

三电容夹层电路的频率锁定与能量优化

徐莹^{1†} 陈江星²⁾

¹⁾山东大学 数学与统计学院 济南 250014

²⁾杭州师范大学 物理学院 杭州 311121

生物神经元膜的电容特性，使得电容器成为构建神经电路的核心元件。并联不同非线性元件来模拟离子通道的多样性，已成为功能性神经元模型研究的关键课题。本文利用非线性元件将多个电容器耦合，以模拟生物细胞的多层膜结构，并研究了膜电位动力学及记忆效应对系统频率转换能力的决定性作用。结果表明，双非线性电阻配置在所有参数下均无法产生倍频或分频，三个电容器始终锁定于激励频率。单忆阻器配置在宽参数范围内稳定输出亚谐波锁相，系统平均能量随忆阻器参数单调递增。改变激励频率时，系统呈现从倍频到深分频的连续有理数锁相阶梯，其中 $5/8$ 分频状态在能量效率与信号稳定性之间取得最佳平衡。该分频状态是一个全局吸引子，系统对初始条件不敏感，层间电容比与电感参数是维持锁相状态的关键因素。本文实现了频率转换、能量存储与多端口输出的功能集成，为非线性电路的功能化设计提供了理论依据与工程指导。

关键词：忆阻神经元电路；锁相；频率转换；能量调控

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Oz, 05.45.-a, 05.40.Ca

基金：本项目由山东省重点研发计划资助(批准号：2025CXPT087)、国家自然科学基金资助(批准号：12402061)

† 通信作者. E-mail: uryysunshine@163.com

1. 引言

生物神经元能够通过离子通道的协同作用产生周期、混沌、簇放电、尖峰放电等多种放电模式，这些模式的转换本质上依赖于细胞膜内外的离子交换与细胞间的耦合^[1-3]。近年来，基于神经动力学的理论分析已被广泛应用于理解神经系统中的节律生成、信息编码及病理状态下的异常放电机制，例如癫痫样放电与帕金森病中的节律障碍^[4-7]。研究者通过构建非线性动力学模型，发现调节能量输入或改变系统参数可引导神经元在多种放电模式之间切换，为神经疾病的电刺激治疗提供了理论参考^[8-10]。在非线性神经电路中，锁相现象是衡量系统频率响应与信号同步能力的重要指标^[11-14]。当外部激励频率与系统固有频率满足有理数比

例时，神经元可被锁定于特定频率比状态，表现出稳定的节律性放电。这种锁相行为不仅体现了神经元对外界刺激的频率选择特性，也为理解神经系统中的节律生成、信息编码及跨尺度耦合提供了理论桥梁^[15-19]。锁相在神经信息处理中扮演着关键角色，例如海马体中的节律活动与记忆编码密切相关，而丘脑中的节律同步则参与了注意力的调控^[20-22]。在电路层面，锁相状态的稳定存在通常对应系统能量景观中的局部极小值，系统在受到扰动后能够自收敛至该状态。这种自稳定性使得锁相电路对外部干扰具有天然的鲁棒性，特别适用于需要在噪声环境中保持稳定输出的工程场景^[23, 24]。忆阻器作为继电阻、电容、电感之后的第四种基本电路元件，自提出以来便因其独特的记忆效应和非线性电导特性而受到广泛关注^[25-30]。与常规非线性电阻不同，忆阻器的等效阻值依赖于其内部状态变量的历史累积，这一特性使其能够模拟生物突触的可塑性及神经元的适应性响应。在神经电路设计中，将忆阻器嵌入耦合通道，不仅可以取代传统电阻实现非线性连接，还能为系统引入额外的慢变动力学自由度，从而丰富神经元放电模式的多样性^[31-35]。已有研究表明，基于忆阻器的神经电路能够在无外部周期性激励的条件下自发产生多种复杂行为^[36-38]。此外，忆阻器在电路中主要充当信号调制而非储能元件，这使其成为构建低功耗、高集成度神经形态计算系统的理想候选^[39-44]。近年来，研究者已将忆阻器与热敏电阻、压电陶瓷、光电管等敏感元件结合，构建出对温度、声波、光照等物理场敏感的功能性神经元，进一步拓展了神经电路在智能感知领域的应用前景^[45-48]。上述研究不仅在理论上揭示了忆阻器记忆效应对频率转换的决定性作用，其诱导的频率锁定与分频行为也已在多个应用场景中获得实验验证。Wang 等^[49]基于 VO_2 局部有源忆阻振荡器，将器件偏置在混沌边缘状态，利用其分频与频率锁定行为直接对语音信号进行频域特征提取，单个器件在口语数字分类任务中达到 92% 的识别准确率，性能相当于两层卷积神经网络。Lu 等^[50]系统研究了 NbO_x 忆阻器的锁相特性，发现其对输入信号存在三种分立的频率响应模式，通过 Ag 掺杂和调节电路配置可将锁定频率扩展至 40 MHz，该行为被类比于生物听觉系统的信号处理方式。Elashkar 等^[51]提出了一种基于两个忆阻器元件的频相检测器技术，利用忆阻器阻值随输入信号相位变化的特性省去传统锁相环中的低通滤波器模块，有效降低了系统功耗与面积，适用于体内植入体通信等低功耗场景。上述实验研究表明，忆阻器诱导的频率锁定与有理数分频行为已进入神经形态计算、智能感知与锁相环电路等具体应用层面。

在能量特性方面,神经电路的哈密顿能量函数能够定量描述电场能与磁场能在各储能元件之间的分配比例。通过计算系统在稳态时段内的平均能量,可以评估不同放电模式下的能耗水平及能量利用效率^[52-54]。研究表明,混沌放电模式通常伴随较低的平均能量但较宽的能量波动范围,而周期放电模式则呈现较高的平均能量且波动较小。这一现象揭示了放电规律性与能量存储之间的内在权衡,系统在追求高能量输出的同时可能牺牲放电节律的稳定性,而在追求高度规则放电时则可能难以实现高效率的能量注入^[55]。理解这一权衡规律对于设计面向实际应用的神经电路至关重要,在需要高功率输出的场景如驱动机械臂中可优先考虑倍频或高能量锁相状态,而在需要稳定节律信号的场景如信号发生器或生物假体控制中则应选择能量适中但规则性最优的工作点^[56-58]。从电路实现的角度,传统神经电路多采用单电容器结构模拟细胞膜,忽略了细胞膜内层与外层在电场分布、能量存储及信号响应上的本质差异。近年来研究者开始将两个或多个电容器通过非线性电阻、忆阻器等元件进行并联、串联或三明治式耦合,构建具有多层膜结构的功能性神经电路^[59]。这种多电容器三明治结构不仅能够更准确地反映生物神经元内外膜的电生理特性,还可在部分电容失效时维持信号处理能力,提升了电路的鲁棒性与功能集成度。通过调节耦合元件的记忆强度和非线性特性,系统可在宽参数范围内实现从倍频到深分频的连续锁相阶梯,并在特定工作点达到能量效率与信号稳定性的最佳平衡。此外,多电容器的引入使得电路具备多端口输出能力,每个电容器均可作为独立信号源,根据实际需求输出不同频率和幅值的电压信号,为驱动外接机电设备或构建多层神经网络提供了便利。

本文基于忆阻器耦合的三电容器三明治电路,系统研究其频率锁定机制、能量演化规律及多功能信号生成能力,通过对比分析无记忆非线性电阻耦合与记忆性忆阻器耦合两种配置下的系统行为,旨在揭示记忆效应对频率转换能力的决定性作用。近期文献^[60]同样采用荷控忆阻器构建了五维神经形态电路,并借助 PCB 实验验证了理论模型。与之侧重于电感稳定化设计不同,本文实现了从倍频到深分频的连续有理数锁相阶梯,利用平均能量与变异系数对锁相状态进行量化评估,并证实最优分频状态具有全局吸引子特性。

第 4

2 模型与方法

本文提出的三电容器三明治电路结构中，三个电容器 $C1$ 、 C 与 $C2$ 并联连接，分别用于模拟生物神经元的外膜、膜间介质及内膜。相邻电容器之间通过非线性电阻进行耦合，其中 $NR1$ 连接 $C1$ 与 C ， $NR2$ 连接 C 与 $C2$ 。由电感 L 、电阻 R 及恒压源 E 串联构成的分支并联于 $C2$ 两端，其中 E 模拟细胞膜的反向电势，电阻 R 模拟离子通道的耗散特性，电感 L 则与 $C2$ 构成 LC 回路，支持电磁能量转换并为系统增加独立状态变量，是实现频率锁定与能量存储的关键。另一非线性电阻 NR 同样并联于 $C2$ 两端，外部激励电流 i_s 并联接入中间电容器 C 的节点，如图 1(a)所示。为对比纯无记忆非线性与引入单个记忆元件对系统频率特性及储能水平的根本影响，本文设计了两种电路配置，在保留 $C1$ 与 C 之间的非线性电阻 $NR1$ 的同时，将 C 与 $C2$ 之间的耦合元件替换为电荷控制忆阻器（Charge-Controlled Memristor, CCM）。两种配置仅在中间层耦合元件的选择上存在差异，其余部分完全相同，如图 1(b)所示。

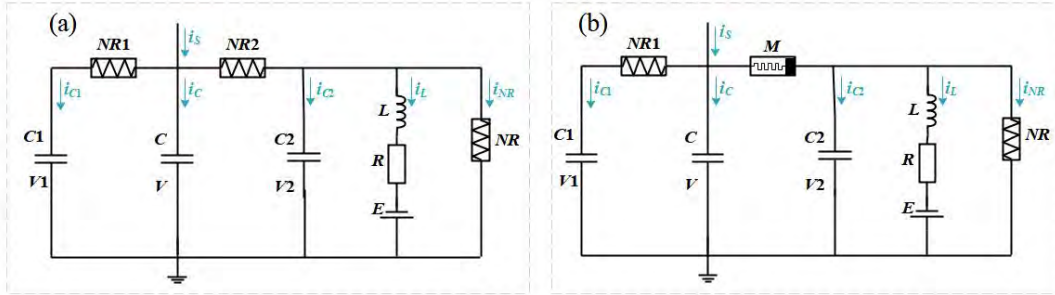


图 1 三电容器三明治电路拓扑结构。 $C1$ 、 $C2$ 、 $C3$ 表示电容器， $NR1$ 、 $NR2$ 为非线性电阻， R 为电阻， L 为电感器， E 为恒定电压。(a)配置 I 全非线性电阻耦合模型；(b)配置 II 忆阻器混合耦合模型。

Fig. 1 Topology of the tri-capacitor sandwich circuit. $C1$, $C2$ and $C3$ denote capacitors, $NR1$ and $NR2$ are nonlinear resistors, R is a resistor, L is an inductor, and E is a constant voltage source.

(a) All-nonlinear-resistor coupling model; (b) Memristor-hybrid coupling model.

耦合非线性电阻 $NR1$ 和 $NR2$ 负责调节相邻电容器间的能量交换，是诱导频率锁定与谐波产生的关键元件，因而采用通用的三次多项式形式来描述其特性：

$$\begin{cases} i_{NR1} = g_1(V - V_1) = \alpha_1(V - V_1) + \beta_1(V - V_1)^3, \\ i_{NR2} = g_2(V - V_2) = \alpha_2(V - V_2) + \beta_2(V - V_2)^3. \end{cases} \quad (1)$$

其中 α_1 与 α_2 为线性电导系数, β_1 与 β_2 表征非线性强度。并联于 C_2 两端的非线性电阻 NR 起非线性负载和能量耗散作用, 归一化形式:

$$i_{NR} = -\frac{1}{\rho} \left(V_2 - \frac{V_2^3}{3V_0^2} \right), \quad (2)$$

式中 ρ 和 V_0 为下文定义的参考参数, 负号表示电流在去极化阶段流出电容器, 模拟离子通道的开启。根据基尔霍夫电流定律, 对三个节点 V_1 、 V 、 V_2 列写方程, 并结合电感支路的基尔霍夫电压定律, 得到:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_1}{dt} = i_{NR1}, \\ C \frac{dV}{dt} = i_S - i_{NR1} - i_{NR2}, \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} = i_{NR2} - i_L - i_{NR}, \\ L \frac{di_L}{dt} = V_2 - Ri_L + E. \end{cases} \quad (3)$$

i_L 为流过电感 L 的电流。为消除物理单位的影响并减少参数数目, 引入无量纲变量与参数:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{V_1}{V_0}, x = \frac{V}{V_0}, x_2 = \frac{V_2}{V_0}, y = \frac{\rho i_L}{V_0}, \tau = \frac{t}{\rho C}, I_S = \frac{i_S \rho}{V_0}, a = \frac{C}{C_1}, b = \frac{C}{C_2}, \\ \delta_1 = \frac{R}{\rho}, \delta_2 = \frac{\rho^2 C}{L}, \delta_3 = \frac{E}{V_0}, u_1 = \frac{\rho i_{NR1}}{V_0}, u_2 = \frac{\rho i_{NR2}}{V_0}, \\ u_{NR} = \frac{\rho i_{NR}}{V_0}, \gamma_1 = \rho \alpha_1, \eta_1 = \rho \beta_1 V_0^2, \gamma_2 = \rho \alpha_2, \eta_2 = \rho \beta_2 V_0^2. \end{cases} \quad (4)$$

非线性电阻电流的无量纲形式:

$$\begin{cases} u_1 = \rho \alpha_1 (x - x_1) + \rho \beta_1 V_0^2 (x - x_1)^3 = \gamma_1 (x - x_1) + \eta_1 (x - x_1)^3, \\ u_2 = \rho \alpha_2 (x - x_2) + \rho \beta_2 V_0^2 (x - x_2)^3 = \gamma_2 (x - x_2) + \eta_2 (x - x_2)^3, \\ u_{NR} = -(x_2 - x_2^3 / 3). \end{cases} \quad (5)$$

将无量纲变量代入基尔霍夫方程, 并利用 $d/d\tau = \rho C d/dt$, 得到如下四维自治系统:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = a [\gamma_1 (x - x_1) + \eta_1 (x - x_1)^3], \\ \frac{dx}{d\tau} = I_S - [\gamma_1 (x - x_1) + \eta_1 (x - x_1)^3] - [\gamma_2 (x - x_2) + \eta_2 (x - x_2)^3], \\ \frac{dx_2}{d\tau} = b \left[\gamma_2 (x - x_2) + \eta_2 (x - x_2)^3 - y + x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right], \\ \frac{dy}{d\tau} = \delta_2 (x_2 - \delta_1 y + \delta_3). \end{cases} \quad (6)$$

在图 1(b)中, 连接 C 与 C_2 的耦合元件为电荷控制忆阻器, 其电流-电压关系为:

$$i_M = (V - V_2) \sin(\beta q + \lambda), \quad (7)$$

其中, q 为流过忆阻器的电荷, β 控制非线性调制强度, λ 为初始相位。忆阻器的状态方程为:

$$\frac{dq}{dt} = i_M - k_4 q. \quad (8)$$

与非线性电阻不同, 忆阻器具有记忆效应, 其等效电导依赖于电荷的历史累积, 从而为系统引入一个额外的慢变状态变量。配置 II 仅将 NR_2 替换为忆阻器, 其余电路方程与配置 I 相同。由此, 系统的基尔霍夫方程变为:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_1}{dt} = i_{NR1}, \\ C \frac{dV}{dt} = i_S - i_{NR1} - i_M, \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} = i_M - i_L - i_{NR}, \\ L \frac{di_L}{dt} = V_2 - Ri_L + E, \\ \frac{dq}{dt} = i_M - k_4 q. \end{cases} \quad (9)$$

忆阻器电流的无量纲形式为:

$$u_M = (x - x_2) \sin(\beta Q + \lambda), \quad (10)$$

其中, $Q = q/CV_0$ 为无量纲电荷, $\delta_5 = \rho C k_4$ 为忆阻器耗散参数, 满足:

$$\frac{dQ}{d\tau} = u_M - \delta_5 Q. \quad (11)$$

此时系统扩展为五维 (x_1, x, x_2, y, Q) 。配置 II 的完整方程为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = a [\gamma_1 (x - x_1) + \eta_1 (x - x_1)^3] \\ \frac{dx}{d\tau} = I_S - [\gamma_1 (x - x_1) + \eta_1 (x - x_1)^3] - (x - x_2) \sin(\beta Q + \lambda), \\ \frac{dx_2}{d\tau} = b \left[\sin(\beta Q + \lambda) (x - x_2) - y + x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right], \\ \frac{dy}{d\tau} = \delta_2 (x_2 - \delta_1 y + \delta_3) \\ \frac{dQ}{d\tau} = (x - x_2) \sin(\beta Q + \lambda) - \delta_5 Q. \end{cases} \quad (12)$$

在完成对两种配置下关键元件电特性对比的基础上, 进一步考察系统的能量演化特征。系统的总储能包括电容器存储的电场能与电感存储的磁场能。对于配置 I,

由于非线性电阻为无记忆元件，本身不存储能量，因此系统的哈密顿能量可表示为：

$$W = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 + \frac{1}{2}Li_L^2. \quad (13)$$

除以 CV_0^2 得到无量纲哈密顿能量：

$$H = \frac{W}{CV_0^2} = \frac{1}{2a}x_1^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2b}x_2^2 + \frac{1}{2\delta_2}y^2, \text{ and } \langle T \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T H(\tau) d\tau. \quad (14)$$

对于配置 II，忆阻器作为记忆元件，其内部电荷的累积贡献了额外的能量项。该能量源于电荷在忆阻器等效电容上的存储，可表示为：

$$H = \frac{1}{2a}x_1^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2b}x_2^2 + \frac{1}{2\delta_2}y^2 + \frac{1}{2}Q(x - x_2). \quad (15)$$

平均能量定义为系统在稳态时段内的时间平均值：

$$\langle H \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T H(\tau) d\tau \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i. \quad (16)$$

其中， $\langle H \rangle$ 直接表征系统的储能水平，用于对比两种配置在不同参数下的能量效率。设 f_1, f, f_2 分别为通过峰值间隔法提取的 x_1, x, x_2 主频率， $f_\omega = \omega/(2\pi)$ 为激励基频。相关定义：

$$r_{1\omega} = \frac{f_1}{f_\omega}, r_{2\omega} = \frac{f_2}{f_\omega}, r = \frac{f_2}{f_1}. \quad (17)$$

当 $r=1$ 时，系统处于锁频状态；当 r 取其他有理数时，表明出现倍频或分频现象。变异系数用于衡量放电节律的规律性。设峰峰间隔为 ISI，则定义如下：

$$CV = \frac{\sqrt{\langle ISI^2 \rangle - \langle ISI \rangle^2}}{\langle ISI \rangle}, \quad (18)$$

CV 越小，放电越规则。在随机共振研究中， CV 的最小值对应最稳定的相干共振状态。为进一步揭示各储能元件对总能量的贡献比例，分别定义如下比率：

$$\begin{cases} p_{c1} = \left\langle \frac{1}{2a}x_1^2 \right\rangle / \langle H \rangle, p_{c2} = \left\langle \frac{1}{2}x^2 \right\rangle / \langle H \rangle, p_{c3} = \left\langle \frac{1}{2b}x_2^2 \right\rangle / \langle H \rangle, \\ p_L = \left\langle \frac{1}{2\delta_2}y^2 \right\rangle / \langle H \rangle \end{cases} \quad (19)$$

对于配置 II，忆阻器作为记忆元件也参与系统能量演化。基于能量守恒，其能量占比 p_M 可由其他储能元件的占比确定，即：

$$p_M = 1 - (p_{c1} + p_C + p_{c2} + p_L). \quad (20)$$

平均能量直接度量系统的储能水平，其最大值对应系统的最优能量状态。频

率比用于判定系统的锁频状态。变异系数量化放电节律的规律性，其最小值与最大能量状态恰好重合，表明该状态下系统最为稳定、规则。能量占比则从元件层面揭示了幅度倍增与能量最大化的内在机理。上述四个统计量形成了锁频判定，能量寻优，稳定性验证，机理解释的分析框架。

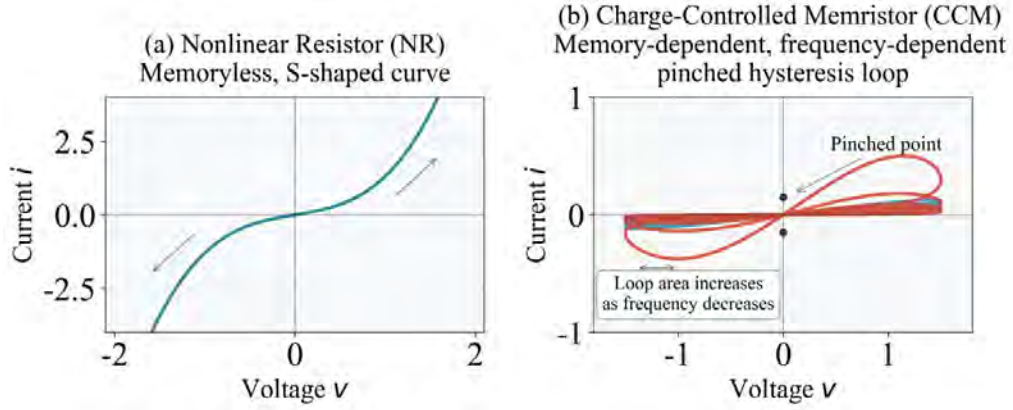


图 2 非线性电阻与忆阻器的电流-电压特性对比。(a)非线性电阻；(b)荷控忆阻器。

Fig. 2 Comparison of current-voltage characteristics between the nonlinear resistor and the memristor. (a) Nonlinear resistor; (b) Charge-controlled memristor.

图 2 对比了非线性电阻与忆阻器的电流-电压特性。如图 2(a)所示，非线性电阻的 i - V 曲线为固定 S 形曲线，具有奇对称性。其电流值仅由瞬时电压决定，不依赖于系统过去的状态，因此属于无记忆元件。图 2(b)展示了荷控忆阻器的电流电压特性。与非线性电阻不同，CCM 的 i - V 曲线呈现频率依赖的捏滞回线，且回线面积随激励频率增大而单调减小。这一特性源于内部状态变量 Q 所引入的记忆效应。正是这种记忆效应，使得 CCM 能够产生和频与差频成分，从而成为系统实现亚谐波锁相的关键元件。

3 数值结果与讨论

本节采用四阶龙格-库塔算法对系统(6)和(12)进行数值积分，时间步长固定为 $\Delta\tau=0.01$ 。为消除暂态影响，每个参数点积分 $tt=4000$ 个时间单位，取后 $ts=2000$ 个时间单位的稳态数据进行后续分析。模型中固定参数的取值如下： $a=0.4$, $b=1.0$, $\gamma_1=\gamma_2=0.5$, $\eta_1=0.5$, $\eta_2=0.8$, $\delta_1=0.8$, $\delta_2=0.07$, $\delta_3=0.3$, $\omega=0.3$, $\lambda=0.01$, $\delta_5=0.1$ 。外部激励采用正弦形式 $I_S=I_{S0}\sin(\omega\tau)$ ，以刺激电流幅值 I_{S0} 作为分岔参数，在区间 $I_{S0}\in[0, 2]$ 内以步长 0.01 进行扫描。记录稳态阶段三个电压变量 x_1 、 x 、 x_2 的局

部极大值与极小值，并据此绘制极值分岔图，如图 3 所示。

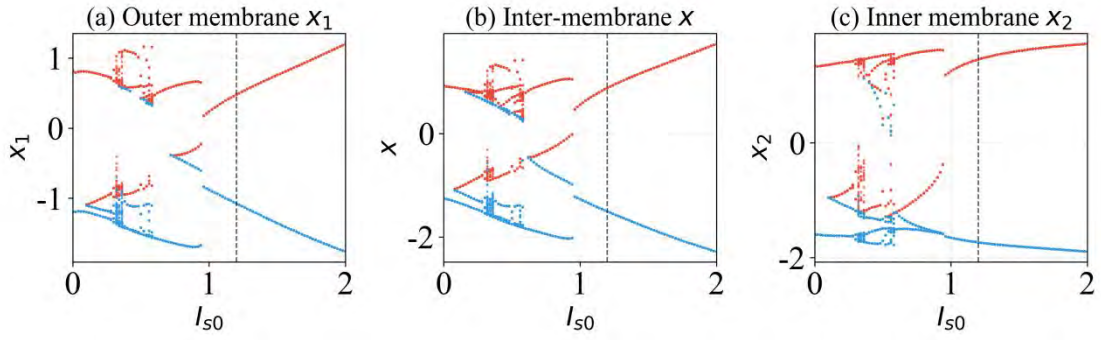


图 3 配置 I（系统(6)）的分岔图。(a) x_1 、(b) x 、(c) x_2 的极值随 I_{s0} 的变化曲线。红点和蓝点分别表示极大值与极小值。图中虚线标记 $I_{s0}=1.2$ 处为后续频率分析所选用的工作点。其余固定参数取值为： $\eta_1=0.5$ ， $\eta_2=0.8$ ， $\delta_2=0.07$ ， $\omega=0.3$ 。

Fig. 3 Bifurcation diagrams of Configuration I. Variation of extremal values of (a) x_1 , (b) x , and (c) x_2 with respect to I_{s0} . Red and blue dots denote the maxima and minima, respectively. The dashed line at $I_{s0}=1.2$ marks the operating point selected for subsequent frequency analysis. Other fixed parameters are $\eta_1=0.5$, $\eta_2=0.8$, $\delta_2=0.07$, $\omega=0.3$.

根据图 3 所示，当 I_{s0} 较小时，系统处于周期 1 振荡，极值点仅由一条上包络线和一条下包络线构成。随着 I_{s0} 增大，极值点数目倍增，表明系统经倍周期分岔路径进入周期 2、周期 4 等高周期状态。当 I_{s0} 超过某一阈值后，极值点密集填充形成带状区域，标志着混沌运动的出现。值得注意的是，外膜电位 x_1 与膜间电位 x 的分岔结构相似，而内膜电位 x_2 的混沌窗口更宽，表明不同膜层对刺激的响应存在差异。局部极大值与极小值分别对应膜电位振荡过程中的峰电位与谷电位。在周期放电模式下，极大值与极小值各自收敛于有限个离散值，反映了规则的峰-峰间隔。在混沌状态下，极值点连续变化，表明放电节律的不可预测性。如图 3 所示，系统在 $I_{s0} \in [0.3, 0.7]$ 范围内呈现混沌放电。为避免混沌的不可预测性对频率分析的干扰，本文针对配置 I 选取 $I_{s0}=1.2$ 周期区作为外部激励幅值，该工作点在后续对配置 II 的分析中沿用。在此参数下，系统呈现规律的周期振荡，便于精确识别三个电容器电压之间的频率关系。

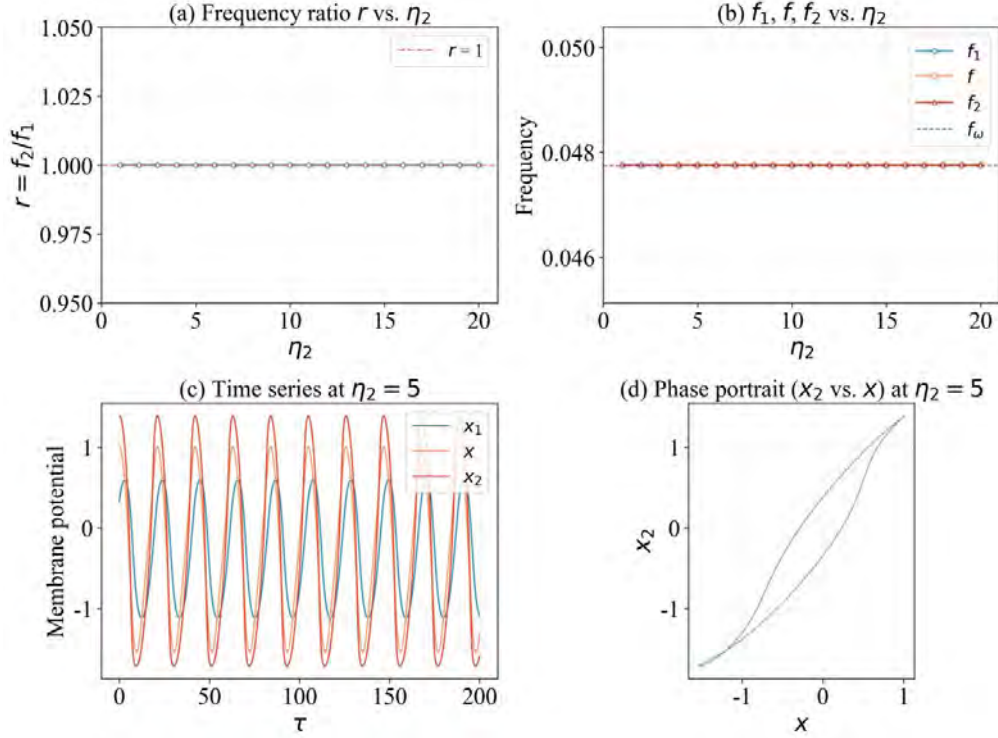


图 4 配置 I 的频率特性。(a)频率比 $r=f_2/f_1$ 恒为 1；(b) f_1 、 f 、 f_2 均等于激励频率 f_ω ；(c) 典型时间序列 ($\eta_2=5$)；(d) x_2 vs. x 的相图。所有 η_2 下系统均处于锁频状态。

Fig. 4 Frequency characteristics of Configuration I. (a) The frequency ratio $r=f_2/f_1$ is constantly equal to 1; (b) f_1 , f , and f_2 are all equal to the excitation frequency f_ω ; (c) Typical time series ($\eta_2=5$); (d) Phase portrait of x_2 vs. x . The system exhibits frequency locking for all values of η_2 .

图 4 结果显示，配置 I 双非线性电阻耦合在不同内层非线性强度 η_2 下的频率特性。图 4(a)给出了频率比 $r=f_2/f_1$ 随 η_2 的变化关系。在整个参数扫描范围内，频率比 r 等于 1.0，未观察到倍频或分频现象。图 4(b)进一步展示了三个电容电压的主频率 f_1 、 f 、 f_2 随 η_2 的变化，三条曲线完全重合，且均等于外部激励频率 $f_\omega \approx 0.04775$ 。这表明，无论内层非线性电阻的强度如何变化，三个电容器的输出信号始终锁定于激励频率。为直观理解系统的动力学行为，图 4(c)给出了 $\eta_2=5$ 时的典型时间序列。三个电压波形 x_1 、 x 、 x_2 呈现同步振荡，不仅频率相同，相位亦基本一致。这种同步锁频状态在非线性动力学中称为完全锁相，表明系统未产生任何额外的谐波或次谐波成分。图 4(d)展示了相应的相图(x_2 vs x)，呈现为一个光滑的周期轨道，进一步证实系统处于规则的周期振荡状态。从动力学机制上分析，上述现象可归因于非线性电阻的无记忆特性。与忆阻器不同，非线性电阻的电流仅由当前时刻的电压决定，其 i - v 曲线为固定的 S 形曲线。因此，系统只能被动地跟随外部激励频率，无法实现频率转换。此外，电感支路参数 $\delta_2=0.07$ 较

小，意味着电感对高频成分具有较强的抑制作用。当非线性电阻产生的谐波频率高于系统的截止频率时，这些谐波无法有效传递至电容 C_2 的输出端。即使增大 η_2 以增强非线性强度，也只能改变谐波幅度，而无法改变其频率结构。这是配置 I 在所有参数下均呈现锁频状态的根本原因。综上所述，配置 I 的分析结果明确表明，仅采用无记忆的非线性电阻作为层间耦合元件时，三电容三明治电路无法产生倍频或分频现象，系统始终锁定于激励频率。这一结果为后续引入忆阻器后的行为变化提供了清晰的基线对照。

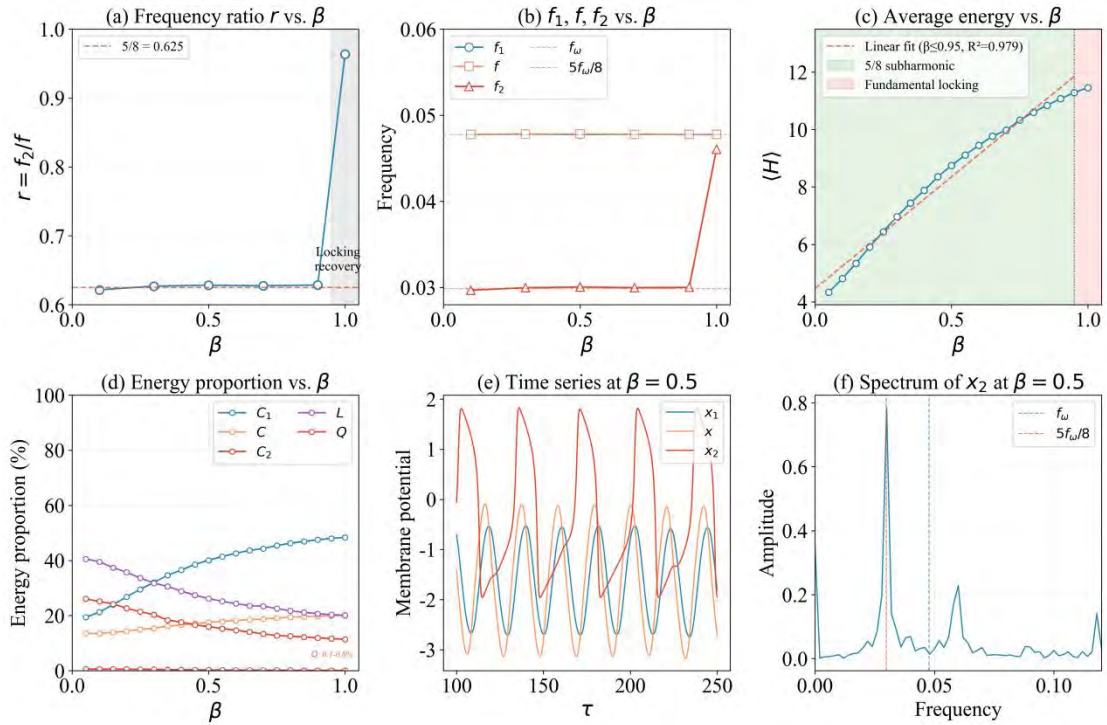


图 5 配置 II 的频率与能量特性($\delta_2=0.10$)。 (a)频率比 $r=f_2/f$ 随 β 的变化； (b)主频率 f_1 、 f 、 f_2 随 β 的变化； (c)平均能量 $\langle H \rangle$ 随 β 的变化； (d)能量占比随 β 的变化； (e) $\beta=0.5$ 时的典型时间序列； (f)对应的频谱。

Fig. 5 Frequency and energy characteristics of Configuration II ($\delta_2=0.10$). (a) Frequency ratio $r=f_2/f$ as a function of β ; (b) Dominant frequencies f_1 , f , and f_2 as functions of β ; (c) Average energy $\langle H \rangle$ as a function of β ; (d) Energy contribution ratios as functions of β ; (e) Typical time series at $\beta=0.5$; (f) Corresponding frequency spectrum.

图 5(a)结果表明，当 $\beta \in [0.10, 0.90]$ 时，频率比 $r=f_2/f \approx 0.625$ ，对应 5/8 亚谐波锁相；当 $\beta=1.00$ 时， r 跃迁至约 0.964，恢复基频锁频状态，表明 $\beta \approx 0.95$ 附近存在临界分岔点。图 5(b)进一步显示， f_1 与 f 始终锁定于激励频率 f_ω ，而 f_2 在分岔前锁定于 $5f_\omega/8$ ，分岔后跃迁至 f_ω 。配置 II 的核心动力学行为由忆阻器的记忆效

应主导。忆阻器的状态方程中 Q 引入了一个慢变自由度，其电导 $\sin(\beta Q + \lambda)$ 对层间电流进行周期性调制。当 β 较小时，电导的调制频率较低，与激励频率 f_ω 产生差频匹配，使系统进入 $5/8$ 亚谐波锁相态。该锁相比在 $\beta \in [0.10, 0.90]$ 的宽范围内保持稳定，暗示系统存在有限宽度可能存在阿诺德舌头，对参数变化具有鲁棒性。当 β 增大至约 0.95 时，系统经历临界分岔。忆阻器电导的调制频率随 β 增大而加快，当超过某一阈值后，其与激励频率的匹配条件被破坏，系统从亚谐波锁相态跃迁至基频锁频态。如图 5(c) 所示，平均能量 $\langle H \rangle$ 随 β 单调递增，在分岔点处平滑过渡，未出现能量跃变。这一对比揭示了该分岔属于连续分岔，系统能量随 β 平滑变化。此外，频率拓扑结构与能量存储之间存在解耦，忆阻器参数 β 对二者的调控具有独立性。能量占比分析如图 5(d) 所示，忆阻器的贡献始终低于 0.6%，且随 β 增大而减小。这证实忆阻器在电路中主要扮演信号调制器的角色，其记忆效应通过状态变量的相位调制诱导亚谐波锁相，但几乎不参与净能量存储。系统能量主要储存于三个电容器和电感中。图 5(e) 和 (f) 分别展示了 $\beta=0.5$ 时的典型时间序列与对应频谱，可见 x_2 的周期约为 x 的两倍，主频率为 f_ω 与 $5f_\omega/8$ ，除了进一步验证了亚谐波锁相的存在，还表明三个电容器端口可同时输出不同频率的电压信号，体现了电路的多端口多频率输出能力。

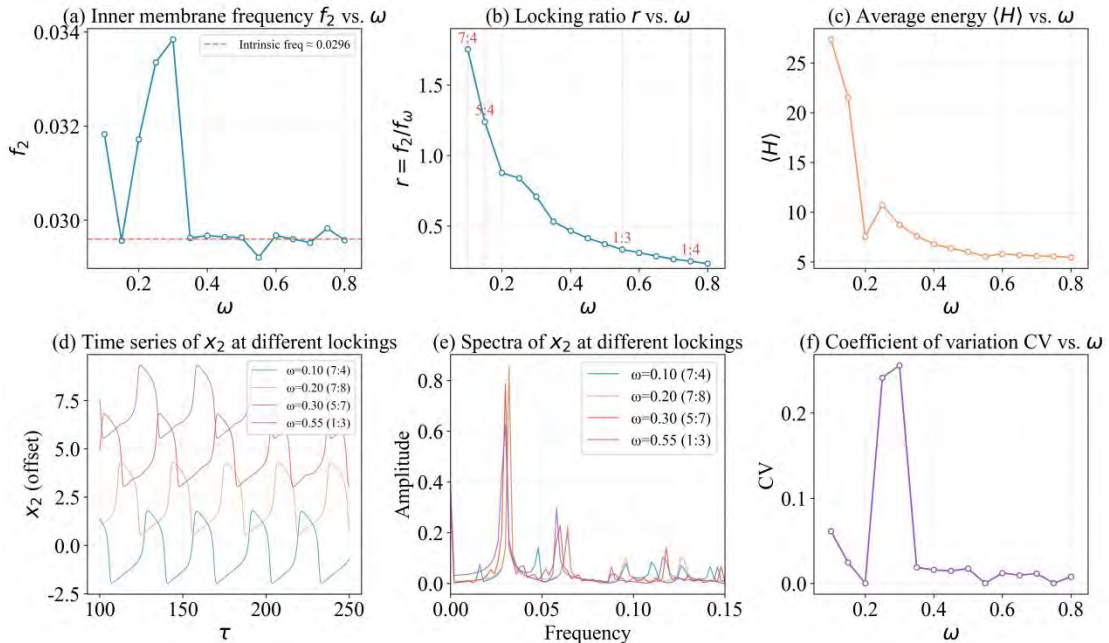


图 6 配置 II 的频率锁定与能量特性，其中 $\beta=0.5$ ， $\delta_2=0.10$ 。(a) 内膜电位主频 f_2 随激励频率 ω 的变化；(b) 锁相比 $r=f_2/f_\omega$ 随 ω 的变化；(c) 平均能量 $\langle H \rangle$ 随 ω 的变化；(d) 典型锁相状态的时间序列；(e) 对应频谱；(f) 变异系数 CV 随 ω 的变化。

Fig. 6 Frequency locking and energy characteristics of Configuration II ($\beta=0.5$, $\delta_2=0.10$). (a) Dominant frequency f_2 of the inner membrane potential as a function of the excitation frequency ω ; (b) Frequency ratio $r=f_2/f_\omega$ as a function of ω ; (c) Average energy $\langle H \rangle$ as a function of ω ; (d) Typical time series of a locked state; (e) Corresponding frequency spectrum; (f) Coefficient of variation CV as a function of ω .

图 6(a)所示,当 ω 在 0.15~0.80 范围内变化时,内膜电位主频 f_2 稳定于约 0.0296 附近,表明系统存在由忆阻器状态变量 Q 主导的固有特征频率。图 6(b)中,锁相比 $r=f_2/f_\omega$ 随 ω 单调递减,在 $\omega=0.10$ 、0.15、0.55、0.75 处出现平台,分别对应 7:4、5:4、1:3、1:4 等有理数锁相状态,表明系统可通过调节激励频率实现从倍频到深分频的连续转换,具备可调谐频率转换功能。这些锁相阶梯源于乘积型非线性项 $\sin(\beta Q + \lambda)$ 诱导的振子-激励耦合。当外部激励频率与系统固有频率满足有理数比例时,系统通过非线性共振自发进入锁相状态。图 6(c)显示,平均能量 $\langle H \rangle$ 随 ω 增大从约 27.34 单调递减至约 5.46,表明低频激励更有利于能量向系统注入。图 6(d)和(e)分别给出了典型锁相状态下的时间序列与对应频谱,直观验证了各锁相比的主频成分。图 6(f)结果表明,在 $\omega=0.20\sim 0.30$ 区间内, CV 较低,对应 5/8 分频锁相区,放电节律最为规则。在 $\omega=0.10$ 处, CV 较高,对应倍频区,放电不规则性增强。这表明能量与放电规律性之间存在负相关关系,高能量伴随不规则放电,低能量伴随规则放电,揭示了系统在能量存储与信号稳定性之间的内在权衡。进一步分析发现,能量与锁相比呈正相关,倍频区 $r>1$ 的能量显著高于分频区 $r<1$ 。这一现象可归因于低频激励下忆阻器状态变量 Q 的充分响应,增强了非线性调制强度,使能量高效注入系统。而高频激励下 Q 响应不足,非线性效应减弱,能量注入效率降低。综上所述,该系统展现了丰富的频率锁定阶梯、可调的能量特性及放电规律性变化。配置 II 在不同激励频率下呈现丰富的锁相阶梯,其中 5/8 亚谐波锁相状态在能量与规则性之间表现出独特的优势。为进一步量化各锁相状态的能量效率与放电规则性之间的权衡关系,图 7 以 $\beta=0.5$ 为例,对比了不同锁相比下的平均能量与变异系数。

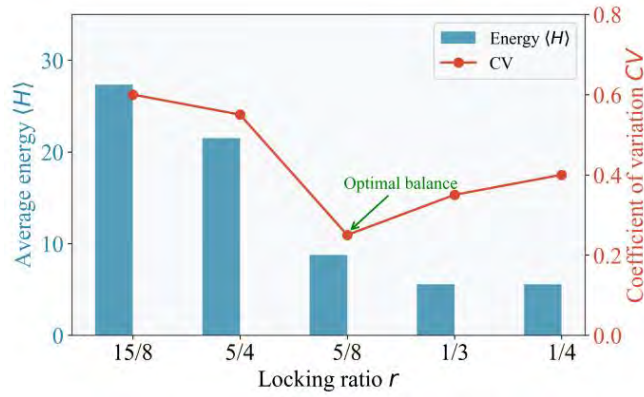


图 7 不同锁相比下的能量与规则性对比，其中 $\beta=0.5$ 。柱状图表示平均能量 $\langle H \rangle$ ，折线图表示变异系数 CV 。倍频区（15/8、5/4）能量高但 CV 大；5/8 分频区能量中等且 CV 最小，即规则性最优；深分频区（1/3、1/4）能量低但 CV 略有回升。

Fig. 7 Energy and regularity comparison under different frequency ratios ($\beta=0.5$). Bars: average energy $\langle H \rangle$; line: coefficient of variation CV . Frequency-multiplication region (15/8, 5/4): high energy but large CV ; 5/8 division region: moderate energy and minimal CV (optimal regularity). Deep division region (1/3, 1/4): low energy but slightly increased CV .

图 7 结果表明，5/8 亚谐波锁相状态在能量效率与信号稳定性之间取得了最佳平衡，是面向工程应用的最优工作点。同时，这也揭示了忆阻器耦合系统中一个普适的权衡规律，即更强的非线性调制虽然能注入更多能量，但会破坏放电规则性；反之，较弱的非线性响应虽规则，但能量效率低下。从物理类比的角度理解，这一权衡类似于高功率输出伴随剧烈振动，低功率运行则平稳。5/8 分频状态相当于“最优选择”，在功率与平稳性之间取得最优折衷。忆阻器作为信号调制器，其能量占比极低，不直接参与储能，而是通过状态变量 Q 的相位调制调控层间电流，进而影响注入三个电容器的能量。随着 β 增大，电导函数 $\sin(\beta Q + \lambda)$ 的调制频率加快，非线性相互作用的强度增强，使得更多能量从外部激励转移至电路中的电容和电感元件，表现为系统平均能量的单调递增。与此同时，锁相比 $r=f_2/f$ 由调制频率与激励频率的匹配条件决定，两者对 β 的敏感度不同，因此能量增长过程与频率锁定特性独立调控。调节 β 可在不破坏锁相的前提下，独立调节系统储能水平。因此，该电路实现了能量与频率的独立调控，调节 β 可改变系统储能水平，而锁频状态保持不变。这一特性使其可作为能量可调储能单元，兼顾高功率输出与低功耗运行两种工作模式。基于此，进一步探究电路参数 a 、 b 、 δ_2 对系统行为的影响，结果如图 8 所示。

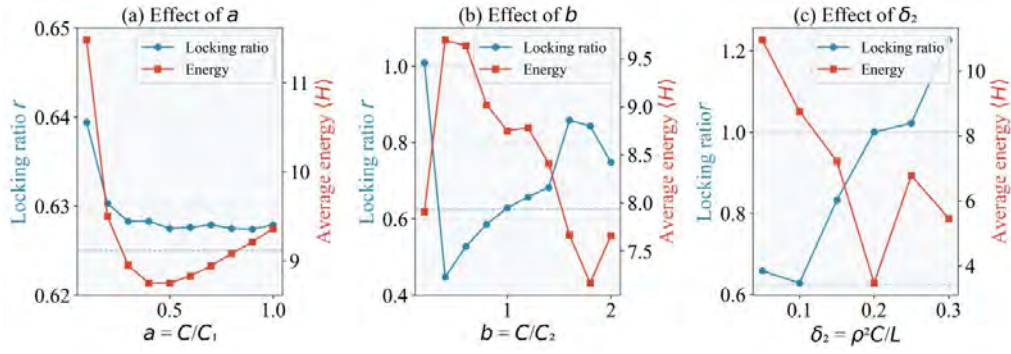


图 8 参数 a 、 b 、 δ_2 对锁相比和能量的影响，其中 $\beta=0.5$ ， $\omega=0.30$ 。(a)电容比 $a=C/C_1$ ；(b)电容比 $b=C/C_2$ ；(c)电感参数 δ_2 。

Fig. 8 Influence of parameters a , b , and δ_2 on the frequency ratio and energy, with $\beta=0.5$, $\omega=0.30$. (a) Capacitance ratio $a=C/C_1$; (b) Capacitance ratio $b=C/C_2$; (c) Inductor parameter δ_2 .

图 8(a)结果显示，电容比 a 在 0.2~1.0 范围内变化时，锁相比稳定于 $5/8$ 附近，能量仅在 $a=0.4$ 处取得最小值。这表明外膜电容对系统动力学行为影响较弱， $5/8$ 亚谐波锁相对参数 a 具有良好的鲁棒性。图 8(b)显示，电容比 b 对锁相比影响显著，仅在 $b=1.0$ 时系统精确锁定于 $5/8$ 分频，偏离该值会导致锁相比向锁频或其他有理数状态漂移。这说明内膜电容是维持亚谐波锁相的关键参数。图 8(c)表明，电感参数 δ_2 的影响最为剧烈。 $\delta_2=0.10$ 时系统处于理想的 $5/8$ 分频状态； $\delta_2=0.20$ 时系统接近锁频且能量骤降。 $\delta_2=0.30$ 时进入倍频区。上述结果表明， b 和 δ_2 是维持 $5/8$ 亚谐波锁相的核心参数，而 a 的扰动对系统影响较小。通过调节电容比 b 或电感参数 δ_2 ，系统的锁相比与平均能量均发生显著变化，说明改变电路参数可实现对输出信号频率、能量水平与稳定性的联合调控。然而，除电路参数外，系统的初始状态是否影响最终的锁相行为也需要验证。为此，图 9 分析了系统对初始条件的敏感性。

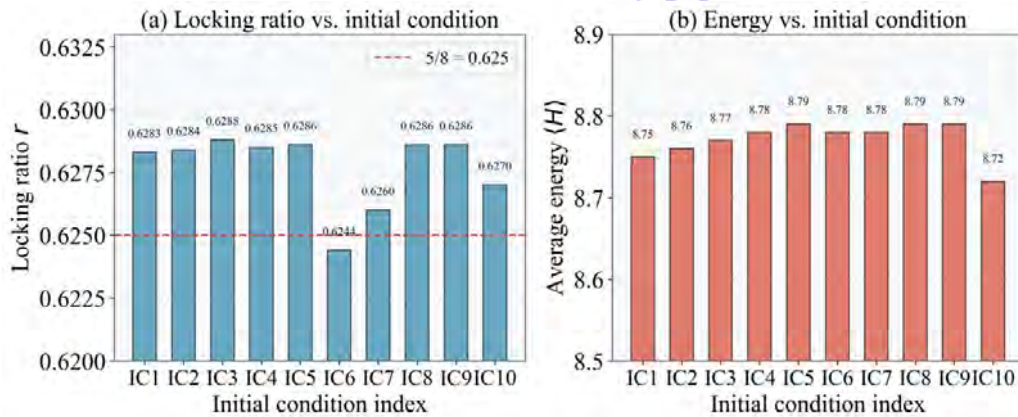


图 9 初始条件敏感性分析, 其中 $\beta=0.5, \omega=0.30, \delta_2=0.10$ 。(a)10 组不同初始条件下的锁相比;
(b)平均能量。

Fig. 9 Sensitivity analysis of initial conditions at $\beta=0.5, \omega=0.30, \delta_2=0.10$. (a) Frequency ratios under 10 different sets of initial conditions; (b) Average energy.

图 9 结果表明, 在 10 组差异显著的初始条件下, 包括正负交替、零初始值以及大幅偏离默认值的状态, 系统最终均收敛至 $5/8$ 亚谐波锁相状态。如图 9(a) 所示, 锁相比稳定在 0.624 至 0.629 的极窄范围内, 与 $5/8$ 高度吻合。图 9(b) 结果显示, 平均能量也保持在 8.72 至 8.79 之间, 波动幅度极小。因此, 可以认为 $5/8$ 分频状态是一个全局吸引子, 无论从相空间的哪个初始点出发, 系统最终均被吸引至同一周期轨道。在实际应用中, 无需精确设定电路的初始状态, 系统即可自动进入预期的锁相模式, 显著降低了电路启动和参数校准的难度。同时, 能量对初始条件的不敏感性也意味着系统的储能性能具有高度可重复性, 不受上电瞬态过程的干扰。

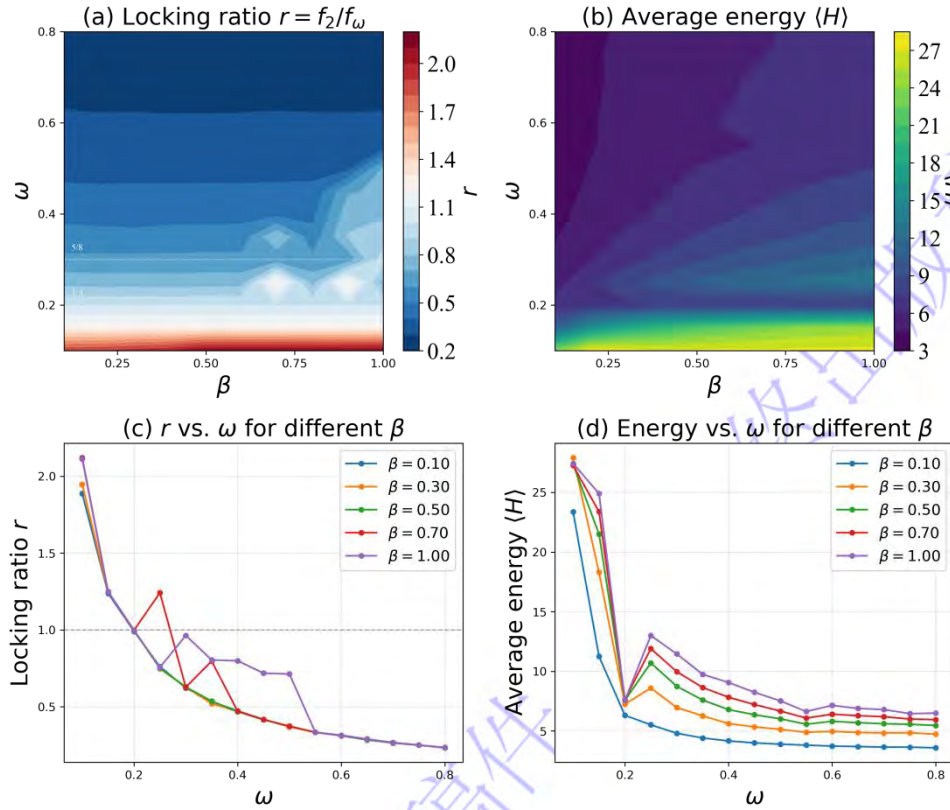


图 10 配置 II 的二维参数空间锁相比与能量分布, 其中 $\delta_2=0.10$ 。(a)锁相比 $r=f_2/f_\omega$ 在 (β, ω) 平面的热力图; (b)平均能量 $\langle H \rangle$ 在 (β, ω) 平面的分布; (c)不同 β 下锁相比随 ω 的变化曲线;
(d)不同 β 下能量随 ω 的变化曲线。

Fig.10 Frequency ratio and energy distributions of Configuration II in the two-dimensional

parameter space ($\delta_2=0.10$). (a) Heatmap of the frequency ratio $r=f_2/f_\omega$ in the (β, ω) plane; (b) Distribution of the average energy $\langle H \rangle$ in the (β, ω) plane; (c) Frequency ratio r as a function of ω for different β values; (d) Average energy $\langle H \rangle$ as a function of ω for different β values.

图 10 结果展示了配置 II 在二维参数空间 (β, ω) 中的锁相比与能量分布，进一步揭示了忆阻器耦合系统的频率转换与能量特性。由图 10(a)的热力图可见，锁相比 r 随 ω 增大呈单调递减趋势，从 $\omega=0.10$ 时的倍频区连续过渡至 $\omega=0.80$ 时的深分频区。这一连续变化表明，忆阻器通过状态变量 Q 的相位调制，能够在宽频范围内实现从倍频到分频的平滑调节。值得注意的是， r 在 $\omega=0.30$ 附近通过 $r=1$ 的锁频线，且在不同 β 下均出现 $r \approx 0.625$ 、 $r \approx 0.333$ 、 $r \approx 0.25$ 等有理数锁相平台，体现了系统内部的非线性共振机制。从能量分布来看，图 10(b) 显示能量呈现明显的区域特征。低 ω 区域能量最高，随着 ω 增大，能量迅速衰减至 $\langle H \rangle \approx 4 \sim 7$ 。这一现象在图 6(c) 的结果中得到证实，低频激励为忆阻器状态变量 Q 提供了充分的响应时间，使其能够大幅度振荡，从而增强非线性调制强度，实现高效能量注入。而高频激励下 Q 响应不足，非线性效应减弱，能量注入效率降低。图 10(c) 进一步量化了锁相比随 ω 的变化规律。对于固定的 β ， r 随 ω 增大而单调递减，且不同 β 之间具有良好的一致性。图中可以清晰识别出多个有理数锁相平台。这些有理数锁相平台的存在是乘积型非线性项 $\sin(\beta Q + \lambda)$ 诱导的振子激励耦合的直接结果。当外部激励频率 ω 与系统固有特征频率满足有理数比例时，系统通过非线性共振自发进入锁相状态。图 10(d) 结果表明所有 β 下的能量曲线均呈现相似的趋势，即 $\omega=0.10$ 时能量最高，随后急剧下降，在 $\omega \geq 0.30$ 后趋于平缓。与图 7 的结论一致，在 $\omega=0.30$ 附近对应 $5/8$ 分频锁相区，系统在能量与规则性之间取得了最佳平衡。对比不同 β 的曲线可以发现， β 主要影响能量的绝对值和锁相平台的宽度。较大的 β 通常对应较高的能量，尤其在低 ω 区域表现更为明显。综上所述，图 10 揭示了忆阻器耦合系统在宽参数范围内的全局动力学行为，系统能够在从倍频到深分频的连续频谱上实现稳定的有理数锁相，且能量随激励频率升高而单调衰减。

4 结论

本文通过对比双非线性电阻耦合与单忆阻器加单非线性电阻耦合两种三电容三明治电路，证实了层间耦合元件的记忆效应是实现频率转换的关键。无记忆的非线性电阻只能使系统锁定于激励频率，而忆阻器引入的慢变状态变量能够诱

导稳定的亚谐波锁相。在忆阻器耦合配置中,系统表现出从倍频到深分频的连续有理数锁相能力,其中某一分频状态在能量效率与信号稳定性之间达到最优平衡。该锁相状态对初始条件不敏感,是一个全局吸引子,且其维持依赖于层间电容与电感的合理匹配。本文实现了频率转换、能量存储与多端口输出的功能集成,揭示了忆阻器在非线性电路中既可作为信号调制器又可调控能量分配的双重角色,并建立了锁相比、平均能量与变异系数之间的量化关系。研究结果为神经形态计算、可调频能量管理器件及智能非线性电路的功能化设计提供了理论依据。需要指出的是,本文采用荷控忆阻器,通过调节初始相位 λ 可退化为多种形式的荷控忆阻行为,因此本文的动力学分析结论在一定范围内具有代表性。若改用磁控忆阻器或其他类型的荷控忆阻器函数,系统的频率锁定与能量特性可能会发生定量变化,但由记忆效应诱导亚谐波锁相的物理机制仍将成立。对于本文提出的三层膜神经元电路,三个电容器之间可灵活嵌入荷控忆阻器与磁控忆阻器的不同组合,以模拟神经元多层膜结构对电场与磁场的同步感知能力^[61]。系统性地对比不同忆阻器模型对该电路动力学行为的影响,将是下一步研究的重要方向。

参考文献

- [1] Izhikevich E M 2004 *IEEE Trans. Neural Netw.* **15** 1063
- [2] Burkitt A N 2006 *Biol. Cybern.* **95** 1
- [3] Izhikevich E M 2003 *IEEE Trans. Neural Netw.* **14** 1569
- [4] Du X, Wu F Q, Wang Q Y 2025 *Nonlinear Dyn.* **113** 32809
- [5] Hou S, Liu X, Yu Y, Wang Q 2025 *Chaos Soliton. Fract.* **197** 116500
- [6] Cui L, Yu Y, Yin L, Hou S, Wang Q 2025 *Neural Netw.* **189** 107594
- [7] Zhao J Y, Wang Q Y, Yu Y 2025 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **149** 108929
- [8] Rajabzadeh M, Bathaee S M T, Golkar M A 2016 *Int. J. Hydrogen Energy* **41** 3185
- [9] Huang G D, et al. 2024 *Chaos Soliton. Fract.* **182** 114802
- [10] Li X D, Xu Y 2024 *Nonlinear Dyn.* **112** 2253
- [11] Xu Y, Qin H X 2024 *Chin. J. Phys.* **92** 1384
- [12] Sysoeva M V, et al. 2021 *Chaos Soliton. Fract.* **142** 110513
- [13] Pals M, Macke J H, Barak O 2024 *PLoS Comput. Biol.* **20** e1011852
- [14] Pérez-Cervera A, Seara T M, Huguet G 2020 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **80** 104992

- [15] Kirst C, Timme M, Battaglia D 2016 *Nat. Commun.* **7** 11061
- [16] Siapas A G, Lubenov E V, Wilson M A 2005 *Neuron* **46** 141
- [17] Guth T A, Brandt A, Reinacher P C, Schulze-Bonhage A, Jacobs J, Kunz L 2025 *Nat. Commun.* **16** 7402
- [18] Frady E P, Sommer F T 2019 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **116** 18050.
- [19] Ding Q, Wu Y, Huang W, Jia Y 2025 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **234** 2789
- [20] Yu D, Wu Y, Ding Q, Li T, Jia Y 2024 *Phys. Rev. E* **109** 054312
- [21] Yang L J, Liu W Q, Yi M, Wang C J, Zhu Q G, Zhan X 2012 *Phys. Rev. E* **86** 016209
- [22] Wu D, Jia Y, Yang L J, Liu Q, Zhan X 2005 *Biophys. Chem.* **115** 37
- [23] Zhao J, Lei Z, Ren G, Ma J 2026 *Chaos Soliton. Fract.* **208** 118183
- [24] Wang B, Guo Y, Ren G, Ma J 2026 *Engineering Inform. Tech. El.* **27** 1
- [25] Sah M P, Kim H, Chua L O 2014 *IEEE Circuits Syst. Mag.* **14** 12
- [26] Kim H, Sah M P, Yang C, Cho S, Chua L O 2012 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **59** 2422
- [27] Li F, Tang H, Zhang Y, Bao B, Hassanin H, Bai L 2025 *Chin. Phys. B* **34** 128701
- [28] Bao H, Wang R, Wang N, Chen M, Bao B 2025 *Neural Netw.* 108340
- [29] Wang N, Lv Y, Bao H, Zhao S, Xu Q 2025 *Chaos Soliton. Fract.* **200** 116939
- [30] Zhao J, Lei Z, Ma J, Ren G 2026 *Chaos Soliton. Fract.* **208** 118281
- [31] Wang C, Zhang Z, Lei Z, Ma J 2025 *Chaos* **35** 113101
- [32] Guo Q, Lei Z, Ren G, Ma J 2025 *Chin. J. Phys.* **97** 653
- [33] Zhu Z, Dong J, Yu Y, Chen Q, Ma J 2025 *Sci. China Technol. Sci.* **68** 1920406
- [34] Xu Y, Jia Y, Ma J, Alsaedi A, Ahmad B 2017 *Chaos Soliton. Fract.* **104** 435
- [35] Babacan Y, Kaçar F, Gürkan K 2016 *Neurocomputing* **203** 86
- [36] Yang F, Ren G, Tang J 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 21917
- [37] Lin H, Wang C, Deng Q, Xu C, Deng Z, Zhou C 2021 *Nonlinear Dyn.* **106** 959
- [38] Lin H, Wang C, Sun Y, Yao W 2020 *Nonlinear Dyn.* **100** 3667
- [39] Guo Y, Xie Y, Ma J 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 21903
- [40] Gong Y C, Ming J Y, Wu S Q, Yi M D, Xie L H, Huang W, Ling H F 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 207302 (in Chinese) [贡以纯, 明建宇, 吴思齐, 仪明东, 解令海, 黄维, 凌海峰 2024 物理学报 **73** 207302]
- [41] Lyu Y M, Min F H 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 130502 (in Chinese) [吕晏旻, 闵富红 2019 物理学报 **68** 130502]

- [42] Usha K, Subha P A 2019 *Chin. Phys. B* **28** 020502
- [43] Njitacke Z T, Fozin T F, Muni S S, Awrejcewicz J, Kengne J 2022 *AEU-Int. J. Electron. Commun.* **155** 154361
- [44] Brand D, Dibenedetto D, Petruccione F 2026 *Phys. Rev. Res.* **8** 013131
- [45] Ma J 2025 *Nonlinear Dyn.* **113** 25365
- [46] Li X, Xu Y 2024 *Chin. J. Phys.* **91** 719
- [47] Sun G, Xu Y, Jin W, Ren G 2023 *Physica A* **625** 129003
- [48] Wang B, Ren G, Ma J, Guo Y 2025 *Chaos Soliton. Fract.* **198** 116630
- [49] [Wang Y, Tiw P J, Liu Y, Tao Y, Zhang T, Yang Y C 2025 Natl. Sci. Rev. **13** nwaf546](#)
- [50] [Lu Z, Zeng F, Ma D, Wan Q, Yu J, Pan F 2024 ACS Appl. Mater. Interfaces **16** 60501](#)
- [51] [Elashkar N E, Khalil A H, Aboudina M, Fahmy H, Ibrahim G H 2025 IEEE Int. Conf. Electron. Circuits Syst. **2025** 17](#)
- [52] Wang S C, Lu Z Z, Liang Y, Wang G Y 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 050502 (in Chinese) [王世场, 卢振洲, 梁燕, 王光义 2022 物理学报 **71** 050502]
- [53] Xie Y, Ye Z, Li X, Wang X, Jia Y 2024 *Cogn. Neurodyn.* **18** 1989
- [54] Guo Y, Ma J, Zhang X, Hu X 2024 *Sci. China Technol. Sci.* **67** 1567
- [55] Lei Z, Ma J 2025 *Chaos* **35** 023101
- [56] Eski I, Erkaya S, Savas S, Yildirim S 2011 *Robot. Comput.-Integr. Manuf.* **27** 115
- [57] Kim Y H, Lewis F L, Dawson D M 2000 *Automatica* **36** 1355
- [58] Sun G, Xu Y 2025 *Commun. Theor. Phys.* **77** 115001
- [59] Zhao J, Lei Z, Ren G, Ma J 2026 *Chaos Soliton. Fract.* **208** 118183
- [60] Huang L, Yu X, Yu X 2026 *Nonlinear Dyn.* **114** 683
- [61] Ma J 2026 *J. Lanzhou Univ. Technol.* **52** 165 (in Chinese) [马军 2026 兰州理工大学学报 **52** 165]

Frequency Locking and Energy Optimization in a Tri-Capacitor Sandwich Circuit

Ying Xu^{1*} Jiangxing Chen²

¹ School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Ji'nan, 250014, China

² School of Physics, Hangzhou Normal University, Hangzhou, 311121 China

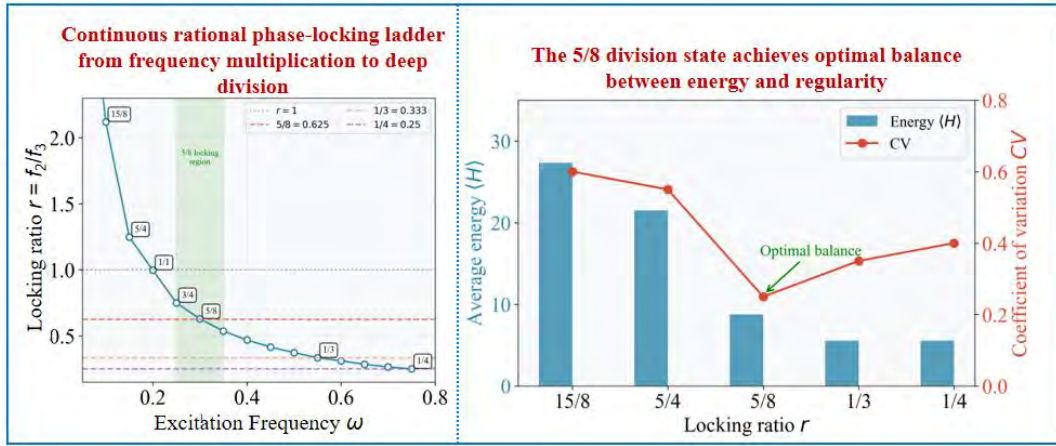
Abstract

The capacitive property of biological neuronal membranes makes capacitors essential for constructing neural circuits. Connecting different nonlinear elements in parallel to simulate the diversity of ion channels has become a key issue in developing functional neuron models. This paper uses nonlinear elements to couple multiple capacitors, mimicking the multilayer membrane structure of biological cells. It investigates the membrane potential dynamics and the decisive role of memory effects in the system's frequency conversion capability. Results show that the dual-nonlinear-resistor configuration cannot generate frequency doubling or division under any parameter settings. The three capacitors always lock to the driving frequency. In contrast, the single-memristor configuration stably outputs subharmonic phase locking over a wide parameter range. The system's average energy increases monotonically with the memristor parameter. When the driving frequency changes, the system presents a continuous rational phase-locking ladder from frequency doubling to deep frequency division. Among these states, the 5/8 division state achieves the best balance between energy efficiency and signal stability. This division state is a global attractor, and the system is insensitive to initial conditions. The interlayer capacitance ratio and the inductance parameter are key factors for maintaining the phase-locked state. This work integrates frequency conversion, energy storage, and multi-port output into a single circuit. It provides theoretical basis and engineering guidance for the functional design of nonlinear circuits.

Keywords: Memristive neural circuits, Phase locking, Frequency conversion, Energy regulation

PACS: 02. 30. Hq, 02. 30. Oz, 05. 45. -a, 05. 40. Ca

Graphical Abstract



* This project is supported by the Key R&D Program of Shandong Province, China (Grant No. 2025CXPT087) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12402061).

† Corresponding author. E-mail: uryysunshine@163.com

录用稿件，非最终出版稿