of the linear stability analysis for selected Bloch waves with self-defocusing nonlinearity. For cubic nonlinearity, the Bloch waves labeled by points a, b, and c in Fig. 1(c) are chosen, and corresponding collective excitation spectrum is shown in (a)  $k = -0.6$ , (b)  $k = -0.45$ , and (c)  $k = 0.25$  respectively; for quintic nonlinearity, the Bloch waves labeled by points d, e, and f in Fig. 1(d) are chosen, and corresponding collective excitation spectrum is demonstrated in (d)  $k = -0.6$ , (e) for  $k = -0.45$ , and (f)  $k = 0.25$  respectively.

为深入探究调制不稳定性产生的动力学机制，选取三次非线性与五次非线性情况下位于  $k = -0.6, -0.45, 0.25$  的三个典型的布洛赫波，在图 1(c)和(d)中以蓝色圆圈标记，分别绘制标记点的集体激发  $\omega$  与准动量  $q$  的色散关系，结果如图 2 所示。图 2(a)-(c)分别对应三次非线性情况下图 1 中 a,b,c 三点，图 2(d)-(f)则分别对

应五次非线性情况下图 1 中 d,e,f 三点。为清晰展示五次非线性下激发谱虚部的结构，将图 2(d)-(f)中虚部坐标轴放大并以红色标注于图的右侧。

如图 2(a) 所示，在三次非线性下，当  $k = -0.6$  时，位于  $\omega = 0$  附近的两条能带在  $q = \pm 1$  附近的区域发生碰撞：两条带的实部融合成一个值，同时产生一对正负共轭的虚部，导致相应布洛赫波失稳；当  $k = -0.45$ （图 2(b)）和  $k = 0.25$ （图 2(c)）时，由于没有能带相互碰撞，所以不会产生虚部，相应的布洛赫波调制稳定。在五次非线性下，图 2(d)显示：围绕在  $\omega = 0$  附近存在四处能带相碰撞，从而在碰撞区域能带的实部融合，同时产生一对共轭的虚部，相应的  $k = -0.6$  处的布洛赫波失稳。而图 2(e)为  $k = -0.45$  处布洛赫波在五次非线性时的集体激发谱，特别明显的特征是：在  $q = \pm 0.55$  附近存在多对共轭的虚部。它们存在的原因，在  $q = 0.55$  附近， $\omega < 0$  区域内有多处集体激发 能级交叉，每存在一个 能级交叉 就会产生一对共轭的虚部；而在  $q = -0.55$  附近， $\omega > 0$  区域内有多处 能级交叉。从图 2(f)展示的  $k = 0.25$  处布洛赫波在五次非线性时的集体激发谱可以看出，在  $q = \pm 0.75$  各存在一对共轭的虚部（图中利用箭头指示），它们的来源仍然为存在 能级交叉，只是该图的参数下， $q = 0.75$  处只有一个 能级交叉 存在于  $\omega = 5$  附近，而  $q = -0.75$  处的 能级交叉 存在于  $\omega = -5$  附近。所以图 2(e)和 2(f)表明五次非线性不能够打破集体激发的 能级交叉，从而产生虚部，使得相应布洛赫波失稳。这类 交叉 导致的失稳机制，不同于图 2(a)和 2(d)所示的能级碰撞机制，具体的典型特征是：交叉 点的离散性导致产生的虚部也是分离的，同时这些虚部值比碰撞机制产生的虚部值小至少一个数量级，这也是为什么图 1(d)中要通过插入放大子图显示这类失稳区域的原因。这种能级交叉失稳机制，只有考虑五次非线性和 PT 对称非厄米周期势才有可能存在，是非厄米周期势的另一个重要特征。

一个紧随而来的问题是：这么小而且离散取值的虚部能在传输演化中体现出来吗？为了回答这个问题，并验证线性稳定分析结果的正确性，我们将得到的布洛赫波添加扰动后设置为初态，求解方程(3)进行传输演化。具体地，我们分别选择图 2(a), 2(b), 2(e)和 2(f)( $k = -0.6, -0.45, 0.25$ )所对应的布洛赫波， $e^{ikn}\phi_k(\eta)$ ，添加扰动， $e^{(ikn)}\phi_k(\eta)[1 + \delta\cos(\gamma x)]$ ，其中  $\delta\cos(\gamma x)$  便是扰动，具体取值  $\delta = 0.05$ ，而  $\gamma$  依据图 2 中的虚部选取，对于  $k = -0.6, -0.45, 0.25$ ， $\gamma$  分别选取  $0.3, 0.55, 0.75$ ，

传输演化结果如图 3 所示。

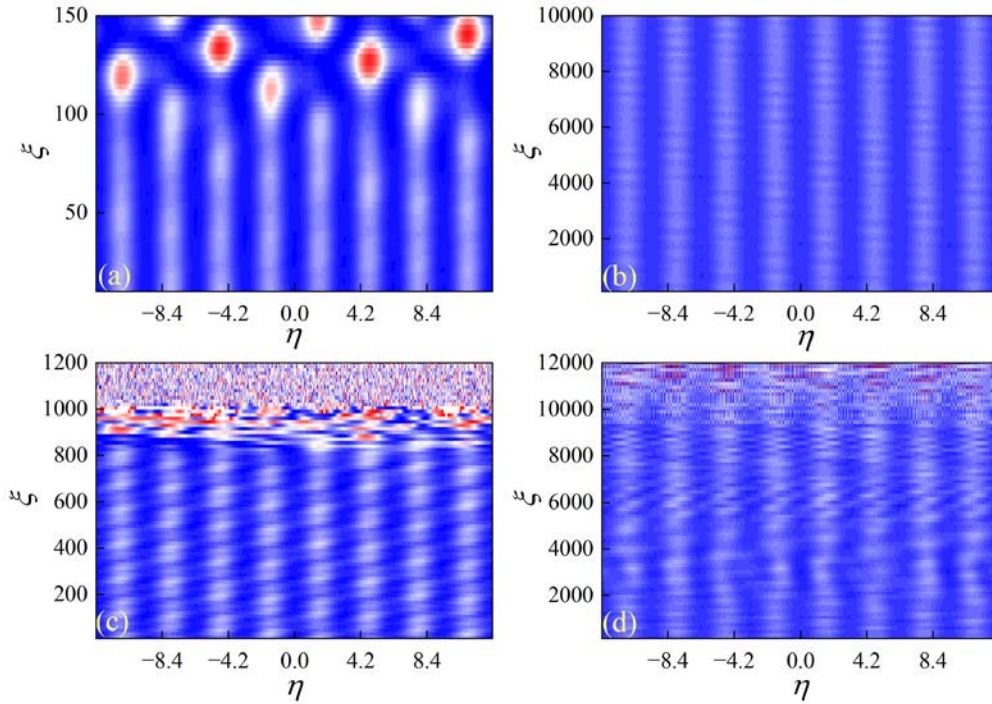


图3 自散焦非线性时几个典型的布洛赫波的传输演化。三次非线性时(a)  $k = -0.6$  和 (b)  $k = 0.25$  处的布洛赫波的传输演化；五次非线性时(c)  $k = -0.45$  和(d)  $k = 0.25$  处布洛赫波的传输演化。

Fig. 3 Propagation evolution of typical Bloch waves with self-defocusing nonlinearity. Propagation evolution of Bloch waves at (a)  $k = -0.6$  and at (b)  $k = 0.25$  in the presence of cubic nonlinearity; Propagation evolution of Bloch waves at (c)  $k = -0.45$  and at (d)  $k = 0.25$  in the presence of quintic nonlinearity.

图 3(a) 显示出相应的布洛赫波在传输  $\xi \approx 100$  后开始失稳，该布洛赫波的线性稳定性分析结果为  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)] = 0.06$ （见图 1(c)），则  $\xi \approx 2\pi / \text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$  量级下出现失稳，所以图 3(a) 传输演化可以印证线性稳定性分析结果。而图 3(b) 展示的稳定演化，直接佐证了线性稳定性分析  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)] = 0$ （见图 1(c)）。特别有意思的是图 3(c) 和 3(d) 仍然展示出失稳的传输演化。线性稳定性分析结果为对于图 3(c) 的布洛赫波  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)] = 0.015$ ，对于图 3(d) 的布洛赫波  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)] = 0.0015$ （见图 1(d)）。则期待图 3(c) 的布洛赫波在  $\xi \approx 2\pi / \text{Max}[\text{Imag}(\omega)] = 420$  量级后开始失稳，该图显示  $\xi \approx 800$  后开始失稳，所以在数量级上与线性稳定性估算结果是相符的。另一方面，期待图 3(d) 的布洛赫波在  $\xi \approx 2\pi / \text{Max}[\text{Imag}(\omega)] = 4200$  量级后开始失稳，而该图显示  $\xi \approx 9000$  后失稳才开始明显。在数量级上两种结果仍然大致相匹配，如果再加大初态微扰的幅度，比如  $\delta = 0.5$ ，则会很明显观测到开始发生失稳的  $\xi$  与线性稳定性分析估算更加匹

配。针对图 3(d), 我们特别地指出扰动  $\cos(\gamma x)$  选择的重要性: 如果  $\gamma$  选值离开 0.75, 则扰动的种子不能够孕育出集体激发的虚部, 相同条件下的传输演化会显示不能够引起失稳。物理上可以归结为该布洛赫波的集体激发虚部只表现为几个离散的值, 所以只有将扰动的种子“掩埋”到可能的离散值附近, 才有可能在演化后将它们激发出来。

### 3.2 自聚焦非线性

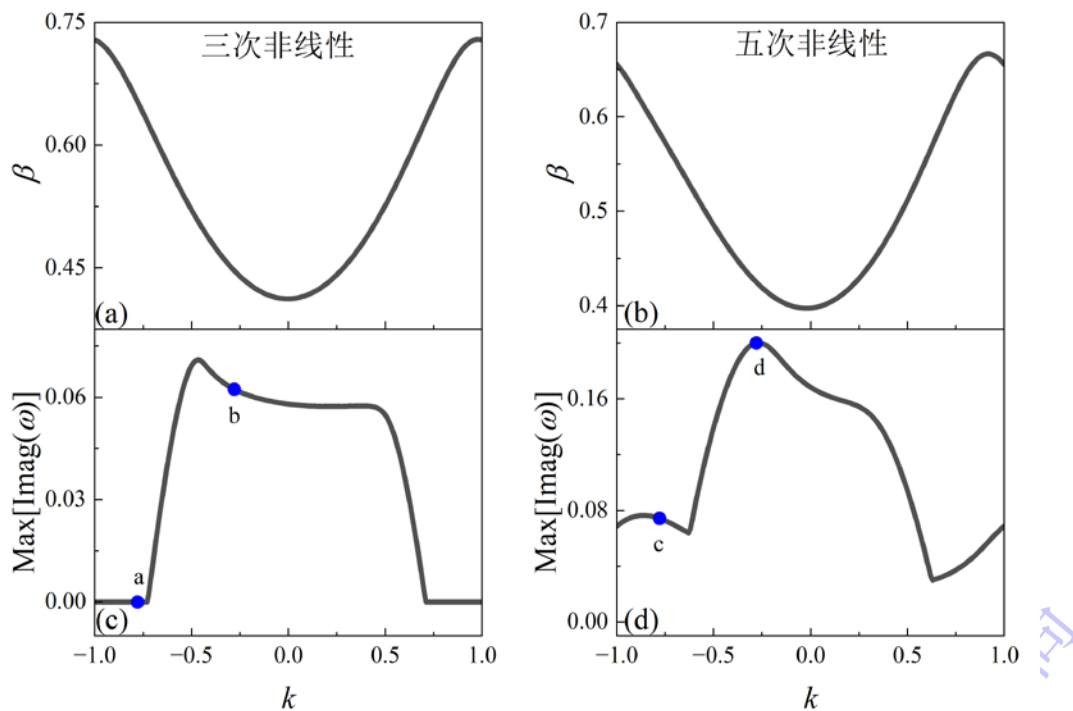


图4 自聚焦非线性下最低布洛赫能带结构及对应的布洛赫波的线性稳定性分析。(a)三次非线性和(b)五次非线性最低布洛赫能带; (c)三次非线性和(d)五次非线性下线性稳定性分析集体激发的虚部最大值  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$  与布洛赫波数  $k$  的关系。

Fig. 4 The lowest Bloch band structure and linear stability analysis with under self-focusing nonlinearity. The lowest Bloch band for (a) Cubic nonlinearity and (b) Quintic nonlinearity; The maximum of imaginary part of collective spectrum from the linear stability analysis,  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$ , as a function of Bloch wave number  $k$  in the cases of (c) Cubic nonlinearity and (d) Quintic nonlinearity.

本节探讨在 自聚焦 非线性条件下调制不稳定性的特征, 非线性强度取  $g = -0.05$ , 分别考虑三次非线性与五次非线性两种情形。图 4(a)和 4(b)分别为三次非线性和五次非线性下的最低布洛赫能带  $\beta(k)$ 。这两个能带仍然显示出关于布里渊区中心的不对称性, 该特点构成了 PT 对称非厄米周期势和非线性共存产生的特性。图 4(c)和 4(d)则分别为与对应能带上的非线性布洛赫波的集体激发谱,

只有激发谱虚部最大值  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$  在图中显示，明显的特征是  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$  关于  $k=0$  不对称。如图 4(c)所示，在三次非线性时，位于布里渊区边界处的布洛赫波具有调制稳定性，即  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)] = 0$ ，而在布里渊区中心很大范围内的布洛赫波展示出调制不稳定性；该结果相比于 自散焦 三次非线性的结果完全互补（见图 1(c)），自聚焦 和 自散焦 非线性时调制不稳定性区域正好相反。

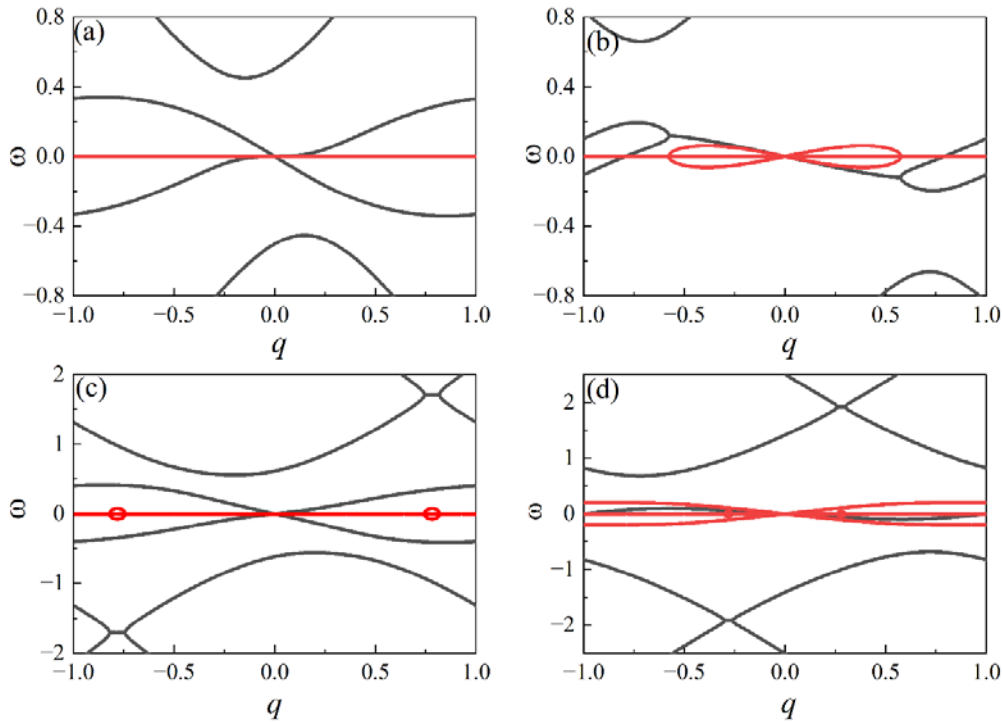


图5 自聚焦非线性下特定布洛赫波的线性稳定性分析的集体激发谱。三次非线性时取图 4(c)中a,b两处的布洛赫波，对应的线性稳定性分析的集体激发谱分别在(a)  $k = -0.78$ ，(b)  $k = -0.28$  中显示；五次非线性时取图4(d)中c,d两处的布洛赫波，对应的线性稳定性分析的集体激发谱分别在(c)  $k = -0.78$  和(d)  $k = -0.28$  中显示。

Fig. 5 Collective excitation spectrum from eigenvalue equation of the linear stability analysis for selected Bloch waves with self-focusing nonlinearity. For cubic nonlinearity, the Bloch waves labeled by points a and b in Fig. 4(c) are chosen, and corresponding collective excitation spectrum is shown in (a)  $k = -0.78$  and (b)  $k = -0.28$  respectively; for the quintic nonlinearity, the Bloch waves labeled by points c and d in Fig. 4(d) are taken, and corresponding collective excitation spectrum is demonstrated in (c)  $k = -0.78$  and (d) for  $k = -0.28$  respectively.

而如图 4(d)展示的 自聚焦 五次非线性结果说明整个能带上的布洛赫波都是调制不稳定的。虽然该结论与 自散焦 五次非线性时的结论一致（见图 1(d)），但表现出不同的特征：在图 4(d)的调制不稳定性中不再存在  $\text{Max}[\text{Imag}(\omega)]$  值非常小的区域，也就是意味着，这里不会出现由激发谱的 能级交叉 机制诱导出的很小的虚部。为了验证该猜想，进而揭示 自聚焦 非线性下布洛赫态失稳的物理机

制，我们选取图 4 中位于  $k = -0.78, -0.28$ （记为 a,b,c,d）的四个典型的布洛赫波，分别绘制其集体激发谱  $\omega$  与准动量  $q$  的色散关系，结果如图 5 所示，其中黑色线代表激发谱实部  $\text{Re}(\omega)$ ；红色线代表激发谱虚部  $\text{Im}(\omega)$ 。

图 5(a)展示出一套稳定的三次非线性下布洛赫波的集体激发谱，即：其激发谱的虚部都等于零，说明对应的布洛赫波调制稳定。而图 5(b)显示出三次非线性下  $k = -0.28$  处布洛赫波的调制不稳定性是由于  $\omega = 0$  附近的两条能带碰撞机制引起。对应五次非线性的情况，如图 5(c)和 5(d)分别所示；处于  $k = -0.78$  和  $k = -0.28$  两处的布洛赫波的调制不稳定性都是由于集体激发谱中存在能带碰撞机制引起。两者在具体的碰撞表现形式不同：图 5(c)为  $\omega = \pm 1.8$  附近的两条能带发生了碰撞，而图 5(d)为  $\omega = 0$  附近的两条能带在整个布里渊区范围都发生碰撞，使得它们的实部融合成一条带，而产生的共轭虚部充满整个布里渊区。在图 5(c)和 5(d)中，不再存在像自散焦五次非线性时的激发谱 能级交叉 机制产生的离散虚部值。

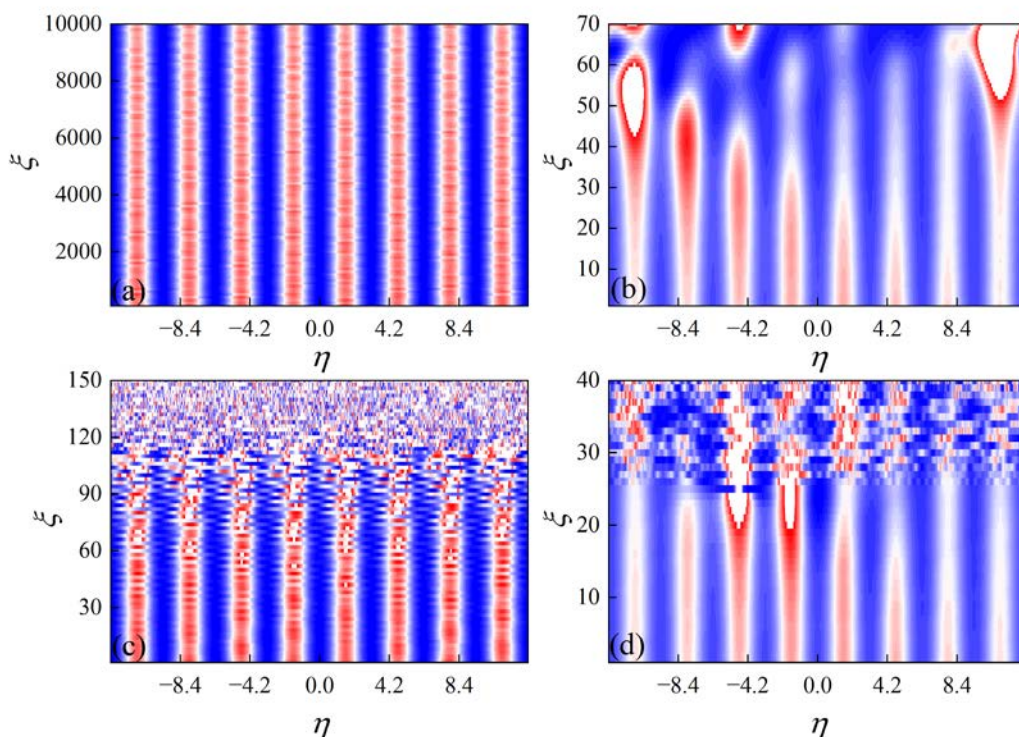


图6 自聚焦非线性时几个典型的布洛赫波的传输演化。三次非线性时(a)  $k = -0.78$  和 (b)  $k = -0.28$  处的布洛赫波的传输演化；五次非线性时(c)  $k = -0.78$  和(d)  $k = -0.28$  处布洛赫波的传输演化。

Fig. 6 Propagation evolution of typical Bloch waves with self-focusing nonlinearity.

Propagation evolution of Bloch waves at (a)  $k = -0.78$  and at (b)  $k = -0.28$ ; in the presence of cubic nonlinearity; Propagation evolution of Bloch waves at (c)  $k = -0.78$  and at (d)  $k = -0.28$  in the presence of quintic nonlinearity.

通过对图 4 中标记的布洛赫波的传输演化来验证线性稳定性分析的结论。在这些布洛赫波中添加扰动后变为  $e^{ikx}\phi_k(x)\cdot[1+\varepsilon\cos(\gamma x)]$ ，选取  $\varepsilon = 0.05$ ， $\gamma$  依据图 5 中各点的虚部选取，对于  $k = -0.78, 0.28$ ， $\gamma$  分别选取 0.75, 0.25。图 6 展示了在自聚焦非线性下，四个标记点的布洛赫波受到扰动后，其波包强度的传输演化结果。从图 6(a)中可以看出，在三次非线性情况下， $k = -0.78$  处的布洛赫波在施加扰动后波包形状在演化  $\xi = 10000$  后仍保持稳定，证实了该波是调制稳定的，与线性稳定性分析结论相一致。而图 6(b)显示  $k = -0.28$  处布洛赫波传输  $\xi = 30$  附近已经开始失稳，该失稳起始  $\xi$  的数量级与线性稳定性分析结果  $\xi = 2\pi / \text{Max}[\text{Imag}(\omega)] \approx 100$  相匹配。在五次非线性情况下， $k = -0.78$  处的布洛赫波传输约  $\xi = 80$  开始失稳（见图 6(c)），该  $\xi$  的数量级与线性稳定性分析结果  $\xi = 2\pi / \text{Max}[\text{Imag}(\omega)] \approx 80$  相一致；而  $k = -0.28$  处的布洛赫波在传输到  $\xi = 20$  开始失稳（见图 6(d)），该  $\xi$  的数量级仍然与线性稳定性分析预测的结果  $\xi = 2\pi / \text{Max}[\text{Imag}(\omega)] \approx 30$  相一致。

## 4 结 论

本文通过线性稳定性分析并结合传输演化，系统地研究了 PT 对称非厄米周期势在分别存在三次或五次非线性时最低能带上布洛赫波的调制不稳定性，展示了非线性为自散焦和自聚焦情况下，调制不稳定性的不同特征。首先，不论三次和五次非线性，非厄米周期势产生的重要特征是，非线性布洛赫能带关于布里渊区中心不对称，该不对称性进而使得布洛赫波的调制不稳定性关于布里渊区中心不对称。其次，自散焦和自聚焦三次非线性对于能带上布洛赫波产生的调制稳定和调制不稳定在布里渊区所占据的区域形成互补，而发生失稳的机制为线性稳定性分析本征方程的集体激发中存在两条能带相碰撞。有区别的是，不论自散焦或是自聚焦五次非线性都会使得整条能带上的布洛赫波发生调制不稳定，而自散焦五次非线性情况下，存在一种新的产生不稳定机制，即：集体激发谱中存在离散的能级交叉，该机制对不稳定带来的新特征，包括，不稳定幅度小和只存在于离散的激发准动量处。在自散焦五次非线性时，存在能级交叉失稳机制是非厄米周期势的另一个重要特征。所有线性稳定性分析结果可以通过布洛赫波的传输演化模拟得到验证。研究结果增强了高阶非线性对 PT 对称非厄米周期势中调制不稳定性影响的理解，也为非线性调控非厄米光传输潜在的应用提供理论基础。

## 参考文献

- [1] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys.Rev.Lett.* 80 5243
- [2] Bender C M, Boettcher S, Meisinger P N 1999 *J.Math.Phys.* 40 2201
- [3] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2002 *Phys.Rev.Lett.* 89 270401
- [4] Konotop V V, Yang J, Zezyulin D A 2016 *Rev.Mod.Phys.* 88 035002
- [5] Tang Y J, Liang C, Liu Y C 2022 *Acta Phys.Sin.* 71 171101 (in Chinese) [唐原江, 梁超, 刘永椿 2022 物理学报 71 171101]
- [6] El-Ganainy R, Makris K G, Christodoulides D N, Musslimani Z H 2007 *Opt.Lett.* 32 2632
- [7] Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Musslimani Z H 2008 *Phys.Rev.Lett.* 100 103904
- [8] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, Morandotti R, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys.Rev.Lett.* 103 093902
- [9] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat.Phys.* 6 192
- [10] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* 488 167
- [11] Lumer Y, Plotnik Y, Rechtsman M C, Segev M 2013 *Phys.Rev.Lett.* 111 263901
- [12] Feng L, Wong Z J, Ma R M, Wang Y, Zhang X 2014 *Science* 346 972
- [13] Peng B, Özdemir Ş K, Lei F, Monifi F, Long G L, Fan S H, Nori F, Bender C M, Yang L 2014 *Nat.Phys.* 10 394
- [14] Özdemir Ş K, Rotter S, Nori F, Yang L 2019 *Nat.Mater.* 18 783
- [15] Zhou Q J, Long Q Y, Hu J H, Shao W J, Xu Y D 2025 *Chin.Phys.Lett.* 42 120402
- [16] Dang T T, Wang J F, An Y D, Liu X L, Zhang Z X, Yang L Z 2015 *Acta Phys.Sin.* 64 064211 (in Chinese) [党婷婷, 王娟芬, 安亚东, 刘香莲, 张朝霞, 杨玲珍 2015 物理学报 64 064211]
- [17] Liu Y, Zhang S Y 2015 *Acta Sin.Quantum Opt.* 21 153 (in Chinese) [刘燕, 张素英 2015 量子光学学报 21 153]
- [18] Nixon S, Ge L, Yang J 2012 *Phys.Rev.A* 85 023822
- [19] Hu S M, Ma X K, Lu D Q, Yang Z J, Zheng Y Z, Hu W 2011 *Phys.Rev.A* 84 043818
- [20] Shi S, Li Z, Ren X P, Wang H 2014 *Opt.Optoelectr.Technol.* 12 33 (in Chinese) [时爽, 李贞, 任小平, 王洪 2014 光学与光电技术 12 33]

- [21] Zhou B Z, Hua C B, Xu S L, Lu P 2015 *Chin.J.Lasers* 42 0505004 (in Chinese)  
[周博臻, 花春波, 徐四六, 吕鹏 2015 中国激光 42 0505004]
- [22] Chen X B, Li P F, Li L 2021 *Acta Sin.Quantum Opt.* 27 70 (in Chinese) [陈小波, 李鹏飞, 李碌 2021 量子光学学报 27 70]
- [23] Rüter C E, Wisniewski J, Kip D 2006 *Opt.Lett.* 31 2768
- [24] Stepić M, Wirth C, Rüter C E, Kip D 2006 *Opt.Lett.* 31 247
- [25] Rüter C E, Wisniewski J, Stepic M, Kip D 2007 *Opt.Express* 15 6324
- [26] Meier J, Stegeman G I, Christodoulides D N, Silberberg Y, Morandotti R, Yang H, Salamo G, Sorel M, Aitchison J S 2004 *Phys.Rev.Lett.* 92 163902
- [27] Jin G R, Kim C K, Nahm K 2005 *Phys.Rev.A* 72 045601
- [28] Konotop V V, Salerno M 2002 *Phys.Rev.A* 65 021602
- [29] Jia W G, Shi P M, Yang X Y, Zhang J P, Fan G L 2006 *Acta Phys.Sin.* 55 4575 (in Chinese) [贾维国, 史培明, 杨性愉, 张俊萍, 樊国梁 2006 物理学报 55 4575]
- [30] Zhao X D, Xie Z W, Zhang W P 2007 *Acta Phys.Sin.* 56 6358 (in Chinese) [赵兴东, 谢征微, 张卫平 2007 物理学报 56 6358]
- [31] Huang J S, Chen H F, Xie Z W 2008 *Acta Phys.Sin.* 57 3435 (in Chinese) [黄劲松, 陈海峰, 谢征微 2008 物理学报 57 3435]
- [32] Teng F, Xie Z W 2013 *Acta Phys.Sin.* 62 026701 (in Chinese) [滕斐, 谢征微 2013 物理学报 62 026701]
- [33] Duan L, Liu C, Zhao L C, Yang Z Y 2020 *Acta Phys.Sin.* 69 010501 (in Chinese) [段亮, 刘冲, 赵立臣, 杨战营 2020 物理学报 69 010501]
- [34] Ren Z J, Wang J, Yang A L, Wang Z L, Wang J 2004 *Acta Photon.Sin.* 33 758 (in Chinese) [任志君, 王晶, 杨爱玲, 王珍丽, 王进 2004 光子学报 33 758]
- [35] Mihalache D, Mazilu D, Malomed B A, Lederer F 2004 *Phys.Rev.E* 69 066614
- [36] You L Y, Li H M, He J R 2014 *Chin.Phy.B* 23 030501
- [37] Huang G Q, Lin J 2017 *Acta Phys.Sin.* 66 054208 (in Chinese) [黄光侨, 林机 2017 物理学报 66 054208]
- [38] Wu B, Niu Q 2001 *Phys.Rev.A* 64 061603

# Modulation Instability in Parity-Time Symmetric Periodic Potentials \*

Deng Chengxinyu<sup>1)</sup> Lu Jiahao<sup>1)</sup> Zhang Yongping<sup>1)</sup> †

1) (Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 20044, China)

Abstract

Modulation instability (MI) is a fundamental nonlinear phenomenon. Considering that parity-time symmetric non-Hermitian periodic potentials and higher-order nonlinearities are currently active research directions in optical systems, in this study we investigate the nonlinearity-induced modulation instability of optical beams propagating in parity-time symmetric non-Hermitian periodic potentials. Eigenstates of this system are spatially extended Bloch waves. Through linear stability analysis combined with the other method of nonlinear propagation evolution, we systematically investigate the modulation instability of Bloch waves in the lowest band of a parity-time (PT) symmetric non-Hermitian periodic potential in the presence of cubic or quintic nonlinearities, respectively. We demonstrate the distinct characteristics of modulation instability in self-focusing and self-defocusing nonlinear regimes.

First, regardless of cubic or quintic nonlinearity, an important feature arising from the PT symmetric non-Hermitian periodic potential is that the nonlinear Bloch band becomes asymmetric with respect to the center of the Brillouin zone, which in turn leads to an asymmetry of the Bloch wave modulation instability about the Brillouin zone center.

Second, for self-defocusing and self-focusing cubic nonlinearities, the regions in the Brillouin zone where modulation stability and instability occur for Bloch waves on the energy band are complementary to each other. The mechanism underlying the instability is the collision of two bands among the collective excitation spectrum in the eigenvalue equation of the linear stability analysis.

Third, regardless of whether the quintic nonlinearity is self-defocusing or self-focusing, it renders the Bloch waves across the entire Bloch band modulationally unstable. In the self-defocusing quintic nonlinear case, a new instability mechanism emerges: the presence of discrete energy level crossings in the collective excitation spectrum. This mechanism

introduces new features to the instability, including a small instability amplitude and its existence only at discrete excitation quasimomenta. The presence of the level-crossing instability mechanism in the self-defocusing quintic nonlinear case is another important feature of PT symmetric non-Hermitian periodic potentials.

All results from the linear stability analysis can be verified through propagation evolution simulations of the Bloch waves. The research findings enhance the understanding of the influence of higher-order nonlinearities on modulation instability in PT symmetric non-Hermitian periodic potentials, and also provide a theoretical foundation for potential applications of nonlinear control in non-Hermitian optical propagation.

**Keywords:** Parity-time symmetry, Non-Hermitian periodic potential, Quintic

nonlinearity, Modulation instability

---

\*Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12374247).

† Corresponding author. E-mail: Yongping11@t.shu.edu.cn  
The first author. E-mail: dcxy@shu.edu.cn

录用稿件，非最终出版稿