

四夸克态中分子态与正反双夸克态的混合效应 *

孙志峰^{1-4)†}

1) (兰州大学物理科学与技术学院, 兰州 730000)

2) (强子与 CSR 研究中心, 兰州 730000)

3) (兰州理论物理中心、量子理论及应用基础教育部重点实验室、甘肃省理论物理重点实验室、甘肃省量子物理基础学科研究中心, 兰州 730000)

4) (稀有同位素前沿科学中心, 兰州 730000)

自 2003 年类粲偶素 $X(3872)$ 被发现以来, 强子物理中涌现出大量无法用传统介子和重子框架解释的新强子态。因此, 四夸克态成了该领域的研究热点。本文简要回顾了强子分子态与正反双夸克态的理论研究, 重点介绍了我们在隐局域规范对称性框架下建立的包含双夸克场的有效场理论。通过构建相应的拉氏量, 并求解 Bethe-Salpeter 方程, 我们研究了 $Z_{cs}(4000)$ 、 $Z_c(3900)$ 、 $X(4500)$ 和 $T_{cs0}^*(2900)$ 等四夸克态候选者。结果表明, 这些粒子均可解释为强子分子态与正反双夸克态的混合, 其中的正反双夸克态组分占据着重要地位。此外, 我们进一步建立了颜色规范不变的双夸克有效场理论, 引入了双夸克与胶子的相互作用, 并推导出双夸克-反双夸克系统的单胶子交换势; 该理论可以应用于研究四夸克态系统, 也可以结合手征夸克模型来考察重子系统。本文为理解四夸克态的内部结构提供了新的理论视角, 并可以为未来实验研究提供有意义的参考。

关键词: 四夸克态, 强子分子态, 正反双夸克态, 有效场理论

PACS: 12.39.Mk, 12.40.-y, 12.38.Lg

† 通信作者. E-mail: sunzf@lzu.edu.cn (孙志峰)

* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 12335001) 资助的课题.

1 引言

强子物理是物理学中重要的前沿领域，它紧密结合大科学装置中的物理实验（如我国的 BESIII 实验，欧洲核子研究中心的 LHC 实验，日本的 Belle 实验等），对于理解微观物质构成以及量子色动力学低能区的非微扰问题至关重要。在 2003 年发现类粲偶素 $X(3872)$ 之后，世界各大高能物理实验中涌现出众多新强子态以及新的物理现象^[1-24]。其中的很多粒子在传统的介子和重子框架下很难被很好地解释。相应的理论研究包括强子分子态、正反双夸克态、紧致四夸克态、运动学效应等^[25]。其中，分子态由两个色单态（介子或重子）构成；紧致四夸克态中四个夸克通过夸克间相互作用势束缚在一起，它们不能分解为次级集团；正反双夸克态是由正、反颜色三重态的集团（即双夸克、反双夸克）构成。而我们近五年来的研究涉及有效场论框架下分子态与正反双夸克态（diquark-antidiquark state）的混合效应^[26-30]，因此下面分别对分子态和正反双夸克态及其相关的研究做简要介绍。

1.1 强子分子态研究简介

强子分子态简称分子态，是由两个或更多强子构成的系统。这一概念借鉴了原子、分子物理学中“分子”的概念，将组分强子类比为“原子”，它们进一步构成了类似于分子的“强子分子态”。

首个分子态是氘核。在 1931 年尤利等人发现氘之后，氘原子核的构成是当时的一大谜题。1932

年，查德威克运用 α 射线轰击 ^9Be 核，发现了质量与质子相当的电中性粒子，命名为“中子”。这一发现是核物理历史上的里程碑，它直接推动了人类对原子核结构的理解。而氘核被认为由质子和中子构成。然而，随之而来的问题是这两种粒子是如何束缚在原子核中的？后来，汤川秀树提出了汤川势，并指出该势能是通过交换一种新的粒子（ π 介子）提供。汤川势的形式为 $V(r) = -g^2 e^{-m_\pi r}/r$ （此处 $g^2 = \frac{g_{\pi N}^2}{4\pi} \left(\frac{M_\pi}{2m_N}\right)^2 \approx 0.07$ ， $\frac{g_{\pi N}^2}{4\pi} \approx 14$ ^[31]；其中的 $g_{\pi N}$ 为核子、 π 介子耦合常数， M_π 、 m_N 分别为 π 介子及核子质量）。可以看出，汤川势的力程很短（随距离增加而指数衰减），且强度很大（耦合常数远大于电磁相互作用的耦合常数）。运用汤川势可以得出质子和中子能够形成束缚态的结论，从而很好地解释了氘核的构成。

后续的研究表明，除了 π 介子交换相互作用，提供核子间作用力（简称核力）的还包括 σ 、 ρ 、 ω 交换。其中， π 介子交换提供长程相互作用， σ 交换提供中程相互作用，而 ρ 、 ω 交换提供短程相互作用。介子交换势理论可以扩展至介子、重子之间的相互作用情形。在此基础上，人们可以研究介子或重子构成的分子态系统。早期的工作有：由正反粲介子（底介子）构成的分子态^[32-35]，由一对轻味介子构成的分子态^[36-39]等。

然而，在相当长的时间里，大多数已发现的粒子都可以在传统的介子、重子框架下得到很好的解释，因此分子态这一课题并没获得太多关注。

直到 2003 年,随着 $X(3872)$ 的发现,高能物理实验发现了大量的新强子态(例如 $Z_c(3900)$, $Z_c(4020)$, $Z_b(10610)$, $Z_b(10650)$, $P_c(4312)$, $P_c(4440)$, $P_c(4457)$ 等),其中很多粒子的质量接近两个强子的质量阈值,因此它们是很好的分子态候选者。于是,分子态这一研究课题也就变得备受关注。对于相关的理论与实验研究,读者可参考综述 [1-11,13-24]。

1.2 正反双夸克态研究简介

1964 年, Gell-Mann 在其革命性的论文中提出了“夸克”的概念,同时他还指出可能存在由两个夸克构成的双夸克(diquark) [40]。三年后, Lichtenberg 和 Tassie 的文章 [41] 中指出,可能存在正反双夸克态。现在我们知道,双夸克可以分为颜色六重态和反三重态。其中,颜色反三重态中的两个夸克是吸引的,而颜色六重态的两个夸克是排斥的。因此,正反双夸克态中的双夸克(反双夸克)应该属于颜色反三重态(三重态)。

如前所述,2003 年之后,由于 $X(3872)$ 等一系列无法在传统介子、重子框架下得以解释的粒子被高能物理实验所发现,因此正反双夸克态成了重要的研究对象。Maiani 等人在其文章 [42] 中给出了正反双夸克态的图像,即双夸克和反双夸克分别位于一个较高势垒两侧的势阱中,从而形成由四个夸克构成的更大的系统(如图1所示);而正反双夸克态中的夸克、反夸克仍有一定的几率通过量子隧穿而越过势垒,这将导致正反双夸克态衰变为两个介子。

研究该系统的理论方法包括:双夸克模型(diquark model) [43-46]、夸克模型(quark model) [47-50]、QCD 求和规则(QCD sum rule) [51-54] 等。

不同理论组的研究表明,目前所发现的部分四夸克态候选者在分子态以及正反双夸克态的框架下均能得到很好的解释,因此我们认为一些四夸克态中这两种成分应该以一定的比例存在(Fock 态展开也同样支持这个观点)。在此前提下,我们近些年提出了一套新的理论方法,即在有效场论框架下考虑分子态与正反双夸克态的混合效应 [26-30]。下面对这些工作予以介绍。

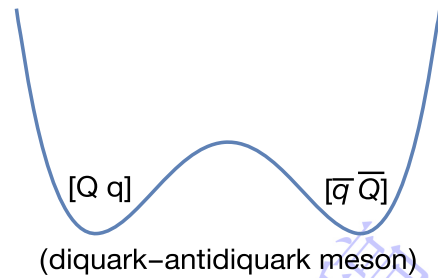


图 1: 正反双夸克态的物理图像 [42]。

2 隐局域规范对称性下包含双夸克场的有效场理论

众所周知,手征微扰理论(chiral perturbation theory)是研究量子色动力学低能区物理现象的有力工具。它基于手征对称性自发破缺,并将 π 介子、 K 介子和 η 介子视为相应的戈德斯通(Goldstone)玻色子。然而,在能量较高的区域(大约 200 MeV 以上) [55],手征微扰理论可能并不适用。一种简单的

解决方法是引入矢量介子。目前有多种方案 [55–58] 能够实现这一点，例如隐局域规范对称性（hidden local gauge symmetry）方法、物质场方法、反对称张量场方法和有质量杨-米尔斯场方法。

我们的工作关注的是第一种方法，即隐局域规范对称性方法 [55,58]。该理论考虑了 $G_{\text{global}} \otimes H_{\text{local}}$ 对称性。其中 $G_{\text{global}} = U(3)_L \otimes U(3)_R$ 表示全局手征对称性， $H_{\text{local}} = U(3)_V$ 表示隐局域规范对称性。在此框架下，矢量介子作为规范玻色子被引入，其形式为

$$V_\mu = \frac{g_V}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{(\rho^0 + \omega)}{\sqrt{2}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{(\rho^0 - \omega)}{\sqrt{2}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & \phi \end{pmatrix}_\mu. \quad (1)$$

通过将手征微扰理论中的 $U = e^{i\Phi/f_\pi}$ 分解为 $U = \xi_L^\dagger \xi_R$ ，可以引入基本量 ξ_L 和 ξ_R 。它们在 $G_{\text{global}} \otimes H_{\text{local}}$ 对称性下的变换性质如下：

$$\xi_{L,R}(x) \rightarrow \xi'_{L,R} = h(x) \xi_{L,R} g_{L,R}^\dagger, \quad (2)$$

其中

$$h(x) \in H_{\text{local}}, \quad g_{L,R} \in G_{\text{global}}. \quad (3)$$

这些变量可采用以下形式进行参数化：

$$\xi_{L,R} = e^{i\sigma/f_\sigma} e^{\mp i\Phi/(2f_\pi)}. \quad (4)$$

Φ 表示全局手征对称性 G_{global} 自发破缺相应的戈德斯通玻色子场，其形式为

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}\pi^0 + \eta + \sqrt{2}\eta'}{\sqrt{3}} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\frac{\sqrt{3}\pi^0 + \eta + \sqrt{2}\eta'}{\sqrt{3}} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2\eta + \sqrt{2}\eta'}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

而 σ 表示可被规范玻色子吸收的戈德斯通玻色子场。

两种 Maurer-Cartan 1-形式（Maurer-Cartan 1-form）定义为

$$\alpha_\perp^\mu = (\partial_\mu \xi_R \xi_R^\dagger - \partial_\mu \xi_L \xi_L^\dagger)/2i, \quad (6)$$

$$\alpha_\parallel^\mu = (\partial_\mu \xi_R \xi_R^\dagger + \partial_\mu \xi_L \xi_L^\dagger)/2i. \quad (7)$$

它们在 $G_{\text{global}} \otimes H_{\text{local}}$ 对称性下的变换规则为

$$\alpha_{\perp\mu} \rightarrow h(x) \alpha_{\perp\mu} h(x)^\dagger, \quad (8)$$

$$\alpha_{\parallel\mu} \rightarrow h(x) \alpha_{\parallel\mu} h(x)^\dagger - i \partial_\mu h(x) h(x)^\dagger. \quad (9)$$

ξ_L 和 ξ_R 的协变导数定义为

$$D_\mu \xi_{L,R} = \partial_\mu \xi_{L,R} - i V_\mu \xi_{L,R}, \quad (10)$$

矢量介子场 V_μ 表现为非齐次变换，即

$$V_\mu \rightarrow h(x) V_\mu h(x)^\dagger - i \partial_\mu h(x) h(x)^\dagger, \quad (11)$$

因此 $D_\mu \xi_{L,R}$ 的变换规则为

$$D_\mu \xi_{L,R} \rightarrow h(x) D_\mu \xi_{L,R} h(x)^\dagger. \quad (12)$$

于是，我们可以定义协变的 Maurer-Cartan 1-形式，其形式如下：

$$\hat{\alpha}_{\parallel\mu} = (D_\mu \xi_R \xi_R^\dagger + D_\mu \xi_L \xi_L^\dagger)/2i, \quad (13)$$

$$\hat{\alpha}_{\perp\mu} = (D_\mu \xi_R \xi_R^\dagger - D_\mu \xi_L \xi_L^\dagger)/2i, \quad (14)$$

它们与 $\alpha_{\perp\mu}$ 和 $\alpha_{\parallel\mu}$ 存在以下关系：

$$\hat{\alpha}_{\parallel\mu} = \alpha_{\parallel\mu} - V_\mu, \quad (15)$$

$$\hat{\alpha}_{\perp\mu} = \alpha_{\perp\mu}. \quad (16)$$

协变的 Maurer-Cartan 1-形式 $\hat{\alpha}_{\perp\mu}$ 和 $\hat{\alpha}_{\parallel\mu}$ 具有齐次变换性质, 即

$$\hat{\alpha}_{\perp,\parallel}^\mu \rightarrow h(x)\hat{\alpha}_{\perp,\parallel}^\mu h(x)^\dagger. \quad (17)$$

由于所考虑的顶点涉及重味介子, 因此我们需要定义相应的场。对于粲介子情形有

$$P = (D^0, D^+, D_s^+), \quad (18)$$

$$P_\mu^* = (D^{*0}, D^{*+}, D_s^{*+})_\mu, \quad (19)$$

对于底介子情形有

$$P = (B^-, \bar{B}^0, \bar{B}_s^0), \quad (20)$$

$$P_\mu^* = (B^{*-}, \bar{B}^{*0}, \bar{B}_s^{*0})_\mu. \quad (21)$$

这些场的变换性质被定义为

$$P \rightarrow Ph(x)^\dagger, \quad P_\mu^* \rightarrow P_\mu^* h(x)^\dagger. \quad (22)$$

P 与 P_μ^* 的协变导数定义为

$$D_\mu P = \partial_\mu P + iP\alpha_{\parallel\mu}^\dagger = \partial_\mu P + iP\alpha_{\parallel\mu}, \quad (23)$$

其变换规则如下:

$$D_\mu P \rightarrow D_\mu Ph(x)^\dagger, \quad (24)$$

$$D_\mu P_\nu^* \rightarrow D_\mu P_\nu^* h(x)^\dagger. \quad (25)$$

另一方面, 还需考虑重味双夸克场与轻味双夸克场, 即

$$S_Q^\alpha = (S_{Qu}, S_{Qd}, S_{Qs})^\alpha, \quad (26)$$

$$A_{Q\mu}^\alpha = (A_{Qu}, A_{Qd}, A_{Qs})_\mu^\alpha, \quad (27)$$

$$S^a = \begin{pmatrix} 0 & S_{ud} & S_{us} \\ -S_{ud} & 0 & S_{ds} \\ -S_{us} & -S_{ds} & 0 \end{pmatrix}^a, \quad (28)$$

$$A_\mu^a = \begin{pmatrix} A_{uu} & \frac{1}{\sqrt{2}}A_{ud} & \frac{1}{\sqrt{2}}A_{us} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}A_{ud} & A_{dd} & \frac{1}{\sqrt{2}}A_{ds} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}A_{us} & \frac{1}{\sqrt{2}}A_{ds} & A_{ss} \end{pmatrix}_\mu^a, \quad (29)$$

其中上标 $a = 1, 2, 3$ 表示颜色指标。 $S_{qq'}(A_{qq'})$ 表示由夸克 q 和夸克 q' 构成的标量 (轴矢) 双夸克。值得注意的是, 我们仅考虑颜色反三重态, 因为其中的两个夸克间的相互作用是吸引的 (颜色六重态中的两个夸克表现为排斥性)。双夸克场的变换性质为

$$S_c^a \rightarrow S_c^a h(x)^T, \quad (30)$$

$$A_{c\mu}^a \rightarrow A_{c\mu}^a h(x)^T, \quad (31)$$

$$S^a \rightarrow h(x)S^a h(x)^T, \quad (32)$$

$$A_\mu^a \rightarrow h(x)A_\mu^a h(x)^T. \quad (33)$$

相应的协变微商定义如下:

$$D_\mu S_Q^a = \partial_\mu S_Q^a - iS_Q^a \alpha_{\parallel\mu}^T, \quad (34)$$

$$D_\mu A_{Q\nu}^a = \partial_\mu A_{Q\nu}^a - iA_{Q\nu}^a \alpha_{\parallel\mu}^T, \quad (35)$$

$$D_\mu S^a = \partial_\mu S^a - iV_\mu S^a - iS^a V_\mu^T, \quad (36)$$

$$D_\mu A_\nu^a = \partial_\mu A_\nu^a - iV_\mu A_\nu^a - iA_\nu^a V_\mu^T. \quad (37)$$

表1中列出了上述所有场及其协变微商在宇称对称性和电荷共轭对称性下的变换性质。

基于以上准备工作, 我们就可以构造出包含双

夸克的相互作用的拉氏量。其中, 两个轻味双夸克和一个轻味介子的顶点为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & ik_1 \langle S^a \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu T} D_\mu S^{a\dagger} \rangle - ik_1 \langle D_\mu S^a \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu T} S^{a\dagger} \rangle \\ & + ik_2 \langle S^a \hat{\alpha}_{\perp\mu}^T A^{a\mu\dagger} \rangle - ik_2 \langle A^{a\mu} \hat{\alpha}_{\perp\mu}^T S^{a\dagger} \rangle \\ & + ik_3 \langle A_{\mu\nu}^a \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu T} A^{a\nu\dagger} \rangle - ik_3 \langle A_\nu^a \hat{\alpha}_{\parallel\mu}^T A^{a\mu\nu\dagger} \rangle \end{aligned}$$

表 1: 场及其协变微商在宇称 ($\mathcal{P}$)、电荷共轭对称性 ($\mathcal{C}$) 下的变换性质。

	P	P_μ^*	$D_\mu P$	$D_\mu P_\nu^*$	$\hat{\alpha}_{\perp\mu}$	$\hat{\alpha}_{\parallel\mu}$	V_μ	
$\mathcal{P}$	$-P$	$P^{*\mu}$	$-D^\mu P$	$D^\mu P^{*\nu}$	$-\hat{\alpha}_\perp^\mu$	$\hat{\alpha}_\parallel^\mu$	V^μ	
$\mathcal{C}$	$P^{\dagger T}$	$-P_\mu^{*\dagger T}$	$D_\mu P^{\dagger T}$	$-D_\mu P_\nu^{*\dagger T}$	$\hat{\alpha}_{\perp\mu}^T$	$-\hat{\alpha}_{\parallel\mu}^T$	$-V_\mu^T$	
	S^a	A_μ^a	$D_\mu S^a$	$D_\mu A_\nu^a$	S_Q^a	$A_{Q\mu}^a$	$D_\mu S_Q^a$	$D_\mu A_{Q\mu}^a$
$\mathcal{P}$	S^a	$-A^{a\mu}$	$D^\mu S^a$	$-D^\mu A^{a\nu}$	S_Q^a	$-A_Q^{a\mu}$	$D^\mu S_Q^a$	$-D^\mu A_Q^{a\nu}$
$\mathcal{C}$	$-S^{a\dagger T}$	$A_\mu^{a\dagger T}$	$-D_\mu S^{a\dagger T}$	$D_\mu A_\nu^{a\dagger T}$	$-S_Q^{a\dagger T}$	$A_{Q\mu}^{a\dagger T}$	$-D_\mu S_Q^{a\dagger T}$	$D_\mu A_{Q\mu}^{a\dagger T}$

$$\begin{aligned}
& + k_4 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \langle A_{\mu\nu}^a \hat{\alpha}_{\perp\alpha}^T A_\beta^{a\dagger} \rangle \\
& + k_4 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \langle A_\beta^a \hat{\alpha}_{\perp\alpha}^T A_{\mu\nu}^{a\dagger} \rangle. \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h_2 (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{Q\mu\nu}^a \hat{\alpha}_{\parallel\alpha}^T D_\beta S_Q^{a\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} D_\beta S_Q^a \hat{\alpha}_{\parallel\alpha}^T A_{Q\mu\nu}^{a\dagger}) \\
& + h_3 (i A_{Q\mu}^a \hat{\alpha}_\perp^{\mu T} S_Q^{a\dagger} - i S_Q^a \hat{\alpha}_\perp^{\mu T} A_{Q\mu}^{a\dagger}) \\
& + h_4 (i A_{Q\mu}^a \hat{\alpha}_{\parallel\nu}^T A_Q^{a\mu\nu\dagger} - i A_Q^{a\mu\nu} \hat{\alpha}_{\parallel\nu}^T A_{Q\mu}^{a\dagger}) \\
& + h_5 (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{Q\mu}^a \hat{\alpha}_{\perp\nu}^T A_{Q\alpha\beta}^{a\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{Q\alpha\beta}^a \hat{\alpha}_{\perp\nu}^T A_{Q\mu}^{a\dagger}). \quad (40)
\end{aligned}$$

重味介子、重味双夸克与轻味双夸克的相互作用由以下拉氏量描述：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 = & e_1 (i P D_\mu S^a A_Q^{a\mu\dagger} - i A_Q^{a\mu} D_\mu S^{a\dagger} P^\dagger) \\
& + e_2 (i P A^{a\mu} D_\mu S_Q^{a\dagger} - i D_\mu S_Q^a A_\mu^{a\dagger} P^\dagger) \\
& + e_3 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (P A_{\mu\nu}^a A_{Q\alpha\beta}^{a\dagger} + A_{Q\alpha\beta}^a A_{\mu\nu}^{a\dagger} P^\dagger) \\
& + e_4 (i P_\mu^* D^\mu S^a S_Q^{a\dagger} - i S_Q^a D^\mu S^{a\dagger} P_\mu^{*\dagger}) \\
& + e_5 (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\mu^* D_\nu S^a A_{Q\alpha\beta}^{a\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{Q\alpha\beta}^a D_\nu S^{a\dagger} P_\mu^{*\dagger}) \\
& + e_6 (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\mu^* A_{\nu\alpha}^a D_\beta S_Q^{a\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} D_\beta S_Q^a A_{\nu\alpha}^{a\dagger} P_\mu^{*\dagger}) \\
& + e_7 (i P_\mu^* A^{a\mu\nu} A_{Q\nu}^{a\dagger} - i A_{Q\nu}^a A^{a\mu\nu\dagger} P_\mu^{*\dagger}) \\
& + e_8 (i P_\mu^* A_\nu^a A_Q^{a\mu\nu\dagger} - i A_Q^{a\mu\nu} A_\nu^{a\dagger} P_\mu^{*\dagger}) \\
& + e_9 (i P_{\mu\nu}^* A^{a\mu} A_Q^{a\nu\dagger} - i A_Q^{a\nu} A^{a\mu\dagger} P_{\mu\nu}^{*\dagger}). \quad (39)
\end{aligned}$$

在公式(38)-(40)中, 矢量介子与轴矢双夸克的场强张量定义如下：

$$P_{\mu\nu}^* = D_\mu P_\nu^* - D_\nu P_\mu^*, \quad (41)$$

$$A_{Q\mu\nu}^a = D_\mu A_{Q\nu}^a - D_\nu A_{Q\mu}^a, \quad (42)$$

$$A_{\mu\nu}^a = D_\mu A_\nu^a - D_\nu A_\mu^a. \quad (43)$$

两个重味双夸克和一个轻味介子的顶点为

$$\mathcal{L}_3 = h_1 (i S_Q^a \hat{\alpha}_\parallel^{\mu T} D_\mu S_Q^{a\dagger} - i D_\mu S_Q^a \hat{\alpha}_\parallel^{\mu T} S_Q^{a\dagger})$$

拉氏量中成对出现的颜色指标“ a ”表示对这些颜色进行求和。

3 四夸克态中的分子态与正反双夸克态的混合效应

3.1 粲奇异奇特态 Z_{cs}

寻找由 c 、 $\bar{c}$ 、 s 和 q 构成的 Z_{cs} 粒子是强子物理领域的重要课题。2020 年, BESIII 实验在 $e^+e^- \rightarrow K^+(D_s^- D^{*0} + D_s^{*-} D^0)$ 过程的 K^+ 反冲谱中, 发现了位于 $D_s^- D^{*0}$ 和 $D_s^{*-} D^0$ 质量阈值附近的 $Z_{cs}(3985)^+$ 信号 [59]。其质量和宽度为

$$m = 3982.5^{+1.8}_{-2.6} \pm 2.1 \text{ MeV}, \quad (44)$$

$$\Gamma = 12.8^{+6.1}_{-4.4} \pm 3.5 \text{ MeV}. \quad (45)$$

此后不久, LHCb 合作组在 $J/\psi K^+$ 不变质量谱中观测到了两个奇特态, 分别命名为 $Z_{cs}(4000)^+$ 和 $Z_{cs}(4220)^+$ [60]。相应的质量与宽度分别为

$$m_{Z_{cs}(4000)^+} = 4003 \pm 6^{+4}_{-14} \text{ MeV}, \quad (46)$$

$$\Gamma_{Z_{cs}(4000)^+} = 131 \pm 15 \pm 26 \text{ MeV}, \quad (47)$$

$$m_{Z_{cs}(4220)^+} = 4216 \pm 24^{+43}_{-30} \text{ MeV}, \quad (48)$$

$$\Gamma_{Z_{cs}(4220)^+} = 233 \pm 52^{+97}_{-73} \text{ MeV}. \quad (49)$$

2022 年, BESIII 实验在 K_S^0 反冲谱中发现了 $Z_{cs}(3985)^0$ 粒子, 相应的信号出现在 $D_s^- D^{*+}$ 与 $D_s^{*-} D^+$ 阈值附近 [61]。由于其质量、宽度与 $Z_{cs}(3985)^+$ 相近, 理论上它应为 $Z_{cs}(3985)^+$ 的同位旋伴随态。另一方面, 因 $Z_{cs}(3985)$ 与 $Z_{cs}(4000)$ 质量与宽度存在差异, 它们应该不是同一粒子。以上这些重要发现丰富了强子态谱, 同时也使得相关研究领域变得备受关注。在 Z_{cs} 粒子发现之前, 文献

[62] 中作者预言了 $D_s \bar{D}^*/D_s^* \bar{D}^*$ 阈值附近的带电粒子的衰变宽度。文献 [63] 指出, Z_{cs} 粒子衰变为 $\eta_c K$ 和 $J/\psi K$ 是合理的。在这些粒子被发现之后, 文献 [46, 64–92] 从分子态、紧致四夸克态等方面对 Z_{cs} 粒子进行了研究。

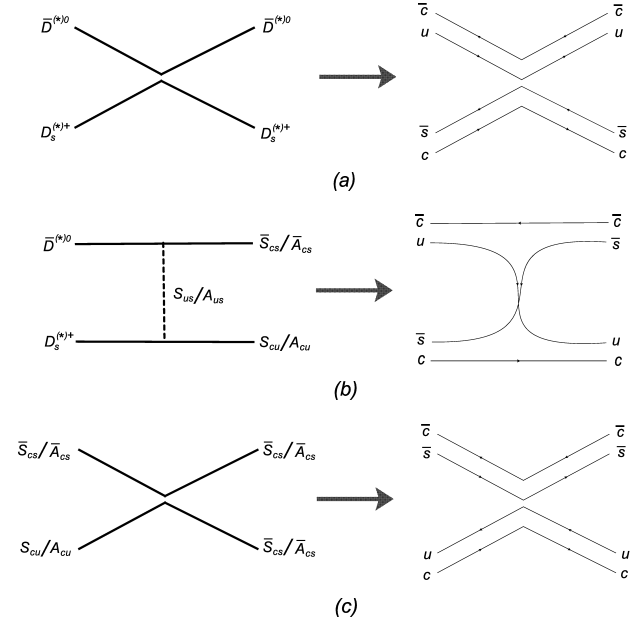


图 2: 介子-介子到介子-介子、介子-介子到双夸克-反双夸克、正反双夸克到正反双夸克过程的费曼图。

由于重夸克的质量远大于轻夸克, 所以其在强子衰变中可被视为旁观者。从这一角度来看, 在粲介子与反粲介子相互作用中, 轻味介子交换过程占据主导地位。然而, 若仅考虑 $\bar{D}^{(*)} D_s^{(*)}$ 强子分子态组分来理解观测到的 Z_{cs} 粒子, 相应有效势所对应的散射过程会因 Okubo-Zweig-Iizuka (OZI) 规则 [93–95] 而压低。这种被压低的势能可能不足以形成较为稳定的粒子。如果引入正反双夸克态组分, 上述问题便迎刃而解。其原因在于介子-介子组分可通过轻味双夸克交换转化为双夸克-反双夸克组分 (见图2(b)),

而这一过程是 OZI 允许的。

运用(39)式中的拉氏量，我们计算了介子-介子到双夸克-反双夸克过程相应的有效势，结果如下：

$$\begin{aligned}
V^{\bar{D}^{*0}D_s^* \rightarrow \bar{A}_{cs}^*S_{cu}^*} &= \frac{e_2\sqrt{m_{S_{cu}}m_{D_s^*}m_{\bar{A}_{cs}}m_{\bar{D}^{*0}}}}{4m_{A_{us}}^2} \\
&\times \left[e_8(s - m_{A_{cs}}^2 - m_{S_{cu}}^2) \right. \\
&\quad \left. + e_9(m_{\bar{D}^{*0}}^2 + m_{S_{cu}}^2 - u) \right] \\
&\times \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_3^\dagger, \\
V^{\bar{D}^0D_s^* \rightarrow \bar{S}_{cs}^*A_{cu}^*} &= \frac{e_2\sqrt{m_{\bar{D}^{*0}}m_{S_{cu}}m_{A_{cu}}m_{D_s^*}}}{4m_{A_{cu}}^2} \\
&\times \left[e_8(s - m_{S_{cu}}^2 - m_{A_{cu}}^2) \right. \\
&\quad \left. + e_9(m_{D_s^*}^2 + m_{S_{cu}}^2 - u) \right] \\
&\times \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_4^\dagger, \\
V^{\bar{D}^{*0}D_s^* \rightarrow \bar{A}_{cs}^*A_{cu}^*} &= \frac{1}{4}\sqrt{m_{\bar{D}^{*0}}m_{A_{cu}}m_{A_{cu}}m_{D_s^*}} \\
&\times \left[e_8(s - m_{A_{cu}}^2 - m_{A_{cu}}^2) \right. \\
&\quad + e_8e_9(m_{D_s^*}^2 + m_{A_{cu}}^2 + m_{\bar{D}^{*0}}^2 \\
&\quad + m_{A_{cu}}^2 - 2u) + e_9(s - m_{\bar{D}^{*0}}^2 \\
&\quad \left. - m_{D_s^*}^2) \right] \frac{1}{m_{A_{us}}^2} \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_3^\dagger \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_4^\dagger, \quad (52)
\end{aligned}$$

其中 $s = (p_1 + p_2)^2$, $u = (p_1 - p_4)^2$ 。

通过求解在壳近似下的 Bethe-Salpeter (BS) 方程，我们便可得到 T 矩阵：

$$T = (I - VG)^{-1}V. \quad (53)$$

数值结果表明， $\bar{D}^{*0}D_s^*/\bar{A}_{cs}S_{cu}$ 、 $\bar{D}^{*0}D_s^*/\bar{A}_{cs}A_{cu}$ 以及 $\bar{D}^0D_s^*/\bar{S}_{cs}A_{cu}$ 体系中存在三个自旋为 1 的共振态，其极点位置分别位于第二黎曼面的 $(4013 \pm 42i)$ MeV、 $(4208 \pm 13i)$ MeV 和 $(4112 \pm 66i)$ MeV 处。其中，因为第一个共振态的质量、宽度与 LHCb 实验

测得的 $Z_{cs}(4000)^+$ 数据吻合，因此 $Z_{cs}(4000)^+$ 可以被解释为分子态与正反双夸克态的混合。第二个共振态的质量与 $Z_{cs}(4220)^+$ 实验值一致，但其宽度远小于 $Z_{cs}(4220)^+$ ；由于 $Z_{cs}(4220)^+$ 宽度的实验数据误差较大，因此我们期望进一步的实验研究进行更为精确的测量，从而检验 $Z_{cs}(4220)^+$ 是否为分子态与正反双夸克态的混合。此外，在 $\bar{D}^{*0}D_s^{*+}/\bar{A}_{cs}A_{cu}$ 体系中还存在一个束缚态和一个虚态，其质量约为 4100 MeV，自旋为 $J = 1$ 。对于 $\bar{D}^{*0}D_s^{*+}/\bar{A}_{cs}A_{cu}$ 体系中自旋为 0 和 2 的态，我们得到的极点位置与自旋为 1 的情况相同。

$\bar{D}^{*0}D_s^{*+}/\bar{A}_{cs}S_{cu}$ 和 $\bar{D}^0D_s^{*+}/\bar{S}_{cs}A_{cu}$ 共振态可能的衰变道分别为 $D^{*0}D_s^+$ 和 $\bar{D}^0D_s^{*+}$ ，而自旋为 0、1、2 的 $D^{*0}D_s^{*+}/A_{cs}A_{cu}$ 共振态则可衰变为 $D^{*0}D_s^{*+}$ 。此外，由于末态相互作用， $J/\psi K^{(*)+}$ 可能是 Z_{cs} 粒子的重要衰变道。未来的高能物理实验可以通过这些衰变道进一步研究 Z_{cs} 粒子的性质。

3.2 类粲偶素 $Z_c(3900)$

2013 年，BESIII 实验在 $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi$ 反应中首次观测到了带电粒子 $Z_c^+(3900)$ [96]，随后 Belle 实验证实了该粒子的存在 [97]。2014 年，BESIII 合作组在开粲过程 $e^+e^- \rightarrow \pi^\pm(D\bar{D}^*)$ 的 $D\bar{D}^*$ 不变质量谱中再次观测到带电的 $Z_c^+(3900)$ [98]。2015 年，BESIII 合作组在 $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0J/\psi$ 和 $e^+e^- \rightarrow \pi^0(D\bar{D}^*)^0$ 过程中均观测到了电中性的 $Z_c^0(3900)$ 粒子 [99,100]。2017 年，BESIII 实验确定

了 $Z_c(3900)$ 的自旋宇称为 1^+ [101]。 $Z_c(3900)$ 质量与宽度的最新数据分别为 [102]

$$m = 3893.1 \pm 2.2 \pm 3.0 \text{ MeV}, \quad (54)$$

$$\Gamma = 44.4 \pm 5.2 \pm 14.0 \text{ MeV}. \quad (55)$$

关于 $Z_c(3900)$ 的其它实验研究,可参考文献 [103–105]。文献 [106] 中,作者考察了 $e^+e^- \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 过程的 $\pi^+\pi^-$ 和 $J/\psi\pi^\pm$ 不变质量谱,以及 $e^+e^- \rightarrow D^0D^{*-}\pi^+$ 过程的 D^0D^{*-} 不变质量谱,并对能量点 $E = 4.23 \text{ GeV}$ 和 4.26 GeV 处的实验数据进行了统一描述,从而将 $Z_c(3900)$ 的质量与宽度精确地确定为

$$m = 3880.7 \pm 1.7 \pm 22.4 \text{ MeV}, \quad (56)$$

$$\Gamma = 35.9 \pm 1.4 \pm 15.3 \text{ MeV}. \quad (57)$$

2013 年 $Z_c(3900)$ 粒子被发现之后,学界对其本质属性展开了广泛讨论。由于 $Z_c(3900)$ 的同位旋为 1, 其对应三种不同的电荷状态,即 ‘+、0、-’, 故 $Z_c(3900)$ 不可能是粲偶素 (粲偶素电荷只能为 0)。另一方面,由于其质量接近 $D\bar{D}^*/D^*\bar{D}$ 阈值,因此部分研究将其解释为分子态。然而其它解释仍不可排除,例如紧致四夸克态结构、运动学效应等。目前已有大量理论工作探讨这些课题,感兴趣的读者可参考相关综述 [1–13,15,16,18]

我们的研究基于有效场理论,考虑了双夸克、介子相互作用,从而引入强子分子态与正反双夸克态两种构型的混合效应,以揭示 $Z_c(3900)$ 粒子的本质。通过描述这些相互作用的拉氏量 ((39)-(40)式),

我们计算了考虑 $D\bar{D}^*/D\bar{D}^*$ 和 $S_{cq}\bar{A}_{cq}/A_{cq}\bar{S}_{cq}$ 耦合道相应的有效势。再通过求解在壳近似下的 BS 方程,我们得到了第二黎曼面上共振极点位置随不同截断值的变化关系。若截断在 $1400 - 1500 \text{ MeV}$ 范围内,所得的极点的实部范围为 $3901 - 3888 \text{ MeV}$, 虚部范围为 $26 - 17 \text{ MeV}$ 。该结果与文献 [102,106] 中给出的 $Z_c(3900)$ 粒子质量及宽度高度吻合,这表明 $Z_c(3900)$ 可解释为 $D\bar{D}^*/D\bar{D}^*$ 与 $S_{cq}\bar{A}_{cq}/A_{cq}\bar{S}_{cq}$ 的混合。此外,与 $D\bar{D}^*/D\bar{D}^*$ 及 $S_{cq}\bar{A}_{cq}/A_{cq}\bar{S}_{cq}$ 耦合道的有效耦合常数的模分别为 $8.606 - 8.412 \text{ GeV}$ 和 $15.727 - 14.874 \text{ GeV}$, 这表明正反双夸克态成分占据重要地位。

3.3 类粲偶素 $X(4500)$

LHCb 合作组在文献 [60,107,108] 中公布了通过 $J/\psi\phi$ 不变质量谱观测到的四个共振态。其中两个被命名为 $X(4140)$ 和 $X(4274)$, 量子数为 $J^{PC} = 1^{++}$; 另外两个则被命名为 $X(4500)$ 和 $X(4700)$, 其量子数为 $J^{PC} = 0^{++}$ 。我们的工作聚焦于 $X(4500)$ 粒子,对其内部构成进行了深入研究。该粒子的质量与宽度如下 [109]:

$$m = 4474 \pm 4 \text{ MeV}, \quad \Gamma = 77^{+12}_{-10} \text{ MeV}. \quad (58)$$

LHCb 发现 $X(4500)$ 粒子之后,很多理论组对其内部结构产生了浓厚兴趣。文献 [52,110–113] 运用 QCD 求和规则对 $X(4500)$ 进行了研究;文献 [110,111] 的作者将其解释为 $J^P = 0^+$ 的 D 波四夸克态,而文献 [52,112,113] 则认为 $X(4500)$ 是具有 $[cs]_A[cs]_A$

构型的 $2S$ 四夸克态。Maiani 等人在文献 [45] 中将 $X(4140)$ 、 $X(4500)$ 和 $X(4700)$ 分别解释为 $1S$ 、 $2S$ 及 $2S$ 正反双夸克态，并提出 $X(4274)$ 相应的实验线形可能对应于量子数为 $J^{PC} = 0^{++}$ 、 2^{++} 的两个近乎简并的粒子。在文献 [49,114] 基于夸克模型的研究中， $X(4500)$ 被解释为轨道或径向激发的四夸克态；而文献 [115] 的作者通过手征夸克模型的研究发现，理论上并不存在与 $X(4500)$ 对应的粒子。根据双夸克-反双夸克模型 [116,117]， $X(4500)$ 可解释为处于激发态的 S 波正反双夸克态。文献 [118] 通过研究三角圈图机制指出，将 $X(4500)$ 解释为 P 波阈值重散射效应存在困难。文献 [119] 的作者通过拟合 LHCb 实验数据，发现 $X(4500)$ 相应的峰源自重散射效应导致的 S 波 $D_{s1}\bar{D}_s$ 阈尖 (cusp)，且其拟合参数显著少于 LHCb 所使用的模型。此外，文献 [120-122] 将 $X(4500)$ 态解释为 $4P$ 态的粲偶素。

通过上述讨论可以看出， $X(4500)$ 的构型尚不明晰。因此，本工作对 $X(4500)$ 进行了重新分析，尝试探讨是否能在分子态与正反双夸克态混合效应框架下解释 $X(4500)$ 粒子，从而揭示其结构特征。

在本研究中，我们运用前文给出的包含双夸克有效场的拉氏量 ((39)-(40)式)，并通过费曼规则，得到了与 $D_s^{*+}D_s^{*-}/A_{cq}\bar{A}_{cq}/A_{cs}\bar{A}_{cs}$ 耦合道相应的有效势。之后，通过求解 BS 方程发现，在第二黎曼面坐标为 $(4488.0 \pm i29.6)$ MeV 处存在共振态解，截断参数为 $q_{\max} = 900$ MeV。该共振态的质量、宽度与 $X(4500)$ 的实验值完全一致，该结果

表明 $X(4500)$ 可解释为分子态与正反双夸克态成分的混合。我们还计算了各耦合道的有效耦合常数，即 $|g_{D_s^{*+}D_s^{*-}}| = 5244$ MeV， $|g_{A_{cq}\bar{A}_{cq}}| = 3784$ MeV， $|g_{A_{cs}\bar{A}_{cs}}| = 10513$ MeV，这表明正反双夸克态组分 $A_{cs}\bar{A}_{cs}$ 占据重要地位。

此外，我们的结果预言，具有量子数 $I^G(J^{PC}) = 0^+(1^{++})$ 和 $0^+(2^{++})$ 的 $D_s^{*+}D_s^{*-}/A_{cq}\bar{A}_{cq}/A_{cs}\bar{A}_{cs}$ 系统也存在共振态。在不考虑自旋-轨道耦合、张量力等效应的前提下，这两个态的有效势与 $X(4500)$ 相同，从而它们的质量和宽度理论值均相同。

对于这些粒子的衰变，除了 $J/\psi\phi$ 道外，开粲道 (即 $D_s^{(*)}\bar{D}_s^{(*)}$ 和 $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$) 同样非常重要。未来的实验可通过此类衰变过程对这些粒子进行深入研究。

3.4 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)$ 粒子

2022 年，LHCb 合作组对 $B^0 \rightarrow \bar{D}^0 D_s^+ \pi^-$ 和 $B^+ \rightarrow D^- D_s^+ \pi^+$ 衰变过程进行了分析，并在 $D_s^+ \pi^-$ 和 $D_s^+ \pi^+$ 不变质量谱中发现了两种开味 (open flavour) 四夸克态： $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^0$ 和 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{++}$ ，其显著性分别为 8.0σ 和 6.5σ [123,124]。这两个粒子的最小夸克组分分别为 $c\bar{s}d\bar{u}$ 和 $c\bar{s}u\bar{d}$ ，两者的量子数均为 $I(J^P) = 1(0^+)$ ，其质量与宽度如下 [109]：

$$m_{T_{c\bar{s}}^0} = 2892 \pm 14 \pm 15 \text{ MeV}, \quad (59)$$

$$\Gamma_{T_{c\bar{s}}^0} = 119 \pm 26 \pm 13 \text{ MeV}, \quad (60)$$

$$m_{T_{c\bar{s}}^{++}} = 2921 \pm 17 \pm 20 \text{ MeV}, \quad (61)$$

$$\Gamma_{T_{c\bar{s}}^{++}} = 137 \pm 32 \pm 17 \text{ MeV}. \quad (62)$$

$T_{c\bar{s}0}^*(2900)^0$ 与 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{++}$ 的质量差与宽度差分别为 [124]

$$\Delta m = 28 \pm 20 \pm 12 \text{ MeV}, \quad (63)$$

$$\Delta \Gamma = 15 \pm 39 \pm 16 \text{ MeV}, \quad (64)$$

这与零值是一致的。因此，这两个粒子自然被理解为同一同位旋三重态中的两个成员。

在上述发现之前，学界已对 $cq\bar{s}\bar{q}$ (夸克 $q = u, d$) 四夸克态系统开展了一系列理论探索 [125–132]

该实验发现之后，很多理论组对该领域进行了研究。考虑到 D^*K^* 和 $D_s^*\rho$ 阈值与 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{0/++}$ 质量非常接近，一些研究者提出了 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{0/++}$ 的强子分子态解释。文献 [133] 中，作者基于单玻色子交换模型将 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{0/++}$ 解释为同位旋矢量的 D^*K^* 分子态。文献 [134,135] 采用 QCD 求和规则对这两个粒子进行了研究，并提出了两种不同解释，即 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^0$ 是 $D_s^+\rho^-$ 分子态，以及 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{++}$ 是 $D_s^+\rho^+$ 或 D^+K^+ 分子态。文献 [136] 发现，若 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^0$ 是 $D^{*0}K^{*0}$ 分子态，则其主要衰变道为 D^0K^0 ，同时 $D_s^+\pi^-$ 衰变道也能够被观测到。文献 [137] 中，作者提出 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)$ 可被解释为具有 $1(0^+)$ 量子数的 $Z_c(3900)$ 的粲奇异伴随态，在此前提下得到的 $D_s\pi$ 不变质量谱与实验数据一致。在隐局域规范对称性框架下， $T_{c\bar{s}0}^*(2900)$ 可解释为 $D^*\rho - D^*K$ 束缚/虚态 [138]。在 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)$ 为 D^*K^* 分子态的前提假设下，文献 [139–142] 提出通过 $B^+ \rightarrow D^+D^-K^+$ 、 $B^- \rightarrow D_s^+K^-\pi^-$ 、 $\Lambda_b \rightarrow D^0K^0\Lambda$ 及 $\bar{B}_s^0 \rightarrow K^0D^0\pi^0$ 等过程来探测 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)$ 。文献 [143] 基于组分夸克

模型的耦合道计算，得到了与 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)$ 粒子对应的共振态。

然而，紧致四夸克态解释仍不能被排除。基于 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)$ 是由轴矢双夸克与反双夸克构成的标量四夸克态这一假设，文献 [144,145] 的作者运用 QCD 求和规则计算了其质量及强衰变过程，所得结果与实验数据吻合。文献 [146] 采用非相对论性夸克势模型，得到了 $cq\bar{s}\bar{q}$ (夸克 $q = u, d$) 紧致四夸克态的质量，并以此为基础在夸克交换模型中对重排衰变过程进行了理论估算。文献 [147] 通过计算 $K^-n \rightarrow \bar{T}_{c\bar{s}0}^*(2900)^-\Lambda_c^+ \rightarrow \pi^-D_s^-\Lambda_c^+$ 反应的截面，对 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{0/++}$ 的预测进行了分析。文献 [148] 中，作者通过求解 BS 方程得出结论： $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{0/++}$ 应该不是 D^*K^* 束缚态。关于阈值效应、三角奇异性等其它解释，可参阅文献 [149–152]

可以看出， $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{0/++}$ 的构型并不明确。因此，我们运用本文第 2 部分介绍的包含双夸克的有效场理论，重新将 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{++}$ 视为分子态与正反双夸克态的混合，并试图理解其结构特征。

鉴于系统的量子数为 $I(J^P) = 1(0^+)$ ，我们考虑了三个耦合道： $D_s^{*+}\rho^+$ 、 $D^{*+}K^{*+}$ 以及 $A_{cu}\bar{A}_{sd}$ 。我们在第二黎曼面上得到了位于 $(2948 \pm i48) \text{ MeV}$ 的共振极点，截断参数为 $q_{\max} = 1100 \text{ MeV}$ ，耦合常数 $g_V = 4.89$ 。由于该共振态的质量和宽度与 LHCb 合作组测量的 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{++}$ 态相符，因此 $T_{c\bar{s}0}^*(2900)^{++}$ 粒子可被解释为 $D_s^{*+}\rho^+/D^{*+}K^{*+}/A_{cu}\bar{A}_{sd}$ 组分的混合。各耦合道的有效耦合常数分别为 $|g_{D_s^{*+}\rho^+}| =$

9415 MeV、 $|g_{D^{*+}K^{*+}}| = 6328 \text{ MeV}$ 和 $|g_{A_{cu}\bar{A}_{sd}}| = 10117 \text{ MeV}$ ，正反双夸克态组分 $A_{cu}\bar{A}_{sd}$ 的重要性与强子分子态组分相当。

此外，我们还预言了两个共振态，其量子数分别为 $I(J^P) = 1(1^+)$ 和 $I(J^P) = 1(2^+)$ ；由于它们的有效势相同，这两个共振态的质量、宽度与量子数为 $I(J^P) = 1(0^+)$ 的共振态完全一致。我们期待未来的实验能够对上述粒子进行探测。

4 颜色规范不变的双夸克有效场论

如上所述，我们之前的研究 [26-29] 中提出了一种理论方法，即在有效场论框架内探究分子态与正反双夸克态的混合效应。该研究运用隐局域规范对称性，构造了描述重味双夸克-轻味双夸克-重味介子、重味双夸克-重味双夸克-轻味介子以及轻味双夸克-轻味双夸克-轻味介子顶点的拉氏量。然而，由于双夸克是有色集团，双夸克与双夸克之间应该存在一定的胶子交换贡献，因此，如何构建双夸克与胶子之间的相互作用成了新的问题。

众所周知， $U(1)$ 规范对称性的建立成功描述了电磁相互作用。1954 年，杨振宁与 Robert L. Mills 在其具有划时代意义的论文 [153] 中，将规范不变性概念推广至非阿贝尔群—— $SU(2)$ 群，由此催生了电弱理论与量子色动力学 (QCD)。本研究进一步将 $SU(3)$ 颜色规范对称性拓展至双夸克体系，并建立了以胶子作为规范玻色子的双夸克颜色规范不变的相互作用理论。

为简化研究，我们假设双夸克为准点粒子（对于本文讨论的正反双夸克态，两个双夸克之间的距离比双夸克尺度大得多，因此可以在一定程度上忽略双夸克的结构，即将双夸克视为准点粒子）。前面提到，由于颜色六重态双夸克中的两个夸克表现为排斥性，因此我们工作仅考虑颜色反三重态的双夸克。味空间中的双夸克场的形式在前面已经给出，见(26)-(29)式。对于颜色反三重态双夸克，其颜色波函数是反对称的。因此，在颜色空间中双夸克场可表示为

$$X_C = \begin{pmatrix} 0 & X_{rg} & X_{rb} \\ -X_{rg} & 0 & X_{gb} \\ -X_{rb} & -X_{gb} & 0 \end{pmatrix}, \quad (65)$$

此处， $X = S, A, S_Q, A_Q$ ，下标 C 表示矩阵属于颜色空间。注：这里颜色的定义与前文有所区别（此处写成矩阵形式，而前文的颜色指标取为 $a = 1, 2, 3$ ），其好处是在后面推导双夸克-反双夸克系统有效势时，(65)式中的颜色指标直接对应夸克模型中的双夸克颜色波函数。

轻味双夸克与重味双夸克的自由拉氏量如下：

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{4} \langle \partial_\mu S \partial^\mu S^\dagger \rangle_{CF} - \frac{1}{4} m_S^2 \langle S S^\dagger \rangle_{CF}, \quad (66)$$

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu} F^{\dagger\mu\nu} \rangle_{CF} + \frac{1}{2} m_A^2 \langle A_\mu A^{\dagger\mu} \rangle_{CF}, \quad (67)$$

$$\mathcal{L}_{S_Q} = \frac{1}{2} \langle \partial_\mu S_Q \partial^\mu S_Q^\dagger \rangle_C - \frac{1}{2} m_{S_Q}^2 \langle S_Q S_Q^\dagger \rangle_C, \quad (68)$$

$$\mathcal{L}_{A_Q} = -\frac{1}{4} \langle F_{Q\mu\nu} F_Q^{\dagger\mu\nu} \rangle_C + \frac{1}{2} m_{A_Q}^2 \langle A_{Q\mu} A_Q^{\dagger\mu} \rangle_C. \quad (69)$$

其中， $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 和 $F_{Q\mu\nu} = \partial_\mu A_{Q\nu} - \partial_\nu A_{Q\mu}$ 是轴矢双夸克场的场强张量， $\langle \dots \rangle_{CF}$ 表示在颜色空间与味道空间中求迹，而 $\langle \dots \rangle_C$ 表示仅在颜色空间

中求迹。在 $SU(3)_c$ 规范变换下，双夸克场的变换规则它们在颜色空间中通过下式进行变换：

则为

$$S_C \rightarrow U S_C U^T, \quad (70)$$

$$A_{C\mu} \rightarrow U A_{C\mu} U^T, \quad (71)$$

$$S_{QC} \rightarrow U S_{QC} U^T, \quad (72)$$

$$A_{QC\mu} \rightarrow U A_{QC\mu} U^T, \quad (73)$$

$$D_\mu S \rightarrow U D_\mu S U^T, \quad (79)$$

$$D_\mu A_\nu \rightarrow U D_\mu A_\nu U^T, \quad (80)$$

$$D_\mu S_Q \rightarrow U D_\mu S_Q U^T, \quad (81)$$

$$D_\mu A_{Q\nu} \rightarrow U D_\mu A_{Q\nu} U^T. \quad (82)$$

轴矢双夸克场的协变场强张量表示为

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu, \quad (83)$$

$$\tilde{F}_{Q\mu\nu} \equiv D_\mu A_{Q\nu} - D_\nu A_{Q\mu}, \quad (84)$$

它们具有以下变换性质：

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \rightarrow U \tilde{F}_{\mu\nu} U^T, \quad (85)$$

$$\tilde{F}_{Q\mu\nu} \rightarrow U \tilde{F}_{Q\mu\nu} U^T. \quad (86)$$

其中 U 是颜色空间中 $SU(3)$ 群的群元。若变换是全局的，则(66)-(69)式中的拉氏量将保持不变。然而，若变换是局域的（即 U 依赖于时空坐标），那么这些拉氏量的不变性将被破坏。为保持拉氏量在局域规范变换下的对称性，我们需要引入规范场（即胶子场），其变换规则由下式给出：

$$G_\mu \equiv G_\mu^a t^a \rightarrow U(G_\mu^a t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu) U^\dagger. \quad (74)$$

此处， $t^a = \frac{\lambda^a}{2}$ ， $\lambda^a (a = 1, 2, \dots, 8)$ 是 Gell-Mann 矩阵。胶子场的场强张量为 $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ ，其变换规则为 $G_{\mu\nu}^a \rightarrow U G_{\mu\nu}^a U^\dagger$ 。双夸克场的协变导数定义如下：

$$D_\mu S = \partial_\mu S - i V_\mu S - i S V_\mu^T - i g G_\mu S - i g S G_\mu^T, \quad (75)$$

$$D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - i V_\mu A_\nu - i A_\nu V_\mu^T - i g G_\mu A_\nu - i g A_\nu G_\mu^T, \quad (76)$$

$$D_\mu S_Q = \partial_\mu S_Q - i V_\mu S_Q - i S_Q V_\mu^T - i g G_\mu S_Q - i g S_Q G_\mu^T, \quad (77)$$

$$D_\mu A_{Q\nu} = \partial_\mu A_{Q\nu} - i V_\mu A_{Q\nu} - i A_{Q\nu} V_\mu^T - i g G_\mu A_{Q\nu} - i g A_{Q\nu} G_\mu^T. \quad (78)$$

基于以上准备，我们就可以构造出颜色规范不变的拉氏量，其表达式如下：

$$\mathcal{L}'_S = \frac{1}{4} \langle D_\mu S D^\mu S^\dagger \rangle_{CF} - \frac{1}{4} m_S^2 \langle S S^\dagger \rangle_{CF}, \quad (87)$$

$$\mathcal{L}'_A = -\frac{1}{4} \langle \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \rangle_{CF} + \frac{1}{2} m_A^2 \langle A_\mu A^{\mu\dagger} \rangle_{CF}, \quad (88)$$

$$\mathcal{L}'_{S_Q} = \frac{1}{2} \langle D_\mu S_Q D^\mu S_Q^\dagger \rangle_C - \frac{1}{2} m_{S_Q}^2 \langle S_Q S_Q^\dagger \rangle_C, \quad (89)$$

$$\mathcal{L}'_{A_Q} = -\frac{1}{4} \langle \tilde{F}_{Q\mu\nu} \tilde{F}_Q^{\mu\nu} \rangle_C + \frac{1}{2} m_{A_Q}^2 \langle A_{Q\mu} A_Q^{\mu\dagger} \rangle_C. \quad (90)$$

另外，还存在 $S_Q - A_Q - G$ 、 $A - A - G$ 以及

$A_Q - A_Q - G$ 顶点，相应的拉氏量如下：

$$\mathcal{L}_{AAG} = i d_2 \langle A^\mu G_{\mu\nu}^T A^{\dagger\nu} \rangle_{CF}, \quad (91)$$

$$\mathcal{L}_{S_Q A_Q G} = d_{1Q} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \langle D_\mu S_Q G_{\nu\alpha}^T A_{Q\beta}^\dagger + A_{Q\beta} G_{\nu\alpha}^T D_\mu S_Q^\dagger \rangle_C, \quad (92)$$

$$\mathcal{L}_{A_Q A_Q G} = i d_{2Q} \langle A_\mu^Q G_{\mu\nu}^T A_Q^{\dagger\nu} \rangle_C. \quad (93)$$

轻味双夸克-轻味双夸克-轻味介子、重味双夸克-重味介子-轻味双夸克以及重味双夸克-重味双夸克-轻味介子顶点的拉氏量已在前文给出，即(38)-(40)式。若要得到相应的颜色规范不变的拉氏量，则需将这些拉氏量中的协变导数替换为(75)-(78)式中相应的协变导数，并添加若干不含协变导数但包含 $G_{\mu\nu}$ 的项，即

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 = & i\tilde{k}_1 \langle S \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu T} D_{\mu} S^{\dagger} \rangle_{CF} - i\tilde{k}_1 \langle D_{\mu} S \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu T} S^{\dagger} \rangle_{CF} \\
& + i\tilde{k}_2 \langle S \hat{\alpha}_{\perp\mu}^T A^{\mu\dagger} \rangle_{CF} - i\tilde{k}_2 \langle A^{\mu} \hat{\alpha}_{\perp\mu}^T S^{\dagger} \rangle_{CF} \\
& + i\tilde{k}_3 \langle \tilde{F}_{\mu\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu T} A^{\nu\dagger} \rangle_{CF} \\
& - i\tilde{k}_3 \langle A^{\nu} \hat{\alpha}_{\parallel}^T \tilde{F}^{\mu\nu\dagger} \rangle_{CF} \\
& + \tilde{k}_4 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \langle \tilde{F}_{\mu\nu} \hat{\alpha}_{\perp\alpha}^T A_{\beta}^{\dagger} \rangle_{CF} \\
& + \tilde{k}_4 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \langle A_{\beta} \hat{\alpha}_{\perp\alpha}^T \tilde{F}_{\mu\nu}^{\dagger} \rangle_{CF}, \quad (94) \\
\mathcal{L}_2 = & \tilde{e}_1 \langle i P D_{\mu} S A_Q^{\dagger} - i A_Q^{\mu} D_{\mu} S^{\dagger} P^{\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{e}_2 \langle i P A^{\mu} D_{\mu} S_Q^{\dagger} - i D_{\mu} S_Q A_{\mu}^{\dagger} P^{\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{e}_3 \langle \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{Q\alpha\beta}^{\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{F}_{Q\alpha\beta} \tilde{F}_{\mu\nu}^{\dagger} P^{\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{e}_4 \langle i P_{\mu}^* D^{\mu} S S_Q^{\dagger} - i S_Q D^{\mu} S^{\dagger} P_{\mu}^{*\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{e}_5 \langle \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_{\mu}^* D_{\nu} S \tilde{F}_{Q\alpha\beta}^{\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{F}_{Q\alpha\beta} D_{\nu} S^{\dagger} P_{\mu}^{*\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{e}_6 \langle \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_{\mu}^* \tilde{F}_{\nu\alpha} D_{\beta} S_Q^{\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} D_{\beta} S_Q \tilde{F}_{\nu\alpha}^{\dagger} P_{\mu}^{*\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{e}_7 \langle i P_{\mu}^* \tilde{F}^{\mu\nu} A_{Q\nu}^{\dagger} - i A_{Q\nu} \tilde{F}^{\mu\nu\dagger} P_{\mu}^{*\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{e}_8 \langle i P_{\mu}^* A_{\nu} \tilde{F}_Q^{\mu\nu\dagger} - i \tilde{F}_Q^{\mu\nu} A_{\nu}^{\dagger} P_{\mu}^{*\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{e}_9 \langle i P_{\mu\nu}^* A^{\mu} A_Q^{\nu\dagger} - i A_Q^{\nu} A^{\mu\dagger} P_{\mu\nu}^{*\dagger} \rangle_C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{e}_{10} \langle \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P A_{\mu} G_{\nu\alpha}^T A_{Q\beta}^{\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{Q\beta} G_{\nu\alpha}^T A_{\mu}^{\dagger} P^{\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{e}_{11} \langle \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_{\mu}^* S G_{\nu\alpha}^T A_{Q\beta}^{\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{Q\beta} G_{\nu\alpha}^T S^{\dagger} P_{\mu}^{*\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{e}_{12} \langle \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_{\mu}^* A_{\nu} G_{\alpha\beta}^T S_Q^{\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_Q G_{\alpha\beta}^T A_{\nu}^{\dagger} P_{\mu}^{*\dagger} \rangle_C, \quad (95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 = & \tilde{h}_1 \langle i S_Q \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu T} D_{\mu} S_Q^{\dagger} - i D_{\mu} S_Q \hat{\alpha}_{\parallel}^{\mu T} S_Q^{\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{h}_2 \langle \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{F}_{Q\mu\nu} \hat{\alpha}_{\parallel\alpha}^T D_{\beta} S_Q^{\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} D_{\beta} S_Q \hat{\alpha}_{\parallel\alpha}^T \tilde{F}_{Q\mu\nu}^{\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{h}_3 \langle i A_{Q\mu} \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu T} S_Q^{\dagger} - i S_Q \hat{\alpha}_{\perp}^{\mu T} A_{Q\mu}^{\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{h}_4 \langle i A_{Q\mu} \hat{\alpha}_{\parallel\nu}^T \tilde{F}_Q^{\mu\nu\dagger} - i \tilde{F}_Q^{\mu\nu} \hat{\alpha}_{\parallel\nu}^T A_{Q\mu}^{\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{h}_5 \langle \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{Q\mu} \hat{\alpha}_{\perp\nu}^T \tilde{F}_{Q\alpha\beta}^{\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{F}_{Q\alpha\beta} \hat{\alpha}_{\perp\nu}^T A_{Q\mu}^{\dagger} \rangle_C \\
& + \tilde{h}_6 \langle \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{Q\mu} G_{\nu\alpha}^T \hat{\alpha}_{\parallel\beta}^T S_Q^{\dagger} \\
& + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_Q \hat{\alpha}_{\parallel\beta}^T G_{\nu\alpha}^T A_{Q\mu}^{\dagger} \rangle_C. \quad (96)
\end{aligned}$$

以上拉氏量中，双夸克场在颜色空间的定义与(38)-(40)式中的存在一定差异，因此(94)-(96)式与(38)-(40)式中的耦合常数存在以下关系：

$$\tilde{k}_i = -2k_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (97)$$

$$\tilde{e}_i = -2\sqrt{M_{m,i} M_{d,i}} e_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 12), \quad (98)$$

$$\tilde{h}_i = -2\sqrt{M_{d,i} M'_{d,i}} h_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (99)$$

其中 $M_{m,i}$ 和 $M'_{d,i}$ 分别表示拉氏量的某一项中重味介子与重味双夸克的质量。

下面，我们计算双夸克与反双夸克之间的单胶

子交换势，这些势能对应于图3中的费曼图。通常情

况下，散射振幅 $\mathcal{M}$ 与动量空间中的相互作用势之间

可通过 Breit 方程来联系，即

$$V(\mathbf{q}) = \frac{\mathcal{M}(\mathbf{q})}{\sqrt{\prod_i 2m_i} \sqrt{\prod_f 2m_f}}, \quad (100)$$

其中 m_i 和 m_f 分别表示费曼图中初态和末态粒子的质量。坐标空间中的有效势 $V(\mathbf{r})$ 可通过傅里叶变换得到：

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{q}). \quad (101)$$

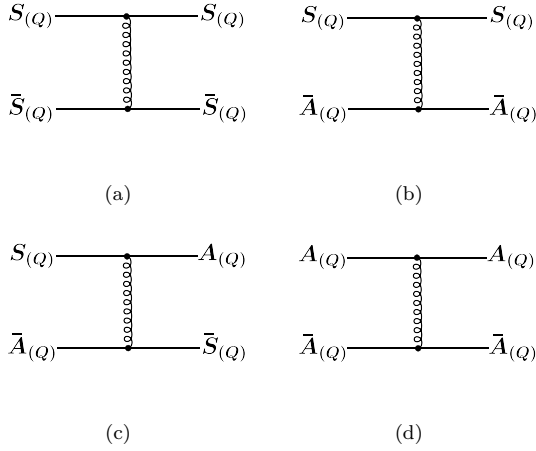


图 3: 双夸克与反双夸克之间的单胶子交换相互作用。 $S_{(Q)}$ 表示轻（重）味标量双夸克， $A_{(Q)}$ 表示轻（重）味轴矢双夸克。 $S_{(Q)}$ 代表 S 或 S_Q ，而 $A_{(Q)}$ 代表 A 或 A_Q 。

双夸克与反双夸克的色单态波函数表达式为

$$\chi_C = \frac{1}{\sqrt{3}} (\chi_{rg} \bar{\chi}_{\bar{r}\bar{g}} + \chi_{rb} \bar{\chi}_{\bar{r}\bar{b}} + \chi_{gb} \bar{\chi}_{\bar{g}\bar{b}}). \quad (102)$$

目前我们未考虑双夸克的内部结构，即双夸克被视作准点粒子。然而，双夸克的空间延展效应不可忽略。与文献 [154–156] 类似，我们采用形状因子

$F(\mathbf{q}^2)$ 来表征双夸克的内部结构：

$$F(\mathbf{q}^2) = \alpha_s(\mathbf{q}^2) \frac{Q_0^2}{Q_0^2 - \mathbf{q}^2}. \quad (103)$$

此处，我们取 $\alpha_s(\mathbf{q}^2) \approx 0.6$ ， $Q_0^2 = 3.2 \text{ GeV}^2$ [157]。于是，图3(a)-3(d)中相应的有效势可表示为如下形式：

$$V_a^{(Q)}(\mathbf{r}) = -\frac{4}{3} g^2 \alpha_s^2 Y(Q_0, r) + \frac{g^2 \alpha_s^2}{3m_{S(Q)}^2} Z(Q_0, r), \quad (104)$$

$$V_b^{(Q)}(\mathbf{r}) = -\frac{4}{3} g^2 \alpha_s^2 \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^\dagger Y(Q_0, r) + \frac{2}{9m_{S(Q)} m_{A(Q)}} g^2 \alpha_s^2 \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^\dagger Z(Q_0, r) - \frac{2}{9m_{S(Q)} m_{A(Q)}} g^2 \alpha_s^2 S(\hat{\mathbf{r}}, \epsilon_2, \epsilon_4^\dagger) \times T(Q_0, r), \quad (105)$$

$$V_c^Q(\mathbf{r}) = \frac{8}{9} d_{1Q}^2 \alpha_s^2 \epsilon_2 \cdot \epsilon_3^\dagger Z(Q_0, r) - \frac{4}{9} d_{1Q}^2 \alpha_s^2 S(\hat{\mathbf{r}}, \epsilon_2, \epsilon_3^\dagger) T(Q_0, r), \quad (106)$$

$$V_c(\mathbf{r}) = 0, \quad (107)$$

$$V_d^{(Q)}(\mathbf{r}) = -\frac{4}{3} g^2 \alpha_s^2 \epsilon_1 \cdot \epsilon_3^\dagger \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^\dagger Y(Q_0, r) + \frac{\alpha_s^2}{9m_{A(Q)}^2} \left[g^2 \epsilon_1 \cdot \epsilon_3^\dagger \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^\dagger + (g^2 + 2d_{2(Q)}^2 + 2d_{2(Q)}g) \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3^\dagger \cdot \epsilon_4^\dagger - 2(d_{2(Q)}^2 + d_{2(Q)}g) \epsilon_1 \cdot \epsilon_4^\dagger \epsilon_2 \cdot \epsilon_3^\dagger \right] \times Z(Q_0, r) - \frac{1}{9m_{A(Q)}^2} \alpha_s^2 \left[g^2 \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^\dagger \times S(\hat{\mathbf{r}}, \epsilon_1, \epsilon_3^\dagger) + g^2 \epsilon_1 \cdot \epsilon_3^\dagger S(\hat{\mathbf{r}}, \epsilon_2, \epsilon_4^\dagger) - d_{2(Q)}^2 \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 S(\hat{\mathbf{r}}, \epsilon_3^\dagger, \epsilon_4^\dagger) - (d_{2(Q)} + g)^2 \epsilon_3^\dagger \cdot \epsilon_4^\dagger S(\hat{\mathbf{r}}, \epsilon_1, \epsilon_2) + (d_{2(Q)}^2 + d_{2(Q)}g) \epsilon_1 \cdot \epsilon_4^\dagger S(\hat{\mathbf{r}}, \epsilon_2, \epsilon_3^\dagger) + (d_{2(Q)}^2 \right]$$

$$+ d_{2(Q)g} \epsilon_2 \cdot \epsilon_3^\dagger S(\hat{\mathbf{r}}, \epsilon_1, \epsilon_4^\dagger) \Big] T(Q_0, r). \quad (108)$$

其中

$$Y(Q_0, r) = \frac{1}{4\pi r} (1 - e^{-Q_0 r}) - \frac{Q_0}{8\pi} e^{-Q_0 r}, \quad (109)$$

$$Z(Q_0, r) = \nabla^2 Y(Q_0, r), \quad (110)$$

$$T(Q_0, r) = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} Y(Q_0, r). \quad (111)$$

该理论可以与前文给出的描述双夸克、介子相互作用的拉氏量相结合，并应用于四夸克态体系的研究中；与此同时，该理论还可以结合夸克模型，用于考察重子系统。

5 结论与展望

本文系统回顾了我们提出的基于隐局域规范对称性框架的包含双夸克场的有效场理论，并将其应用于多个四夸克态候选者的研究。结果表明， $Z_{cs}(4000)$ 、 $Z_c(3900)$ 、 $X(4500)$ 和 $T_{cs0}^*(2900)$ 等粒子可统一解释为强子分子态与正反双夸克态的混合，其中正反双夸克态组分具有重要的贡献^{*}。为了考察双夸克与胶子的相互作用，我们进一步建立了颜色规范不变的双夸克有效场理论，并在此基础上推导出了单胶子交换势，从而对描述包含双夸克相互作用的有效场理论做了进一步完善。

未来，我们将运用以上理论框架，探索更多分子态与正反双夸克态的混合效应，以新的视角理解各类四夸克态系统的内部结构；与此同时，我们将把颜

色规范不变的双夸克有效场理论与夸克模型相结合，并应用于重子系统的研究中，以检验我们理论的正确性。我们的工作将为 LHCb、BESIII、Belle II 等高能物理实验提供有意义的参考。

另外，五夸克态的研究也是高能物理学中的热门课题，它是由四个夸克和一个反夸克构成的奇特强子。2015 年，LHCb 发现了 $P_c(4380)^+$ 和 $P_c(4450)^+$ [158,159]，其最小夸克组分为 $uudc\bar{c}$ 。这是首个得到公认的五夸克态信号。随着实验精度的提高，LHCb 实验发现了 $P_c(4312)^+$ ，并指出原来的 $P_c(4450)^+$ 粒子其实是两个更窄的态，即 $P_c(4440)^+$ 和 $P_c(4457)^+$ [160]。之后，该实验组还发现了含奇异夸克的隐粲五夸克态 $P_{cs}(4459)^0$ [161] 以及 $P_{cs}(4338)^0$ [162]（它们的组分均为 $udsc\bar{c}$ ）。

目前，对这些五夸克态的内部结构的理解并未形成共识，相应的理论解释包括强子分子态、紧致五夸克态等 [163]。未来我们将把前文中构造出的拉氏量与夸克模型相结合，并应用于五夸克态情形，力求为澄清五夸克态的内部结构提供理论支持。

致谢

在兰州大学物理科学与技术学院 80 周年院庆之际，特别感谢王建波教授邀请撰写本文！衷心祝愿兰州大学物理科学与技术学院蒸蒸日上！

^{*}对于 $Z_{cs}(4000)$ 、 $Z_{cs}(4220)$ 、 $X(4500)$ 、 $Z_c(3900)$ ，若只考虑分子态成分，我们无法在复平面上找到相应的峰；而对于 $T_{cs0}^*(2900)$ ，若将其考虑为纯分子态，则可在第一黎曼面找到一个阈值尖峰（cusp），相应的讨论可参考文献 [125]。

参考文献

- [1] Chen H X, Chen W, Liu X, Zhu S L 2016 *Phys. Rept.* **639** 1
- [2] Liu Y R, Chen H X, Chen W, Liu X, Zhu S L 2019 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **107** 237
- [3] Olsen S L 2015 *Front. Phys. (Beijing)* **10** 121
- [4] Hosaka A, Iijima T, Miyabayashi K, Sakai Y, Yasui S 2016 *PTEP* **2016** 062C01
- [5] Lebed R F, Mitchell R E, Swanson E S 2017 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **93** 143
- [6] Esposito A, Pilloni A, Polosa A D 2017 *Phys. Rept.* **668** 1
- [7] Guo F K, Hanhart C, Meißner U G, Wang Q, Zhao Q, Zou B S 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 015004
- [8] Ali A, Lange J S, Stone S 2017 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **97** 123
- [9] Karliner M, Rosner J L, Skwarnicki T 2018 *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **68** 17
- [10] Albuquerque R M, Dias J M, Khemchandani K P, Martínez Torres A, Navarra F S, Nielsen M, Zanetti C M 2019 *J. Phys. G* **46** 093002
- [11] Brambilla N, Eidelman S, Hanhart C, Nefediev A, Shen C P, Thomas C E, Vairo A, Yuan C Z 2020 *Phys. Rept.* **873** 1
- [12] Guo F K, Liu X H, Sakai S 2020 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **112** 103757
- [13] Meng L, Wang B, Wang G J, Zhu S L 2023 *Phys. Rept.* **1019** 1
- [14] Bicudo P 2023 *Phys. Rept.* **1039** 1
- [15] Liu M Z, Pan Y W, Liu Z W, Wu T W, Lu J X, Geng L S 2025 *Phys. Rept.* **1108** 1
- [16] Chen H X, Chen W, Liu X, Liu Y R, Zhu S L 2023 *Rept. Prog. Phys.* **86** 026201
- [17] Dong X K, Guo F K, Zou B S 2021 *Commun. Theor. Phys.* **73** 125201
- [18] Dong Y, Faessler A, Lyubovitskij V E 2017 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **94** 282
- [19] Yang G, Ping J, Segovia J 2020 *Symmetry* **12** 1869
- [20] Drenska N, Faccini R, Piccinini F, Polosa A, Renga F, Sabelli C 2010 *Riv. Nuovo Cim.* **33** 633
- [21] Briere R A, Harris F A, Mitchell R E 2016 *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **66** 143
- [22] Richard J M 2016 *Few-Body Syst.* **57** 1185
- [23] Mezzadri G, Spataro S 2022 *Rev. Phys.* **8** 100070

- [24] Johnson D, Polyakov I, Skwarnicki T, Wang M 2024 *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **74** 583
- [25] Braaten E, Langmack C, Smith D H 2014 *Phys. Rev. D* **90** 014044
- [26] Cao Z H, He W, Sun Z F 2023 *Phys. Rev. D* **107** 014017
- [27] He W, Zhang D S, Sun Z F 2024 *Phys. Rev. D* **110** 054006
- [28] Zhang D S, He W, Xiao C W, Sun Z F 2024
- [29] Ma Y, Zhang D S, Pang C Q, Sun Z F 2024
- [30] Wang J F, Zhang D S, Sun Z F 2026 *Phys. Rev. D* **113** 016019
- [31] Epelbaum E, Hammer H W, Meissner U G 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1773
- [32] Voloshin M B, Okun L B 1976 *JETP Lett.* **23** 333
- [33] De Rujula A, Georgi H, Glashow S L 1977 *Phys. Rev. Lett.* **38** 317
- [34] Tornqvist N A 1994 *Z. Phys. C* **61** 525
- [35] Tornqvist N A 1994 *Nuovo Cim. A* **107** 2471
- [36] Weinstein J D, Isgur N 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 659
- [37] Weinstein J D, Isgur N 1983 *Phys. Rev. D* **27** 588
- [38] Weinstein J D, Isgur N 1990 *Phys. Rev. D* **41** 2236
- [39] Oller J A, Oset E, Pelaez J R 1999 *Phys. Rev. D* **59** 074001. [Erratum: *Phys. Rev. D* **60**, 099906 (1999), Erratum: *Phys. Rev. D* **75**, 099903 (2007)]
- [40] Gell-Mann M 1964 *Phys. Lett.* **8** 214
- [41] Lichtenberg D B, Tassie L J 1967 *Phys. Rev.* **155** 1601
- [42] Maiani L, Polosa A D, Riquer V 2018 *Phys. Lett. B* **778** 247
- [43] Jaffe R L, Wilczek F 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 232003
- [44] Maiani L, Piccinini F, Polosa A D, Riquer V 2014 *Phys. Rev. D* **89** 114010
- [45] Maiani L, Polosa A D, Riquer V 2016 *Phys. Rev. D* **94** 054026
- [46] Shi P P, Huang F, Wang W L 2021 *Phys. Rev. D* **103** 094038
- [47] Deng C, Ping J, Wang F 2014 *Phys. Rev. D* **90** 054009
- [48] Deng C, Ping J, Huang H, Wang F 2015 *Phys. Rev. D* **92** 034027
- [49] Wu J, Liu Y R, Chen K, Liu X, Zhu S L 2016 *Phys. Rev. D* **94** 094031

- [50] Luo S Q, Chen K, Liu X, Liu Y R, Zhu S L 2017 *Eur. Phys. J. C* **77** 709
- [51] Du M L, Chen W, Chen X L, Zhu S L 2013 *Phys. Rev. D* **87** 014003
- [52] Wang Z G 2017 *Eur. Phys. J. C* **77** 78
- [53] Wang Q N, Chen W, Chen H X 2021 *Chin. Phys. C* **45** 093102
- [54] Xi H Z, Jiang Y W, Chen H X, Hosaka A, Su N 2023 *Phys. Rev. D* **108** 094019
- [55] Harada M, Yamawaki K 2003 *Phys. Rept.* **381** 1
- [56] Meissner U G 1988 *Phys. Rept.* **161** 213
- [57] Birse M C 1996 *Z. Phys. A* **355** 231
- [58] Bando M, Kugo T, Yamawaki K 1988 *Phys. Rept.* **164** 217
- [59] Ablikim M, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 102001
- [60] Aaij R, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 082001
- [61] Ablikim M, et al. 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 112003
- [62] Dias J M, Liu X, Nielsen M 2013 *Phys. Rev. D* **88** 096014
- [63] Voloshin M B 2019 *Phys. Lett. B* **798** 135022
- [64] Meng L, Wang B, Zhu S L 2020 *Phys. Rev. D* **102** 111502
- [65] Yang Z, Cao X, Guo F K, Nieves J, Valderama M P 2021 *Phys. Rev. D* **103** 074029
- [66] Wan B D, Qiao C F 2021 *Nucl. Phys. B* **968** 115450
- [67] Ortega P G, Entem D R, Fernandez F 2021 *Phys. Lett. B* **818** 136382
- [68] Chen H X 2022 *Phys. Rev. D* **105** 094003
- [69] Meng L, Wang B, Wang G J, Zhu S L 2021 *Sci. Bull.* **66** 2065
- [70] Yan M J, Peng F Z, Sánchez Sánchez M, Pavon Valderrama M 2021 *Phys. Rev. D* **104** 114025
- [71] Xu Y J, Liu Y L, Cui C Y, Huang M Q 2021 *Phys. Rev. D* **104** 094028
- [72] Wang B, Meng L, Zhu S L 2021 *Phys. Rev. D* **103** L021501
- [73] Maiani L, Polosa A D, Riquer V 2021 *Sci. Bull.* **66** 1616
- [74] Yang G, Ping J, Segovia J 2021 *Phys. Rev. D* **104** 094035
- [75] Giron J F, Lebed R F, Martinez S R 2021 *Phys. Rev. D* **104** 054001

- [76] Wang Z G 2021 *Chin. Phys. C* **45** 073107
- [77] Karliner M, Rosner J L 2021 *Phys. Rev. D* **104** 034033
- [78] Han S, Xiao L Y 2022 *Phys. Rev. D* **105** 054008
- [79] Chen X, Tan Y, Chen Y 2021 *Phys. Rev. D* **104** 014017
- [80] Guo Z H, Oller J A 2021 *Phys. Rev. D* **103** 054021
- [81] Baru V, Epelbaum E, Filin A A, Hanhart C, Nefediev A V 2022 *Phys. Rev. D* **105** 034014
- [82] Albuquerque R M, Narison S, Rabetiarivony D 2021 *Phys. Rev. D* **103** 074015
- [83] Zhai Q Y, Liu M Z, Lu J X, Geng L S 2022 *Phys. Rev. D* **106** 034026
- [84] Özdem U, Yıldırım A K 2021 *Phys. Rev. D* **104** 054017
- [85] Wu Q, Chen D Y 2021 *Phys. Rev. D* **104** 074011
- [86] Wang J Z, Chen D Y, Liu X, Matsuki T 2021 *Phys. Lett. B* **817** 136345
- [87] Wang J Z, Zhou Q S, Liu X, Matsuki T 2021 *Eur. Phys. J. C* **81** 51
- [88] Ge Y H, Liu X H, Ke H W 2021 *Eur. Phys. J. C* **81** 854
- [89] Ikeno N, Molina R, Oset E 2021 *Phys. Lett. B* **814** 136120
- [90] Du M L, Albaladejo M, Guo F K, Nieves J 2022 *Phys. Rev. D* **105** 074018
- [91] Zhu K 2021 *Int. J. Mod. Phys. A* **36** 2150126
- [92] Chen H, Huang Q, Ping R G 2022 *Phys. Rev. D* **105** 036002
- [93] Okubo S 1963 *Phys. Lett.* **5** 165
- [94] Zweig G 1964 *CERN-TH-401, CERN-TH-412*
- [95] Iizuka J 1966 *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **37** 21
- [96] Ablikim M, et al. 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 252001
- [97] Liu Z Q, et al. 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 252002. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **111**, 019901 (2013)]
- [98] Ablikim M, et al. 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 022001
- [99] Ablikim M, et al. 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 112003
- [100] Ablikim M, et al. 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 222002

- [101] Ablikim M, et al. 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 072001
- [102] Ablikim M, et al. 2020 *Phys. Rev. D* **102** 012009
- [103] Abazov V M, et al. 2018 *Phys. Rev. D* **98** 052010
- [104] Ablikim M, et al. 2019 *Phys. Rev. D* **100** 111102
- [105] Abazov V M, et al. 2019 *Phys. Rev. D* **100** 012005
- [106] Chen Y H, Du M L, Guo F K 2024 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **67** 291011
- [107] Aaij R, et al. 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 022003
- [108] Aaij R, et al. 2025 *Phys. Rev. Lett.* **134** 031902
- [109] Navas S, et al. 2024 *Phys. Rev. D* **110** 030001
- [110] Chen H X, Cui E L, Chen W, Liu X, Zhu S L 2017 *Eur. Phys. J. C* **77** 160
- [111] Xie Y, Sun H 2024 *Nucl. Phys. B* **1000** 116471
- [112] Wang Z G 2017 *Eur. Phys. J. A* **53** 19
- [113] Wang Z G 2021 *Adv. High Energy Phys.* **2021** 4426163
- [114] Lü Q F, Dong Y B 2016 *Phys. Rev. D* **94** 074007
- [115] Yang Y, Ping J 2019 *Phys. Rev. D* **99** 094032
- [116] Zhu R 2016 *Phys. Rev. D* **94** 054009
- [117] Anwar M N, Ferretti J, Santopinto E 2018 *Phys. Rev. D* **98** 094015
- [118] Liu X H 2017 *Phys. Lett. B* **766** 117
- [119] Luo X, Nakamura S X 2023 *Phys. Rev. D* **107** L011504
- [120] Ferretti J, Santopinto E 2021 *Front. in Phys.* **9** 76
- [121] Badalian A M, Simonov Y A 2022 *Eur. Phys. J. C* **82** 1024
- [122] Badalian A M, Simonov Y A 2023 *Eur. Phys. J. C* **83** 410
- [123] Aaij R, et al. 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 041902
- [124] Aaij R, et al. 2023 *Phys. Rev. D* **108** 012017
- [125] Molina R, Branz T, Oset E 2010 *Phys. Rev. D* **82** 014010
- [126] Chen W, Chen H X, Liu X, Steele T G, Zhu S L 2017 *Phys. Rev. D* **95** 114005
- [127] Azizi K, Özdem U 2018 *J. Phys. G* **45** 055003
- [128] Cheng J B, Li S Y, Liu Y R, Liu Y N, Si Z G, Yao T 2020 *Phys. Rev. D* **101** 114017

- [129] Albuquerque R M, Narison S, Rabetiarivony D, Randriamanatrika G 2021 *Nucl. Phys. A* **1007** 122113
- [130] He X G, Wang W, Zhu R 2020 *Eur. Phys. J. C* **80** 1026
- [131] Lü Q F, Chen D Y, Dong Y B 2020 *Phys. Rev. D* **102** 074021
- [132] Guo T, Li J, Zhao J, He L 2022 *Phys. Rev. D* **105** 054018
- [133] Chen R, Huang Q *arXiv: 2208.10196 [hep-ph]*
- [134] Agaev S S, Azizi K, Sundu H 2023 *Phys. Rev. D* **107** 094019
- [135] Agaev S S, Azizi K, Sundu H 2023 *J. Phys. G* **50** 055002
- [136] Yue Z L, Xiao C J, Chen D Y 2023 *Phys. Rev. D* **107** 034018
- [137] Wang B, Chen K, Meng L, Zhu S L 2024 *Phys. Rev. D* **109** 034027
- [138] Duan M Y, Du M L, Guo Z H, Wang E, Chen D Y 2023 *Phys. Rev. D* **108** 074006
- [139] Duan M Y, Wang E, Chen D Y 2024 *Eur. Phys. J. C* **84** 681
- [140] Lyu W T, Lyu Y H, Duan M Y, Li D M, Chen D Y, Wang E 2024 *Phys. Rev. D* **109** 014008
- [141] Lyu W T, Lyu Y H, Duan M Y, Wang G Y, Chen D Y, Wang E 2025 *Eur. Phys. J. C* **85** 123
- [142] Lyu W T, Duan M Y, Wang X, Chen D Y, Wang E 2025 *Eur. Phys. J. C* **85** 90
- [143] Ortega P G, Entem D R, Fernandez F, Segovia J 2023 *Phys. Rev. D* **108** 094035
- [144] Yang X S, Xin Q, Wang Z G 2023 *Int. J. Mod. Phys. A* **38** 2350056
- [145] Lian D K, Chen W, Chen H X, Dai L Y, Steele T G 2024 *Eur. Phys. J. C* **84** 1
- [146] Liu F X, Ni R H, Zhong X H, Zhao Q 2023 *Phys. Rev. D* **107** 096020
- [147] Huang Y, Hei H, Feng J w, Chen X, Wang R 2023 *Phys. Rev. D* **108** 076019
- [148] Ke H W, Shi Y F, Liu X H, Li X Q 2022 *Phys. Rev. D* **106** 114032
- [149] Molina R, Oset E 2023 *Phys. Rev. D* **107** 056015
- [150] Ge Y H, Liu X H, Ke H W 2022 *Eur. Phys. J. C* **82** 955
- [151] Jiang C, Jin Y, Li S Y, Liu Y R, Si Z G 2023 *Symmetry* **15** 695
- [152] Dmitrašinović V *arXiv: 2301.05471 [hep-ph]*

- [153] Yang C N, Mills R L 1954 *Phys. Rev.* **96** 191
- [154] Anselmino M, Kroll P, Pire B 1987 *Z. Phys. C* **36** 89
- [155] Kroll P, Schweiger W 1987 *Nucl. Phys. A* **474** 608
- [156] Kroll P, Quadder B, Schweiger W 1989 *Nucl. Phys. B* **316** 373
- [157] Guo X H, Thomas A W, Williams A G 1999 *Phys. Rev. D* **59** 116007
- [158] Aaij R, et al. 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 072001
- [159] Aaij R, et al. 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 082002
- [160] Aaij R, et al. 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 222001
- [161] Aaij R, et al. 2021 *Sci. Bull.* **66** 1278
- [162] Aaij R, et al. 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 031901
- [163] Huang H, Deng C, Liu X, Tan Y, Ping J 2023 *Symmetry* **15** 1298

录用稿件，
非最终出版稿

Mixing Effect Between Molecular and Diquark-Antidiquark States in Tetraquarks*

Sun Zhifeng^{1-4)†}

1) (*School of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000*)

2) (*Research Center for Hadron and CSR Physics, Lanzhou University and Institute of
Modern Physics of CAS, Lanzhou 730000*)

3) (*Lanzhou Center for Theoretical Physics, Key Laboratory of Theoretical Physics of Gansu
Province, Key Laboratory of Quantum Theory and Applications of MoE, Gansu Provincial
Research Center for Basic Disciplines of Quantum Physics, Lanzhou University, Lanzhou
730000*)

4) (*Frontiers Science Center for Rare Isotopes, Lanzhou University, Lanzhou, Gansu 730000,
China*)

Abstract

Since the discovery of the charmonium-like state $X(3872)$ in 2003, a large number of new hadronic states have been observed in high-energy experiments (BESIII, LHCb, Belle, etc.), challenging the conventional quark-antiquark (meson) and three-quark (baryon) paradigms. Among various interpretations, hadronic molecules and diquark-antidiquark states have emerged as two important scenarios. Studies by different theory groups have shown that some of the observed tetraquark candidates can be well explained within both the molecular and the diquark-antidiquark frameworks. Therefore, we argue that in certain tetraquarks these two components should coexist with a certain proportion. Under this premise, we have recently proposed a new theoretical approach, namely, to consider the mixing effect between molecular and

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (NSFC) under Grants No.

12335001.

† Corresponding author. E-mail: sunzf@lzu.edu.cn (Sun Zhifeng)

diquark-antidiquark states within an effective field theory framework. Specifically, based on the hidden local gauge symmetry, we introduce diquark fields and construct a complete set of interaction Lagrangians, including vertices for two light diquarks with one light meson, a heavy meson with a heavy diquark and a light diquark, and two heavy diquarks with one light meson.

Meanwhile, we apply this theory to study the following tetraquark candidates: $Z_{cs}(4000)$, $Z_c(3900)$, $X(4500)$, and $T_{cs0}^*(2900)$. By using the constructed Lagrangians, we compute the effective potentials for the coupled channels consisting of molecular and diquark-antidiquark configurations, and solve the coupled-channel Bethe-Salpeter equation in the on-shell approximation. And we obtain the following results:

- For $Z_{cs}(4000)$, the pole at $(4013 \pm 42i)$ MeV in the $\bar{D}^{*0}D_s^{*+}/\bar{A}_{cs}S_{cu}$ coupled system matches the LHCb data, while a second pole at $(4208 \pm 13i)$ MeV is consistent with $Z_{cs}(4220)$ in mass but narrower in width, calling for more precise experimental measurements.
- For $Z_c(3900)$, the pole position lies in the range 3888–3901 MeV with a width of 17–26 MeV (depending on the cutoff), in excellent agreement with the BESIII results. The extracted effective coupling constants indicate that the diquark-antidiquark component contributes significantly, with a coupling strength about 15 GeV, nearly twice that of the molecular component.
- For $X(4500)$, the $D_s^{*+}D_s^{*-}/A_{cq}\bar{A}_{cq}/A_{cs}\bar{A}_{cs}$ coupled system yields a pole at $(4488.0 \pm i29.6)$ MeV, precisely reproducing the LHCb mass and width. Notably, the $A_{cs}\bar{A}_{cs}$ channel has the largest coupling (~ 10.5 GeV), indicating the importance of the diquark-antidiquark configuration.
- For $T_{cs0}^*(2900)^{++}$, the $D_s^+\rho^+/D^{*+}K^{*+}/A_{cu}\bar{A}_{sd}$ system gives a pole at $(2948 \pm i48)$ MeV, again consistent with the LHCb measurement. The couplings of the molecular and diquark-antidiquark state channels are comparable.

Another innovative aspect of this work is the systematic construction of a color gauge-invariant effective field theory with diquark fields. By requiring gauge invariance in color space, we introduce gluon fields as gauge bosons and obtain the diquark-gluon interaction vertices. On this basis, we derive the one-gluon-exchange potential between a diquark and an antidiquark.

The theoretical approach described above can be applied not only to tetraquark systems but also, in combination with chiral quark models, to the study of baryon and pentaquark systems, thereby providing a new theoretical perspective for understanding the internal structure of tetraquarks and offering meaningful guidance for future experimental investigations.

Keywords: tetraquark, hadronic molecule, diquark-antidiquark state, effective field theory

录用稿件，非最终出版稿