

条带结构中的拓扑热扩散边界态研究

李栩帆¹⁾ 王兆宸²⁾ 张研²⁾ 胡润^{1,2,†)}

1) (华中科技大学中欧清洁与可再生能源学院)

2) (华中科技大学能源与动力工程学院)

摘要

一维和二维拓扑热扩散结构分别呈现出界面局域态和高阶角态等典型特征，而条带结构在几何维度和自由度数目上介于二者之间。有限宽度方向引入的横向层自由度如何重构一维界面态的谱分支和空间分布，以及这类界面态与二维高阶拓扑角态之间存在何种区别，还需深入研究。为此，本文深入研究了 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 条带热扩散结构中的谱结构、边界态及其温度场演化规律。结果表明，随着条带结构层数增加，体系谱带条数增多，连续谱沿有限方向分裂为多条离散谱带，而由于本文层间耦合系数是常数，导致均匀条带结构中并不出现边界态。进一步地，通过构造拓扑界面，对比分析了一维结构和条带结构中的边界态，发现条带结构的边界态位于体态谱隙内，其温度分布主要局域于界面附近，并表现出不同于体态的衰减行为。最后，讨论了层间耦合参数对谱结构和边界态行为的影响，发现增大层间耦合系数会使衰减率谱整体上移，且调整边界态与体态的相对谱位置不会改变边界态由拓扑界面决定的形成机制。本研究结果为有限宽度拓扑热扩散结构中的边界态调控提供理论参考，填补了一维和二维结构中拓扑边界态演变的空白。

关键词：SSH，条带结构，拓扑边界态，衰减率谱，热扩散

PACS：66.10.cd, 05.60.Cd, 03.65.Vf, 63.20.Pw, 68.65.-k

基金：国家自然科学基金(批准号：52422603、52511540065、52521008、W2521166)、湖北省自然科学基金(批准号：2023AFA072)、华中科技大学交叉研究项目(批准号：5003120094)和苏州实验室开放课题项目(批准号：SZLAB-1508-2024-TS016)资助的课题。

† 通信作者.E-mail: hurun@hust.edu.cn

第一作者.E-mail: 2092594846@qq.com

1 引言

拓扑能带理论最初建立于凝聚态电子体系，随后逐步推广到光学、声学、力学及电路等经典物理平台^[1,2]。其核心在于：体态的拓扑性质可以决定边界处是

否出现受保护的局域态。作为研究拓扑边界态的典型模型，Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型因其结构简单、物理图像清晰，被广泛用于讨论一维拓扑相变及界面态形成问题^[3]，并进一步推广到二维及更高维体系，用于研究边界态、角态等高阶拓扑现象^[2,4]。

与电子体系和经典波体系不同，热扩散过程属于耗散动力学过程，不具有通常意义下的振荡频率和时间相位。已有研究表明，对离散热网络可由导热方程建立相应的哈密顿量矩阵，其中本征值对应温度模态的衰减率，本征矢对应温度场的空间分布^[5,6]。由此，传统拓扑模型可以映射到热扩散体系中，使拓扑边界态在热问题中表现为与体态分离的特殊衰减模，并在实空间中对应为局域化的温度分布^[7,8]。近年来，拓扑热扩散问题已在一维和二维体系中得到初步研究。一维热扩散 SSH 链中已观察到位于体态衰减率间隙内的拓扑边界态^[6,9]；在二维热扩散网络中，边界态与角态等更高阶局域模也相继被讨论^[10,11]。随后，相关研究进一步拓展至多种二维扩散拓扑构型及局域模调控问题^[12,13]，并在更复杂的热扩散体系中得到发展^[14,15]。此外，本实验室围绕热晶格局域态的时空调控及周期性对热扩散拓扑态的影响开展了研究^[16,17]，并进一步研究了扩散—平流体系中的可调拓扑边界态和非互易热链中的稳健温度局域^[18,19]。扩散超材料和主动热超材料的发展也为热输运调控提供了新的实现路径^[20,21]。国内相关研究涵盖拓扑声子与热输运^[22,23]、低维声子热传导^[24]、一维 SSH 模型的绕数与界面态^[25,26]、高阶拓扑及二维 SSH 角态^[27,28]、声学角态^[29]，以及耦合 SSH 梯形和双链体系^[30,31]。

不过，现有拓扑热扩散研究主要集中于一维链和二维网络，对于有限宽度 SSH 条带热扩散结构的讨论则相对较少。与一维链结构相比，条带结构在横向上引入了额外的层数自由度；而与完全二维周期网络相比，其又在一个方向上保持周期性、在另一个方向上具有有限宽度。因此，SSH 条带结构在几何尺度和横向

自由度上处于一维链与二维网络之间，是研究有限宽度条件下拓扑热扩散行为的重要模型。围绕这一结构，有必要进一步考察其在有限宽度条件下的谱结构特征，以及在引入不同拓扑区域拼接后所对应的边界态与温度场演化规律。

基于此，本文以 SSH 条带热扩散结构为对象，研究有限宽度条件下的谱结构、边界态及其热扩散行为。首先，构建 SSH 热扩散条带结构模型，分析其动量空间衰减率谱及宽度对谱带离散化的影响；随后，在实空间中通过拼接不同拓扑区域引入界面，研究一维 SSH 热网络及 SSH 条带结构热网络中的边界态形成机制与空间局域特征，并进一步明确该类界面态与二维高阶拓扑角态之间的区别；在此基础上，结合数值模拟，比较边界态与体态在温度场时域演化中的差异，并讨论层间耦合参数对模态行为的影响。

2 K 空间中二维 SSH 热扩散模型及其谱结构

2.1 二维 SSH 热扩散模型的建立及其谱结构分析

本文首先考虑 x 和 y 两个方向均满足周期性边界条件的二维 SSH 热扩散网络。该模型的基本原胞包含两个节点，分别记为 a 和 b 。如图 1(a)所示，在 x 方向上，原胞内两个节点之间通过胞内耦合 W 相连，相邻原胞之间通过胞间耦合 V 相连；在 y 方向上，相邻层之间通过层间耦合 D 相连。这里， W 、 V 和 D 分别表示三类最近邻连接通道对应的等效归一化扩散强度。也就是说，在将连续导热方程离散为节点热网络后，原方程中的材料参数和空间离散信息被吸收到节点之间的连接参数中，并按照连接位置分别写成胞内耦合 W 、胞间耦合 V 和层间耦合 D 。在此基础上，可进一步建立二维 SSH 热扩散网络的离散演化方程。^[6,8]

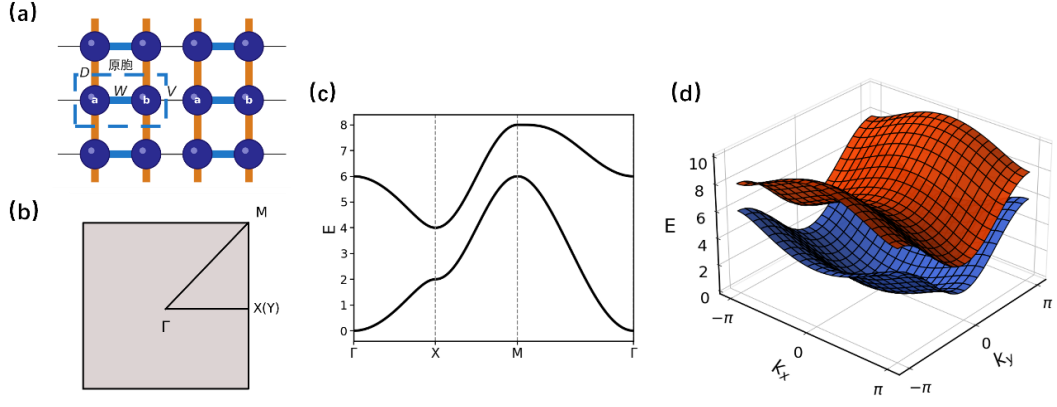


图 1 (a) 二维 SSH 模型原胞示意图；(b) 第一布里渊区及高对称路径 $\Gamma \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow \Gamma$ 的示意图；(c) 沿高对称路径计算得到的能带结构；(d) 两条能带在完整二维布里渊区 (k_x, k_y) 中的三维分布图。

Fig. 1. (a) Schematic of the unit cell of the two-dimensional SSH model; (b) schematic of the first Brillouin zone and the high-symmetry path; (c) band structure calculated along the high-symmetry path; (d) three-dimensional distributions of the two bands in the full first Brillouin zone.

热扩散过程满足傅里叶导热定律^[24]

$$\mathbf{J} = -\kappa \nabla T, \quad (1)$$

其中， $\mathbf{J}$ 为热流密度， κ 为热导率， T 为温度场。结合能量守恒关系

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (2)$$

可得连续介质中的热传导方程^[24]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (3)$$

其中， ρ 为密度， c 为比热容。式(3)表明，温度场的时间演化由空间温度分布不均匀所驱动，其本质属于耗散过程。对于由离散节点构成的热网络，若每个节点内部温度近似均匀，且仅考虑最近邻之间的热交换，则可将式(3)离散化为节点温度的耦合演化方程。设第 n 层中第 m 个原胞内两个节点 a 和 b 上的温度分别为 $T_{a,mn}$ 和 $T_{b,mn}$ ，则有^[5,24]

$$\frac{dT_{a,mn}}{dt} = -(W + V + 2D)T_{a,mn} + WT_{b,mn} + VT_{b,m-1,n} + DT_{a,m,n-1} + DT_{a,m,n+1}, \quad (4)$$

$$\frac{dT_{b,mn}}{dt} = -(W + V + 2D)T_{b,mn} + WT_{a,mn} + VT_{a,m+1,n} + DT_{b,m,n-1} + DT_{b,m,n+1}. \quad (5)$$

式(4)和式(5)中, 对角项表示该节点向所有相邻节点的总流出扩散强度, 非对角项表示相邻节点对该节点的热扩散贡献。可以看出, x 方向的 W 和 V 构成了 SSH 型交替耦合, 而 y 方向则由均匀层间耦合 D 给出。将体系全部节点温度写成列矢量 $\mathbf{T}(t)$, 则式(4)和式(5)可统一写为^[5,6]

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{T}(t) = H \mathbf{T}(t), \quad (6)$$

其中, H 为描述该离散热扩散体系的哈密顿量。这里的 H 并不表示通常波动体系中的能量算符, 而是对离散热扩散方程所作的线性算符表述。由于体系在 x 和 y 两个方向上均具有平移对称性, 对式(4)和式(5)进行 k 空间表述后, 可将离散热扩散方程写为动量空间中的本征值问题。^[5,6]

$$H(k_x, k_y) \mathbf{u}(k_x, k_y) = \omega(k_x, k_y) \mathbf{u}(k_x, k_y). \quad (7)$$

其中, k_x 和 k_y 分别为 x 和 y 方向的波矢, $\mathbf{u}(k_x, k_y)$ 为原胞内温度振幅列矢量, ω 为本征值。在原胞基底 (a, b) 下, 二维 SSH 热扩散模型在 K 空间中的哈密顿量可写为

$$H(k_x, k_y) = -i \begin{pmatrix} W + V + 2D(1 - \cos k_y) & -(W + Ve^{-ik_x}) \\ -(W + Ve^{ik_x}) & W + V + 2D(1 - \cos k_y) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

式(8)中, 对角项 $W + V + 2D(1 - \cos k_y)$ 表示节点总流出扩散强度以及 y 方向层间扩散引入的修正; 非对角项 $-(W + Ve^{\pm ik_x})$ 则描述 x 方向由胞内耦合 W 和胞间耦合 V 共同形成的 SSH 型交替耦合结构。进一步求解式(8), 可得体系的两条本征值分支

$$\omega_{\pm}(k_x, k_y) = -i \left[W + V + 2D(1 - \cos k_y) \pm \sqrt{W^2 + V^2 + 2WV \cos k_x} \right]. \quad (9)$$

由于 $H(k_x, k_y)$ 具有纯虚形式, 其本征值 $\omega_{\pm}(k_x, k_y)$ 也为纯虚数。相应地, 可将体系各模态的衰减率定义为

$$\lambda_{\pm}(k_x, k_y) = -\text{Im } \omega_{\pm}(k_x, k_y), \quad (10)$$

即

$$\lambda_{\pm}(k_x, k_y) = W + V + 2D(1 - \cos k_y) \pm \sqrt{W^2 + V^2 + 2WV \cos k_x}. \quad (11)$$

式(11)给出了二维 SSH 热扩散模型的两支衰减率谱。其中， W 和 V 决定 x 方向 SSH 型耦合所引起的谱分裂特征， D 则通过 $2D(1 - \cos k_y)$ 项引入 y 方向修正，并使谱面整体上移。因此，该模型在保留一维 SSH 型谱分裂特征的同时，又由于层间耦合的引入表现出明显的二维特征。

为进一步说明该模型的拓扑性质，对于给定的 k_y ，注意到式(8)中的对角项 $W + V + 2D(1 - \cos k_y)$ 在两个子晶格上完全相同，即该项与单位矩阵成正比。去除这一共同对角项以及不影响本征矢的整体因子 $-i$ 后，体系的拓扑特征由 x 方向的非对角耦合项决定。

$$q(k_x) = W + Ve^{-ik_x} \quad (12)$$

相应的绕数可定义为^[25,32]

$$\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial k_x} \ln q(k_x) dk_x. \quad (13)$$

当 k_x 遍历第一布里渊区时， $q(k_x)$ 在复平面中形成以 W 为圆心、以 V 为半径的闭合轨迹。当 $W > V$ 时，该闭合轨迹不包围原点，绕数为 $\nu = 0$ ，对应拓扑平凡相；当 $W < V$ 时，闭合轨迹包围原点，绕数的绝对值为 $|\nu| = 1$ ，对应拓扑非平凡相。绕数的正负取决于动量方向和非对角项的定义，而其绝对值可用于区分两种拓扑相。当 $W = V$ 时，体系在 $k_x = \pi$ 处发生谱隙闭合，对应平凡相与非平凡相之间的拓扑相变。由此可见，本文模型的拓扑性质由 x 方向胞内耦合 W 与胞间耦合 V 的相对大小决定。由于 y 方向的均匀层间耦合 D 仅通过与单位矩阵成正比的对角项改变衰减率谱位置，因此不会改变由 $q(k_x)$ 决定的绕数。

由式(11)可知，体系衰减率谱由二维波矢 (k_x, k_y) 决定，因此可在第一布里渊区内进行分析。本文选取高对称路径

$$\Gamma = (0,0), \quad X = (\pi,0), \quad M = (\pi,\pi), \quad (14)$$

即沿 $\Gamma \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow \Gamma$ 计算衰减率谱，对应图 1(b)所示第一布里渊区及高对称路径。沿该路径求解式(11)，即可得到图 1(c)所示的两条衰减率谱分支；在完整二维布里渊区内对式(11)进行计算，则可得图 1(d)所示的二维衰减率谱的三维分布图。

分析图 1(c)，在 Γ 点，两条谱分支之间的间隔最大；在 x 点，谱分裂由 $|W - V|$ 决定，表明 x 方向胞内耦合 W 与胞间耦合 V 的相对大小直接控制谱隙开口；在 M 点，由于 $1 - \cos \pi = 2$ ， y 方向层间耦合通过 $4D$ 项引入最大修正，从而使谱整体上移。

由此，二维 SSH 热扩散模型可由连续导热方程经离散化得到离散节点温度演化方程，并进一步写成哈密顿量本征问题。其本征值对应温度模态的衰减率，衰减率谱由 x 方向 SSH 型交替耦合与 y 方向层间扩散共同决定。

2.2 有限宽度条带结构的衰减率谱分析

进一步考虑 x 方向保持周期性、 y 方向取有限层数的条带结构，如图 2(a)所示。体系在 x 方向仍具有平移对称性，而在 y 方向表现为有限层自由度，因此二维周期体系中由 k_y 表征的连续自由度转化为有限层数对应的离散模态。

将第 m 个晶胞内全部温度自由度写为

$$\mathbf{T}_m(t) = \left(T_{a,1,m}(t), T_{b,1,m}(t), T_{a,2,m}(t), T_{b,2,m}(t), \dots, T_{a,N_y,m}(t), T_{b,N_y,m}(t) \right)^T, \quad (15)$$

其中， m 表示 x 方向晶胞编号，第二个下标表示 y 方向层编号。由于体系在 x 方向仍保持周期性，可取 Bloch 形式

$$\mathbf{T}_m(t) = \mathbf{u}(k_x) e^{ik_x m} e^{-i\omega t}, \quad (16)$$

其中, $\mathbf{u}(k_x)$ 为维数是 $2N_y$, 即两倍层数的振幅列矢量, ω 为本征值。代入离散热扩散方程后, 可得条带结构的本征值问题

$$H_{\text{ribbon}}(k_x)\mathbf{u}(k_x) = \omega(k_x)\mathbf{u}(k_x). \quad (17)$$

其中, $H_{\text{ribbon}}(k_x)$ 为 $2N_y \times 2N_y$ 维哈密顿量, 可写为分块三对角形式

$$H_{\text{ribbon}}(k_x) = \begin{pmatrix} H_0(k_x) & V_c & 0 & \cdots & 0 \\ V_c & H_0(k_x) & V_c & \cdots & 0 \\ 0 & V_c & H_0(k_x) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & V_c \\ 0 & 0 & \cdots & V_c & H_0(k_x) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中

$$H_0(k_x) = -i \begin{pmatrix} W + V + 2D & -(W + Ve^{-ik_x}) \\ -(W + Ve^{ik_x}) & W + V + 2D \end{pmatrix}, V_c = -i \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}. \quad (19)$$

由此可见, 有限宽度条带结构的哈密顿量由单层 SSH 热扩散块沿 y 方向通过统一层间耦合 D 逐层堆叠而成。求解式(18)可得本征值 $\omega_n(k_x)$, 对应衰减率为^[30,31]

$$\lambda_n(k_x) = -\text{Im } \omega_n(k_x), \quad n = 1, 2, \dots, 2N_y. \quad (20)$$

因此, 对于任意给定的 k_x , 体系共有 $2N_y$ 条离散衰减谱分支。随着 N_y 增大, y 方向允许的离散模态数增加, 相应谱带条数也随之增多。也就是说, 二维周期体系中的连续谱面在有限宽度条件下分裂为若干条离散谱带。

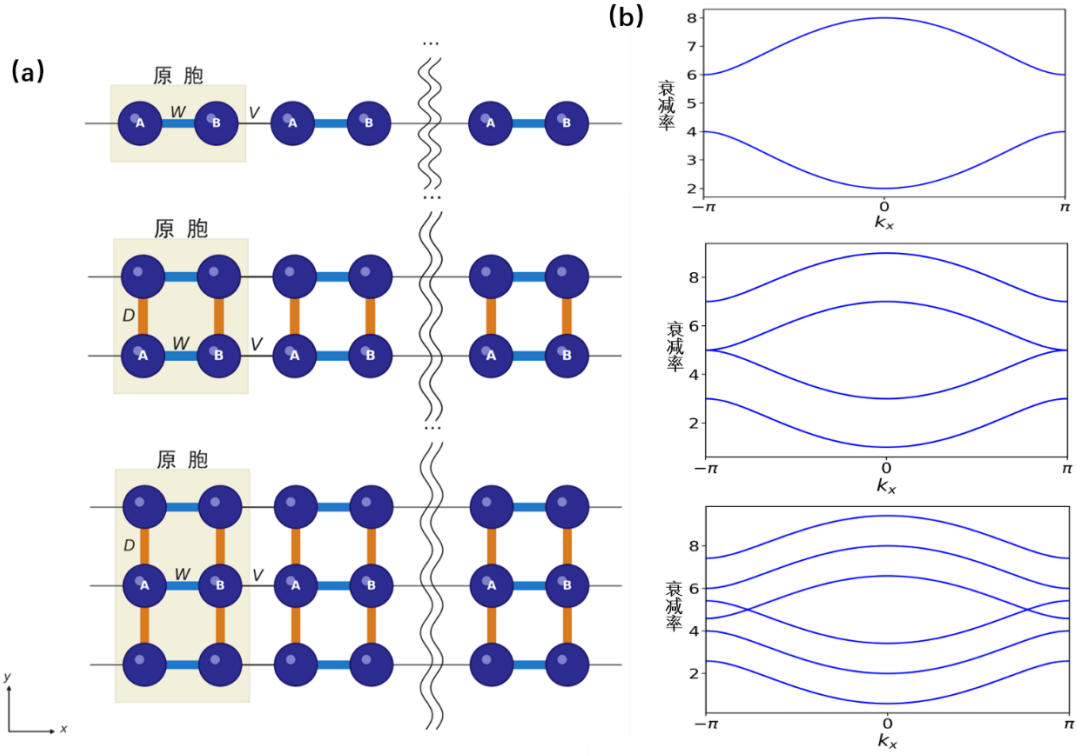


图 2 (a) $N_y = 1, 2, 3$ 时 SSH 条带热扩散结构示意图, 其中 W 、 V 和 D 分别表示 x 方向胞内耦合、 x 方向胞间耦合和 y 方向层间耦合, 阴影部分表示一个原胞; (b) 对应的 k_x -衰减率谱。随着层数增大, 谱带条数相应增加。

Fig. 2. (a) Schematic of the SSH RIBBON thermal diffusion structure for $N_y =$; here, W , V , and D denote the intracell coupling along the x direction, the intercell coupling along the x direction, and the interlayer coupling along the y direction, respectively, and the shaded region represents one unit cell; (b) the corresponding k_x -decay-rate spectrum. As N_y increases, the number of spectral bands increases accordingly.

如图 2(b), 当 $N_y = 1$ 时, 体系退化为单层情形, 仅包含两条衰减分支; 当 $N_y > 1$ 时, 每一支原有谱分支均进一步分裂, 从而形成更多离散谱带。因此, 条带结构宽度的作用主要体现为谱带数目的增加及连续谱面的离散化, 而不改变 x 方向由 W 和 V 所决定的 SSH 型谱分裂本质。

需要指出的是, 该条带结构虽然在 y 方向具有几何边界, 但层间耦合始终统一为 D , 并未在该方向形成 SSH 型交替耦合, 因此不会产生由几何边界诱导

的拓扑边界态。无论结构为平凡态还是非平凡态，该均匀条带结构体系中出现的均为体态分支，而不会出现与体态分离的边界态。

因此，有限宽度条带结构的主要特征是将二维周期体系中的连续衰减谱离散化为多条谱带，并揭示层数对谱带条数的控制作用。

3 实空间中 SSH 条带结构热网络中的边界态及其热扩散行为

3.1 拓扑界面的引入及一维 SSH 热网络中的边界态

为研究拓扑边界态在热扩散体系中的形成机制，本文首先考虑一维 SSH 热网络，并在实空间中将拓扑平凡区域与拓扑非平凡区域进行拼接，从而在闭合链中引入两处拓扑界面，如图 3(a)所示。根据前述绕数分析，界面两侧分别对应拓扑平凡相和拓扑非平凡相，二者的体拓扑不变量不同，拼接后在界面处形成拓扑不匹配，从而为局域界面态的出现提供拓扑条件。

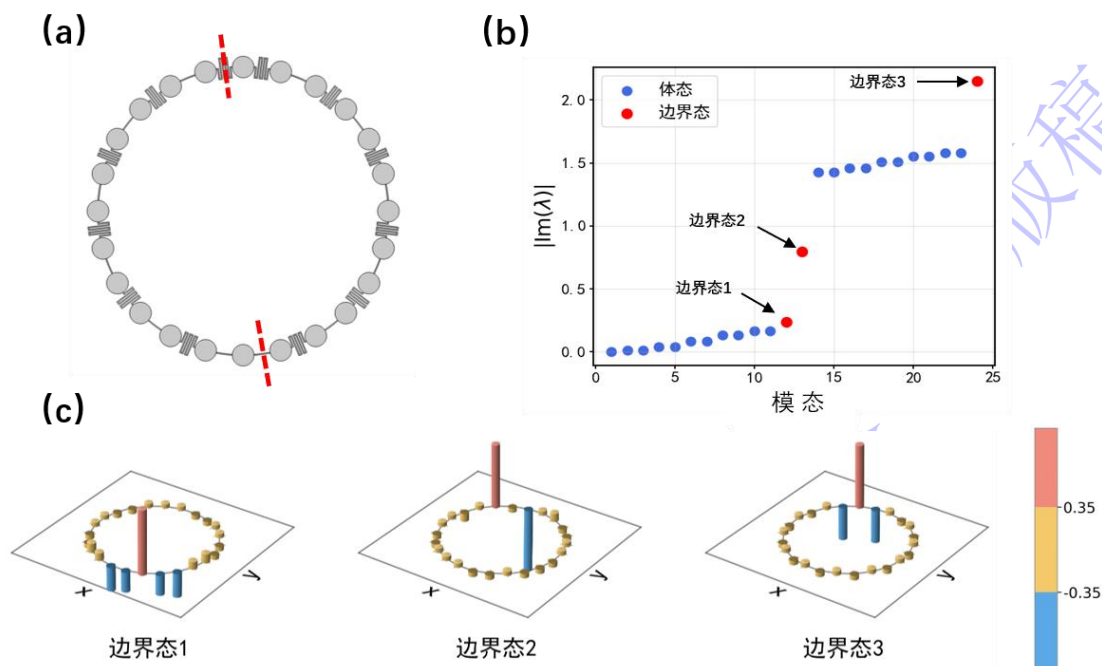


图 3 (a) 由两条由平凡和非平凡单元组成的一维 SSH 模型链构成的热网络结构，红色虚线位置代表构造的两处拓扑界面；(b) 系统的本征值谱，其中蓝色散点和红色散点分别表示体态与边界态；(c) 三个边界态对应的本征矢分量在实空间中的分布，其模态振幅主要局域于拓扑界面附近。

Fig. 3. (a) Thermal network composed of two one-dimensional SSH model chains formed by trivial and nontrivial unit cells, where the red dashed lines indicate the two artificially introduced boundaries; (b) eigenvalue spectrum of the system, in which the blue and red dots represent the bulk states and edge states, respectively; (c) real-space distributions of the eigenvector components corresponding to the three edge states, showing that their modal amplitudes are mainly localized near the topological interfaces.

对于该实空间热网络，体系温度场仍满足离散热扩散演化方程 $\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = -H_a \mathbf{T}$ ，进一步可写出对应的本征值问题 $H_a \phi_n = \gamma_n \phi_n$ ，其中， γ_n 表示第 n 个模态的衰减率， ϕ_n 表示相应模态的温度空间分布。由此可见，体系的本征衰减谱由 γ_n 给出，而模态在实空间中的局域特征则由 ϕ_n 决定。

如图 3(b)，除大量连续分布的体态模之外，谱中还出现了少数边界态。它们在谱上与体态保持清晰分离，表明这些模态对应的衰减行为不同于普通延展体态，说明界面的引入改变了整个体系的扩散本征结构。

进一步结合图 3(c)可以更加清楚地看出边界态的物理性质。边界态温度分布主要集中在两处拓扑界面附近，而在远离界面后迅速衰减，表现出明显的空间局域特征。这说明边界态的温度振幅并不会像体态那样分布在整条链中，而是被限制在界面附近的有限区域内。

因此，在一维 SSH 热网络中，将绕数不同的拓扑平凡区域与拓扑非平凡区域进行拼接，可以在体系内部形成拓扑界面。由于界面两侧的体拓扑不变量不同，根据体-界对应关系，界面附近可形成具有拓扑来源的局域本征模，并在衰减率谱中表现为与体态谱分支相分离的离散模态。^[25,32]

3.2 两层条带结构网络中的边界态

在 3.1 的基础上，进一步将一维 SSH 热网络沿 y 方向扩展为有限宽度的

SSH 条带结构, 并取 $N_y = 2$, 即两层条带结构。此时, 体系在 x 方向仍保持 SSH 型交替耦合, 而在 y 方向仅通过常数层间耦合 D 将相邻链连接起来。因此, 与一维情形相比, 条带结构在保留 x 方向拓扑特征的同时, 引入了有限宽度所对应的层自由度和层间扩散通道, 从而使边界态的谱结构与空间分布表现出不同于单链体系的特征。

图 4(a)给出了两层 SSH 条带热网络的结构示意。由于体系在 x 方向仍存在平凡区域与非平凡区域的拼接, 因此在条带结构内部同样形成了拓扑界面。图 4(b)给出了相应的本征衰减谱。可以看出, 在连续体态之外仍存在与体态分离的离散模态, 说明当体系由一维链推广到有限宽度条带结构后, 拓扑界面依然能够支撑稳定的边界态。

与 3.1 节中的一维 SSH 热网络相比, 当层数增加到 $N_y = 2$ 时, 边界态数目由 3 个增加到 6 个, 即增加为原来的两倍。对于双层条带结构, 单层结构中的 3 个界面局域模在横向层自由度和层间耦合的作用下发生分裂, 分别形成具有不同层间组合形式的边界态分支。因此, 条带结构宽度的增加并不改变边界态来源于 x 方向拓扑界面的基本机制, 但会增加界面态在有限层方向上的组合方式, 从而改变边界态的数量、谱位置及其层间分布特征。

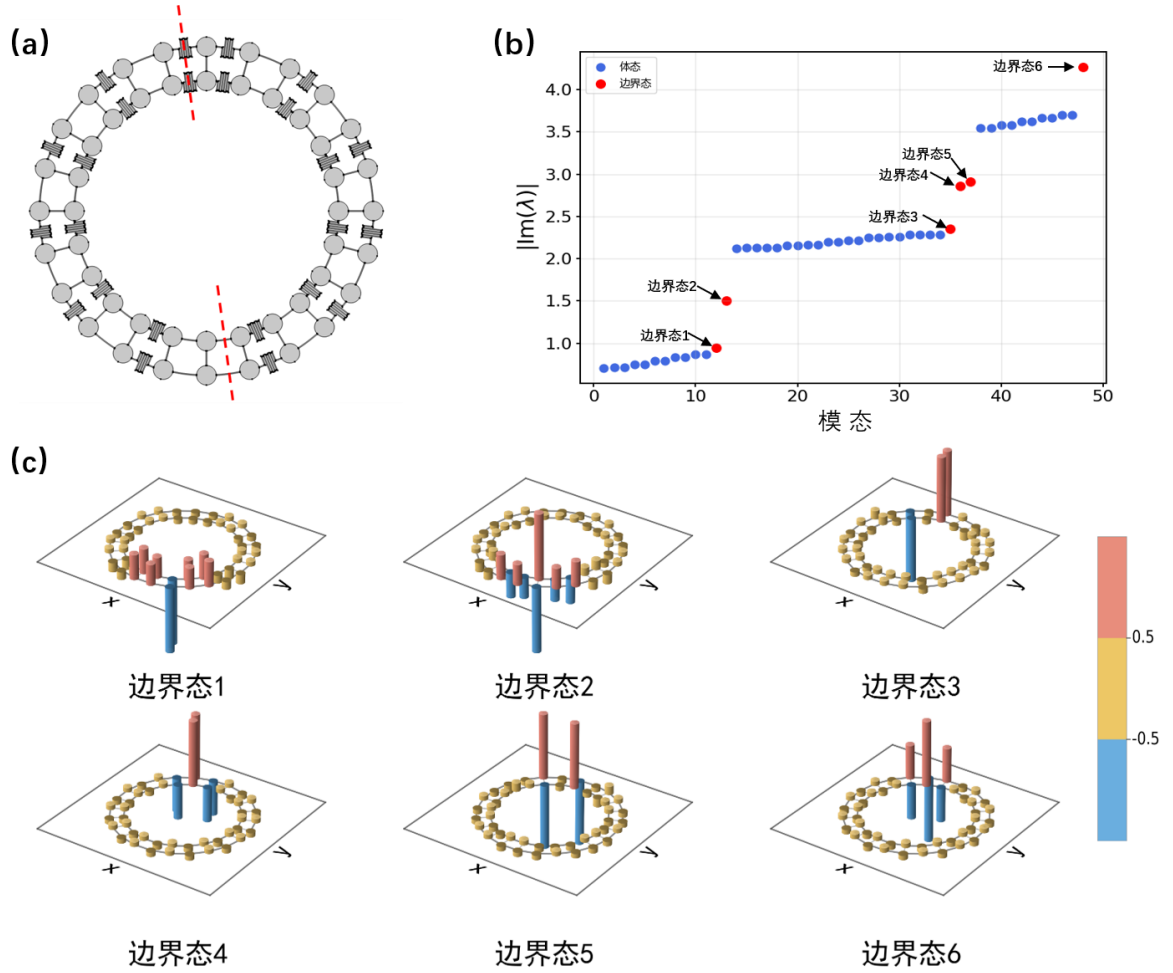


图 4 (a) 环形 SSH 条带热网络结构示意图，红色虚线表示人工设置的两处边界；(b) 系统的本征值谱，其中蓝色散点和红色散点分别表示体态与边界态；(c) 六个边界态对应的本征矢分量在实空间中的分布，其模态振幅同样主要局域于拓扑界面附近。

Fig. 4. (a) Schematic of the ring-shaped SSH RIBBON thermal network, where the red dashed lines indicate the two artificially introduced boundaries; (b) eigenvalue spectrum of the system, in which the blue and red dots represent the bulk states and edge states, respectively; (c) real-space distributions of the eigenvector components corresponding to the six edge states, showing that their modal amplitudes are mainly localized near the topological interfaces.

图 4(c)进一步给出了这 6 个边界态在实空间中的温度分布。可以看出，各边界态的温度振幅仍主要集中在拓扑界面附近，说明其局域性并未随着条带热网络结构宽度的增加而消失。与此同时，由于双层结构中存在层间耦合，这些边界态

在两层之间可以呈现不同的分布方式，从而使其空间分布较一维链更加丰富。但总体而言，这些模态仍然表现为沿 x 方向界面附近的局域温度分布，而不是在整个二维区域中形成新的局域中心。

上述结果表明，有限宽度方向引入的横向层自由度会影响拓扑界面态的数量及其谱分布。当体系由一维 SSH 热网络扩展为双层 SSH 条带结构热网络后，原有的界面局域态在层间耦合作用下发生分裂和重组，使边界态数量由 3 个增加至 6 个，并形成具有不同衰减率和层间分布形式的边界态分支。

这一变化来源于有限宽度方向所引入的横向层自由度。单层 SSH 热网络中的 3 个界面局域态在扩展为双层条带结构后，在层间耦合作用下发生分裂和重组，从而形成具有不同衰减率和层间分布形式的边界态分支。因此，双层结构主要改变了边界态的分支数量、谱位置和层间分布，而不会改变其来源于 x 方向拓扑界面的基本机制。

本文 SSH 条带结构中的界面边界态与典型二维高阶 SSH 模型中的角态在拓扑来源和空间局域方式上存在本质区别。对于本文讨论的条带结构， x 方向具有 SSH 型交替耦合，而 y 方向仅由常数耦合 D 连接，相邻层之间并未形成类似 SSH 模型中的强弱交替扩散关系。因此，该体系虽然在几何上具有二维有限宽度，但其拓扑非平凡性仍然主要来自 x 方向，而不是同时来自两个方向的耦合排布。换言之，本文的 SSH 条带结构热网络本质上仍可看作是一维 SSH 拓扑结构在有限层数条件下的横向扩展。^[30,31]

这也意味着，本文条带结构中出现的局域模主要是由 x 方向拓扑界面所诱导的界面边界态，而不是二维 SSH 模型中可能出现的高阶角态。二维 SSH 模型中， x 与 y 两个方向通常都需要具有 SSH 型交替耦合，体系的拓扑性质由两个方向共同决定。当两个方向同时满足非平凡耦合构型时，局域模可进一步从一

维边界收缩到二维角点处，从而形成局域于角点附近的高阶角态。相比之下，本文的条带结构在 y 方向并不存在 SSH 型二聚化，也就不会在 y 方向上产生额外的拓扑边界，更不能与 x 方向共同形成角点局域机制。^[27,28]

从空间分布上看，这一区别也十分明显。对于本文 SSH 条带结构热网络，边界态主要局域在 x 方向的拓扑界面附近，并在 y 方向的有限层之间分布。而对于二维 SSH 热扩散模型，若在 x 和 y 两个方向同时构造 SSH 型交替耦合，则局域模可进一步集中在角区，其温度分布呈现更强的二维角点局域特征。由此可见，SSH 条带结构所对应的是由一维界面态向二维体系扩展的中间过渡情形，它保留了一维界面边界态的基本特征，但尚未发展到二维高阶角态的情形。

对于有限宽度 SSH 条带结构热网络，拓扑界面的引入会在衰减率谱中产生与体态谱分支相分离的离散边界态，并在实空间中表现为界面附近的局域温度分布。与一维 SSH 热网络相比，条带结构新增的横向层自由度会使原有一维界面态发生分裂，从而增加边界态分支的数量，并改变其在层间方向上的组合形式。与真正的二维 SSH 模型相比，由于 y 方向仅为均匀常数耦合，不具有 SSH 型交替耦合结构，因此该体系不会出现由两个方向共同拓扑化所诱导的角态。由此说明，SSH 条带结构热网络处于一维界面边界态向有限宽度结构扩展的过渡层次，其边界态本质上仍属于界面诱导的局域衰减模，而非二维高阶拓扑角态。

3.3 边界态与体态的温度场演化

在前两节获得边界态与体态的谱结构及空间分布之后，进一步可通过温度场的时域演化来比较二者在衰减行为上的差异。图 5 给出了边界态 1、边界态 2 以及体态在 $t = 0$ 分钟、 $t = 1$ 分钟和 $t = 2$ 分钟时的 COMSOL 温度场分布及其归一化温度随时间的变化关系。

如图 5(a)所示，边界态 1 在初始时刻主要集中于界面附近的局域区域；随着

时间推进, 到 $t = 1$ 分钟和 $t = 2$ 分钟时, 其温度幅值逐渐减小, 但高温区域仍主要保持在界面邻域, 空间分布轮廓没有发生明显扩展。这说明边界态 1 在演化过程中仍保持较强的界面局域特征。

如图 5(b)所示, 边界态 2 的演化也表现出类似特征。尽管其初始分布与边界态 1 有所不同, 但温度仍主要集中在界面附近, 表明该模态在时间演化中同样具有稳定的局域轮廓。与边界态 1 相比, 边界态 2 的归一化温度衰减更快, 说明不同边界态虽然都具有界面局域属性, 但其对应的衰减速率并不相同。这一点也与前面衰减率谱中不同边界态具有不同本征值的结果相一致。

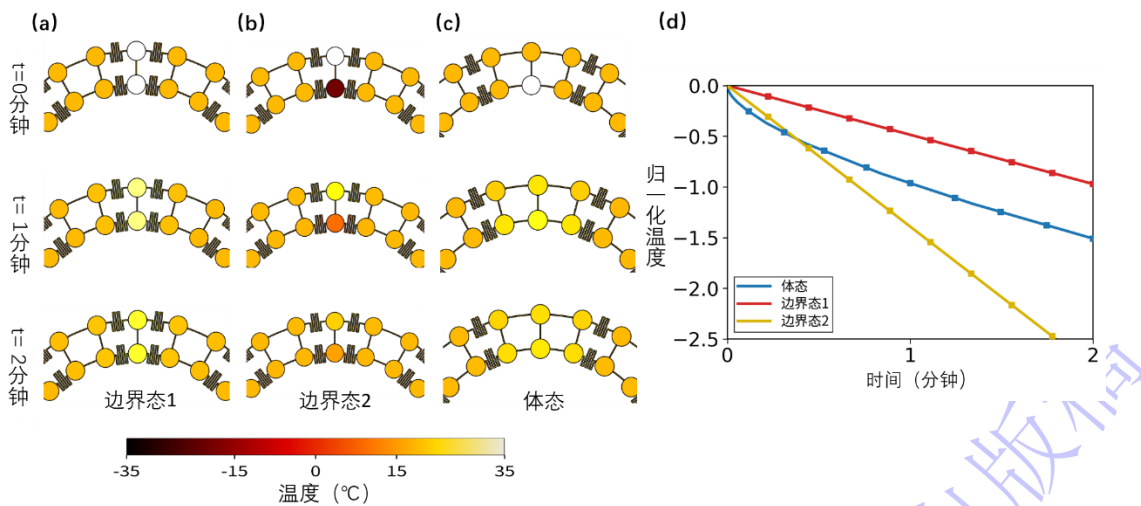


图 5 (a-c) 边界态和体态的温度场分布。温度场分布分别记录于 $t = 0$ 分钟、 $t = 1$ 分钟和 $t = 2$ 分钟; (d) 边界态和体态的归一化温度随时间演化。

Fig. 5. (a-c) Temperature-field distributions of the edge states and bulk states, recorded at ($t = 0$) min, ($t = 1$) min, and ($t = 2$) min, respectively; (d) time evolution of the normalized temperature for the edge states and bulk states.

相比之下, 体态的温度演化表现出明显不同的特征。如图 5(c)所示, 随着时间增加, 体态的温度分布向周围区域展开, 空间轮廓变化也比边界态更为明显。这说明体态对应的是一种更典型的扩展型热扩散过程, 其演化过程中不仅温度幅值不断减小, 而且温度场本身也在持续发生空间重分布。

图 5(d)中, 边界态 1 和边界态 2 对应的归一化温度曲线近似呈线性下降, 说明在半对数象限下它们可以近似由单一衰减率描述。其中, 边界态 1 的曲线斜率较小, 表明其衰减较慢; 边界态 2 的曲线斜率较大, 衰减更快。体态的归一化温度虽然总体也随时间下降, 但其衰减行为与边界态相比对应于更强的扩展特征, 且衰减率持续发生变化。

边界态与体态在热扩散演化中的主要区别在于边界态的温度场在衰减过程中能够较好保持界面附近的局域分布, 衰减过程主要由模态幅值变化主导且衰减率恒定, 而体态则更倾向于在整个 条带结构中扩展。该结果说明, 在 SSH 条带结构热网络中, 边界态不仅在谱上与体态分离, 而且在动力学上也表现出区别于体态的局域热扩散行为。

3.4 层间耦合 D 对衰减率谱的影响

为进一步考察层间耦合对 SSH 条带结构热网络衰减率谱的影响, 在保持 x 方向胞内耦合 $W = 0.090$ 和胞间耦合 $V = 0.706$ 不变的条件下, 仅改变层间耦合 D , 并使归一化层间耦合比 D/V 在 $0 \sim 4$ 范围内连续变化。图 6 给出了边界态与体态衰减率随 D/V 变化的演化关系。可以看出, 随着 D/V 的增大, 边界态和体态对应的 $|\text{Im}(\lambda)|$ 随之增大。这表明层间耦合增强后, 体系中各模态的衰减过程整体加快。其原因在于, D 描述不同层之间的热扩散耦合强度; 当 D 增大时, 热量在层间方向上的交换能力增强, 节点与相邻层之间的热扩散通道也随之增强, 因此各模态对应的总扩散强度提高, 衰减率谱整体上移。

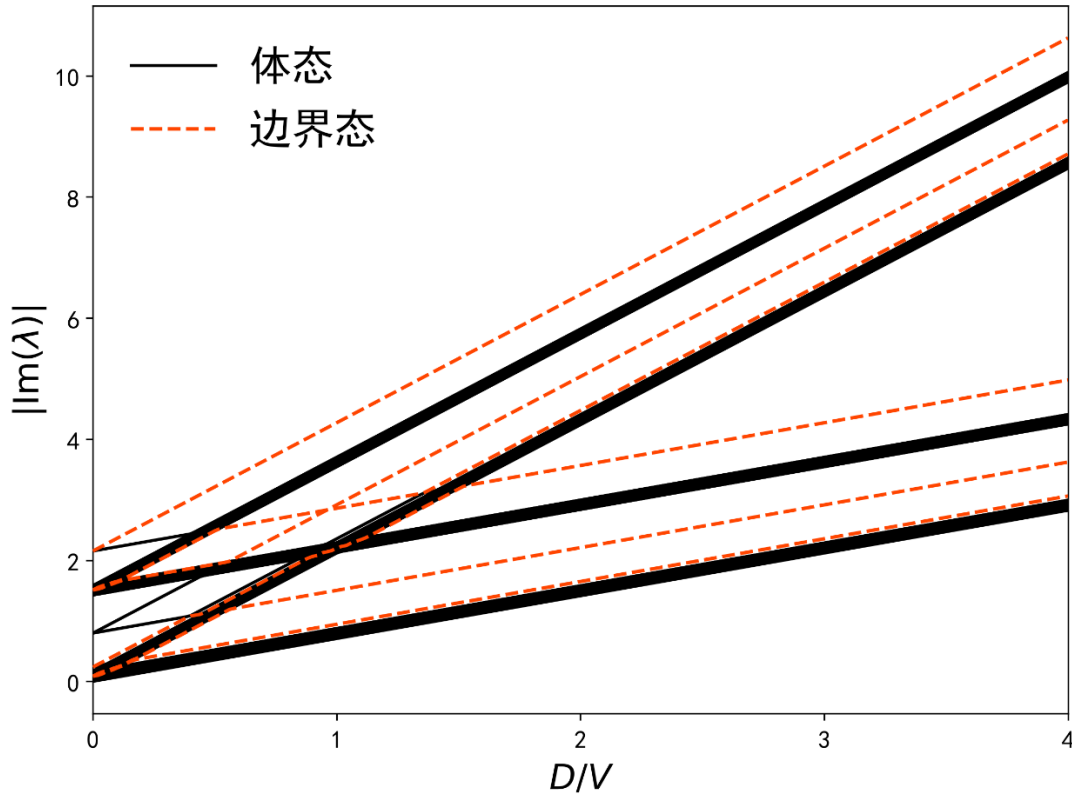


图 6 衰减率谱随层间耦合比 D/V 的变化。计算中固定 $W = 0.090$ 、 $V = 0.706$ ，仅改变层间耦合 D ；黑色实线表示体态，橙色虚线表示边界态。

Fig. 6. Evolution of the decay-rate spectrum with the interlayer coupling ratio D/V . In the calculation, $W = 0.090$ and $V = 0.706$ are fixed, while only the interlayer coupling D is varied. The black solid lines and orange dashed lines represent the bulk states and edge states, respectively.

同时，图 6 还表明，在保持 W 和 V 不变、仅使 D/V 由 0 连续增大至 4 的过程中，边界态分支始终能够与体态分支区分开来，并未完全并入体态谱。这说明层间耦合虽然会改变边界态和体态的具体衰减率数值，但并不会破坏边界态的谱分离特征。换言之， D 的主要作用是调节谱的位置和分支间距，而不是改变边界态的形成机制。边界态是否存在，仍然主要由 x 方向上不同拓扑区域形成的拓扑界面决定； y 方向均匀层间耦合并不产生新的拓扑界面，因此也不能决定边界态的产生或消失。

进一步看，不同分支随 D/V 的变化斜率并不完全相同，这说明层间耦合对

不同模态的影响程度存在差异。其原因是不同模态在层方向上的分布权重不同：对层间耦合参与更强的模态， D 的增大会更明显地改变其扩散通道，因此对应衰减率上升更快；而对主要仍由界面局域结构控制的模态， D 的影响则相对较弱。类似地，扩散拓扑体系中的参数变化通常首先表现为谱位置、模态间距以及边界态与邻近体态相对位置的改变，而边界态是否存在仍取决于体系本身的拓扑构型。

4 结 论

本文建立了 SSH 条带结构热扩散模型，研究了有限宽度条件下的衰减率谱、拓扑边界态及其温度场演化。结果表明， x 方向胞内耦合 W 与胞间耦合 V 决定体系的 SSH 型谱分裂特征，而 y 方向的层间耦合 D 决定了有限宽度条件下谱带的离散化程度及衰减率谱的整体位置。

对于均匀 SSH 条带结构，随着层数 N_y 增加，二维周期体系中的连续谱被离散为更多谱带。由于 y 方向仅存在均匀层间耦合，而未形成 SSH 型二聚化，该体系不存在独立的 y 方向拓扑机制，因此均匀条带结构本身不会产生由有限宽度几何边界诱导的拓扑边界态。

通过在实空间中拼接不同拓扑区域构造界面，体系中可出现与体态分离的离散边界态，其温度分布主要局域于界面附近。当层数为 2 时，边界态数目由一维情形下的 3 个增加到 6 个，表明边界态数目与层数有关。温度场演化表明，边界态在衰减过程中保持界面附近局域特征，而体态则表现出更明显的扩展性；增大层间耦合参数会使衰减率谱整体上移，但不改变边界态来源于拓扑界面的基本机制。

致谢：

感谢国家自然科学基金(52422603, 52511540065, 52521008, W2521166), 湖北省自然科学

基金(2023AFA072),华中科技大学交叉研究项目(5003120094), 以及苏州实验室开放课题项目(SZLAB-1508-2024-TS016).

参考文献

- [1] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [2] Chiu C K, Teo J C Y, Schnyder A P, Ryu S 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035005
- [3] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698
- [4] Ozawa T, Price H M, Amo A, Goldman N, Hafezi M, Lu L, Rechtsman M C, Schuster D, Simon J, Zilberberg O, Carusotto I 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 015006
- [5] Yoshida T, Hatsugai Y 2021 *Sci. Rep.* **11** 888
- [6] Xu G, Li Y, Li W, Fan S, Qiu C W 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 105901
- [7] Xu L J, Huang J P 2021 *EPL* **134** 60001
- [8] Cao P C, Li Y, Peng Y G, Qi M, Huang W X, Li P Q, Zhu X F 2021 *Commun. Phys.* **4** 230
- [9] Makino S, Fukui T, Yoshida T, Hatsugai Y 2022 *Phys. Rev. E* **105** 024137
- [10] Hu H, Han S, Yang Y, Liu D, Xue H, Liu G G, Cheng Z, Wang Q J, Zhang S, Zhang B, Luo Y 2022 *Adv. Mater.* **34** 2202257
- [11] Xu G, Yang Y, Zhou X, Chen H, Alu A, Qiu C W 2022 *Nat. Phys.* **18** 450
- [12] Xu G, Zhou X, Yang S, Wu J, Qiu C W 2023 *Nat. Commun.* **14** 3252
- [13] Liu Z, Cao P C, Xu L, Xu G, Li Y, Huang J P 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 176302
- [14] Cao P C, Ju R, Wang D, Qi M, Liu Y K, Peng Y G, Chen H, Zhu X F, Li Y 2024 *Sci. Adv.* **10** eadn1746
- [15] Li J, Xu C, Xu Z, Xu G, Yang S, Liu K, Chen J 2024 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **121** e2408843121

- [16] Liu Q, Wang Z C, Kim S K, Luo X B, Ben-Abdallah P, Choi W, Hu R 2025 *Mater. Today Phys.* **59** 101954
- [17] Wang Z C, Liu T F, Zhu Z, Luo X B, Hu R 2024 *Int. J. Heat Mass Transf.* **235** 126182
- [18] Liu Q, Wang Z C, Zeng M J, Kim H, Choi W, Hu R 2025 *Fundam. Res.* (in press) doi: 10.1016/j.fmre.2025.02.001
- [19] Wang Z C, Liu Q, Qian X, Luo X B, Hu R 2026 *Natl. Sci. Rev.* **13** nwag169
- [20] Liu Z, Jin P, Lei M, Wang C, Zhuang P, Tan P, Jiang J H, Marchesoni F, Huang J 2025 *Chem. Rev.* **125** 8655
- [21] Wang Z C, Liu Q, Xiang L Y, Wang Z Q, Kong W B, Yao Y G, Qian X, Luo X B, Hu R 2025 *Newton* **1** 100255
- [22] Xing Y H, Xu X F, Zhang L F 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 226601 (in Chinese) [邢玉恒, 徐锡方, 张力发 2017 物理学报 **66** 226601]
- [23] Wang Z, Zhang D M, Ren J 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 220302 (in Chinese) [王子, 张丹妹, 任捷 2019 物理学报 **68** 220302]
- [24] Luo T L, Ding Y F, Wei B J, Du J Y, Shen X Y, Zhu G M, Li B W 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 234401 (in Chinese) [罗天麟, 丁亚飞, 韦宝杰, 杜建迎, 沈翔瀛, 朱桂妹, 李保文 2023 物理学报 **72** 234401]
- [25] Lu M X, Deng W J 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 120301 (in Chinese) [卢曼昕, 邓文基 2019 物理学报 **68** 120301]
- [26] Wang Q H, Li F, Huang X Q, Lu J Y, Liu Z Y 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 224502 (in Chinese) [王青海, 李锋, 黄学勤, 陆久阳, 刘正猷 2017 物理学报 **66** 224502]

- [27] Yan Z B 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 226101 (in Chinese) [严忠波 2019 物理学报 **68** 226101]
- [28] Guo S J, Li Y Z, Li T Z, Fan X Y, Qiu C Y 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 070201 (in Chinese) [郭思嘉, 李昱增, 李天梓, 范喜迎, 邱春印 2022 物理学报 **71** 070201]
- [29] Hu J R, Kong P, Bi R G, Deng K, Zhao H P 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 054301 (in Chinese) [胡军容, 孔鹏, 毕仁贵, 邓科, 赵鹤平 2022 物理学报 **71** 054301]
- [30] Liu J S, Han Y Z, Liu C S 2019 *Chin. Phys. B* **28** 100304
- [31] Guan X, Chen G 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 140301 (in Chinese) [关欣, 陈刚 2023 物理学报 **72** 140301]
- [32] Chen B H, Chiou D W 2020 *Phys. Lett. A* **384** 126168

录用稿件，非最终出版稿

Edge States in Topological Thermal Diffusion Structures

Based on a SSH RIBBON

Li Xu-Fan¹⁾ Wang Zhao-Chen²⁾ Zhang Yan²⁾ Hu Run^{1,2)}[†]

1) (China-EU Institute for Clean and Renewable Energy, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

2) (School of Energy and Power Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

One- and two-dimensional topological thermal-diffusion structures exhibit representative localized states, such as interface states and higher-order corner states, respectively. A finite-width ribbon structure lies between these two limiting configurations in terms of both geometric dimensionality and the number of degrees of freedom. However, how the transverse degrees of freedom introduced by the finite width reconstruct the spectral branches and spatial distributions of one-dimensional interface states, as well as how these states differ from higher-order corner states in two-dimensional systems, remains to be clarified.

In this work, the spectral characteristics, edge states, and temperature-field evolution of a Su–Schrieffer–Heeger (SSH) thermal-diffusion ribbon are systematically investigated. Starting from the discrete heat-conduction equation, an SSH-type thermal network is constructed with alternating intracell and intercell couplings along the x direction and uniform interlayer coupling along the y direction. The eigenvalues of the corresponding evolution operator characterize the decay rates of the thermal modes, whereas the eigenvectors describe their spatial temperature distributions.

The results show that, as the number of layers increases, the number of spectral bands increases accordingly, and the continuous spectrum of the two-dimensional periodic system is discretized into multiple branches along the finite-width direction. Because the interlayer coupling is uniform and no SSH-type dimerization is introduced along the y direction, the geometric boundaries of a uniform ribbon do not support additional topological edge states. When topologically trivial and nontrivial regions

are connected to form interfaces along the x direction, spectrally isolated interface states emerge in both the one-dimensional SSH thermal network and the finite-width SSH ribbon. Their temperature distributions are strongly localized near the topological interfaces, and the transverse layer degrees of freedom split the original one-dimensional interface states into multiple branches with different decay rates and interlayer distributions. These interface-localized states are fundamentally different from higher-order corner states, which require nontrivial coupling configurations and simultaneous localization along both spatial directions. Time-dependent simulations further demonstrate that the edge states retain their interfacial localization during thermal decay, whereas the bulk states exhibit more extended spatial diffusion. Increasing the interlayer coupling shifts the overall decay-rate spectrum upward and modifies the relative spectral positions of the edge and bulk states, but does not alter the topological-interface origin of the edge states. These results provide a theoretical basis for understanding and controlling localized thermal modes in finite-width topological thermal-diffusion structures.

Keywords: SSH, RIBBON structure, topological edge states, decay-rate spectrum, thermal diffusion

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.52422603, 52511540065, 52521008, W2521166), the Natural Science Foundation of Hubei Province, China (Grant No. 2023AFA072), the Interdisciplinary Research Program of Huazhong University of Science and Technology (No. 5003120094), and the Open Research Project of Suzhou Laboratory (No. SZLAB-1508-2024-TS016) .

† Corresponding author. E-mail: hurun@hust.edu.cn
The first author. E-mail: 2092594846@qq.com