

一种具有记忆调制机制的离散忆阻器及其在混沌映射发散抑制中的应用研究*

张梓健¹⁾ 贺少波^{1)†} 吴先明²⁾

1) (湘潭大学, 自动化与电子信息学院, 电子信息系, 湘潭·湖南 411105)

2) (贵州师范大学, 机械与电气工程学院, 电气工程系, 贵阳·贵州 550025)

针对传统离散忆阻器在非零均值信号激励下因无限累积效应导致状态发散的问题, 本文提出了一种具有记忆调制机制的有限记忆离散忆阻器 (Finite Memory Discrete Memristor, FM-DM)。该模型在状态差分方程中引入受控遗忘因子, 将全量累加转变为漏积分形式, 从而建立起内禀的能量耗散与平衡机制, 确保系统在任意激励下状态的有界收敛。基于FM-DM, 以系统状态变量为驱动源, 构建了自反馈、参数调制和附加耦合三种离散忆阻混沌演化架构。动力学分析表明, FM-DM的引入提升了系统的拓扑维度, 在有效避免发散的同时诱发出更加复杂的动力学行为。最后, 采用双级采样保持技术设计了相应的离散忆阻与离散忆阻混沌迭代模拟电路, PSIM仿真结果与数值计算一致, 验证了该模型抑制状态发散的物理可行性与鲁棒性。本研究显著增强了离散忆阻模型在不同应用场景下的适用性, 并为进一步的离散忆阻混沌映射设计提供了新的思路。

关键词: 混沌, 离散忆阻, 记忆调制, 动力学, 模拟电路

PACS: 05.45.Pq, 05.45.Gg, 84.30.Bv, 05.45.-a

† 通信作者. E-mail: heshabo-123@163.com (通信作者)

第一作者. E-mail: 202305571628@smail.xtu.edu.cn (第一作者)

* 国家自然科学基金 (批准号: 62501516, 62071496, 62061008)、湖南省自然科学基金(批准号: 2025JJ50391).

1 引言

忆阻器作为联系磁通与电荷的第四种基本电路元件，由蔡少棠教授于1971年首次从理论层面作出预言^[1]。2008年，惠普实验室成功制备出基于TiO₂的纳米忆阻器实物，从而证实了其物理存在性^[2]。忆阻器因具备非易失性记忆、纳米级尺度以及丰富的非线性特征（如滞回曲线）^[3]，在非冯·诺依曼计算架构、类脑神经形态工程和非线性电路设计等领域受到广泛关注^[4]。伴随数字信号处理技术的进步，将忆阻器引入离散时间动力系统已成为新的研究热点^[5]。相较于连续时间系统，离散忆阻混沌系统具有更高的计算效率，且更适用于在数字信号处理器和现场可编程门阵列等数字硬件上实现^[6]以及Simulink建模^[7]。因此，构建离散忆阻混沌映射及其在图像加密、伪随机数生成及保密通信等方面呈现出广阔的应用前景^[8-10]。

当前，研究人员围绕离散忆阻非线性映射的多样化设计范式展开了大量研究，进一步拓展了其动力学复杂度与应用潜能。将离散忆阻与经典混沌映射组合，设计新型混沌映射，比如离散忆阻Sinh映射^[11]、离散忆阻Lozi映射^[12]、离散忆阻Logistic映射^[13,14]、离散忆阻Hénon映射^[15]等，这些系统具有较原系统更复杂的动力学特性。借助自反馈机制构建离散忆阻映射，能够显著拓宽系统的混沌区间并提高复杂度指标^[16]。同时，引入并行、级联及耦合等架构，可构建三维及更高维的超混沌映射模型^[17,18]。与此同时，受生物神经系统中突触可塑性与信息传递机制的启发，将离散忆阻器作为人工突触引入神经元网络成为新的研究焦点。研究人员利用离散忆阻器模拟神经突触的双向耦合作用，构建了离散忆阻Rulkov神经元^[19]、离散忆阻Chialvo神经元^[20]、离散忆阻Hodgkin-Huxley神经元^[21]等多种离散神经元模型与网络，揭示了其中丰富的共存放电、同步转迁及吸引子共存等复杂动力学现象。此外，分数阶差分算子的引入为离散忆阻神经网络建模开辟了新途径^[22]。分数阶离散忆阻器兼具长时记忆特性与突触可塑性，不仅能更精确地刻画生物神经系统的遗传与记忆特性，还能在分数阶忆阻Hopfield神经网络中诱导出超混沌及极端多稳态等复杂现象，且系统在较低分数阶数时即可呈现更强的混沌行为^[23]。更值得关注的是，近年来基于离散忆阻器构建学习型神经网络的研究也取得了显著成果。比如，通过将离散忆阻器作为可调权重单元嵌入反向传播神经网络，实现了手写数字分类任务，准确率达97.16%，并揭示了离散忆阻器在分类性能方面的优势^[24]。同时，基于离散忆阻突触驱动的脉冲神经网络模型相继被提出^[25]，研究了神经元的放电机制、脉冲时间依赖可塑性以及模式识别能力，展现出离散忆阻神经网络在神经形态计算与人工智能领域的巨大应用前景。同时，离散忆阻的物理可实现性是推动其迈向工程应用的关键。近年来，学者们已完成多种离散忆阻映射与神经系统的电路设计，例如基于微控制器（MCU）^[26]、现场可编程门阵列（FPGA）^[6]以及模拟集成电路^[27]等多种硬件平台。其中，模拟电路实现所面临的核心问题在于如何运用连续时间物理

器件精准复现离散迭代过程中的状态跳变与暂存^[28]。针对该问题，基于开关电容和采样保持器的离散时间模拟电路被提出^[29]；此外，采用LF398等精密采样保持芯片构建双级级联时序控制单元，通过交替的“跟踪 - 保持”操作在连续电压域中分离出严格的离散时间窗口，成功模拟了离散忆阻系统的差分迭代行为^[30]。可见，离散忆阻相关研究已经引起了国内外学者的广泛关注。

然而，在将离散忆阻器融入混沌映射的过程中，状态发散或直流漂移问题长期以来对该领域的发展形成了制约，在设计相关混沌映射时经常面临失败的结果。标准的理想离散忆阻器从本质上来说是一个无界累加器，其内部状态由历史信号的无限求和所决定。当该忆阻器与均值非零的离散动力系统相耦合时，输入信号中的直流分量会被持续累积。这种因模型对历史信息具有无限记忆特性而产生的物理缺陷，会导致忆阻器内部状态随迭代出现单向漂移，最终引发数值溢出以及混沌吸引子消失的现象。针对这一问题，作者及其团队提出了两种解决策略：其一为硬截断策略^[15]，例如基于窗函数的短时记忆法，通过人为设定状态边界并强制复位，然而所引入的非光滑边界条件会破坏系统的物理连续性，并产生新的误差；其二为差分输入策略^[27]，通过对输入信号进行差分处理以滤除直流分量，但这在本质上切断了忆阻器与原始信号低频成分的耦合，降低了模型处理通用信号的能力。本文认为，突破上述发散困境的根本路径，并非对输入信号或状态边界施加外部强制约束，而是从忆阻器内部记忆机制层面展开重构。

受生物神经系统中突触遗忘机制启示^[31,32]，本研究提出一种具备记忆调制机制的有限记忆离散忆阻器模型。该模型于状态差分方程中嵌入受控遗忘因子，将传统离散忆阻器的无限全量累加转变为带有指数衰减的漏积分过程。此内禀的记忆衰减机制使系统在每次迭代时，既能有效保留对近期历史信息的记忆，又能持续耗散累积的直流分量与较远数据记忆效应，进而在数学层面严格确保了非零均值激励下内部状态的有界收敛。同时，遗忘因子的连续可调特性使该模型在“理想记忆”与“完全遗忘”之间达成了平滑过渡，为忆阻混沌系统的动力学调控提供了新的自由度。上述设计在保留忆阻器非线性记忆本质与频率指纹特征的基础上，从根本上消除了状态发散这一长期制约离散忆阻系统发展的稳定性瓶颈。具体工作如下：

- 1) 提出有限记忆离散忆阻器模型（Finite Memory Discrete Memristor, FM - DM）：通过在状态演化方程中引入受控遗忘因子，将传统离散忆阻器的全量累积模式转变为漏积分模式，建立内禀的能量耗散与平衡机制。从数学层面保证了在任意非零均值激励条件下内部状态的有界收敛，从根源上解决了离散忆阻系统的状态发散问题。
- 2) 构建三种混沌演化架构并揭示复杂动力学行为：基于FM - DM模型，系统地构建了纯忆阻自反馈、

参数调制和附加耦合这三类离散混沌映射架构。动力学分析显示，记忆调制机制的引入不仅消除了原混沌映射的大范围周期窗口，还诱发了高维混沌行为，提高系统的复杂度和伪随机性。

- 3) 模拟电路物理验证：设计了基于双级采样保持技术的离散迭代模拟电路，在连续时间物理域中成功实现了FM - DM混沌系统的硬件映射。电路仿真结果以高保真度复现了理论数值计算的相空间分形结构，所有状态变量均被严格限定在器件线性工作区内，未出现任何饱和失真现象，从硬件底层验证了该模型抑制状态发散的物理有效性与鲁棒性。

本文后续内容安排如下：第二节剖析离散忆阻系统状态发散的数学机理，提出有限记忆离散忆阻器模型，并论证其在非零均值激励条件下的有界收敛性；第三节基于FM - DM，依次构建纯忆阻自反馈、参数调制及附加耦合三种混沌演化架构，给出相图并分析系统的稳定性；第四节系统分析设计的离散忆阻混沌映射的复杂动力学行为，并进行比较研究；第五节设计基于双级采样保持技术的模拟电路，从物理实现层面验证该模型对状态发散的抑制能力和硬件鲁棒性；第六节给出全文结论。

2 离散忆阻混沌映射的发散问题

2.1 发散现象及其现有解决方案

基于差分理论，通用的离散忆阻器数学模型可描述为

$$\begin{cases} i_n = W(q_n)v_n \\ q_{n+1} = q_n + k \cdot v_n \end{cases}, \quad (1)$$

其中， v_n 与 i_n 分别为第 n 次迭代时的端电压与电流， $W(q_n)$ 为忆导函数， q_n 为内部状态变量， k 为采样步长系数。对式 (1) 中的状态演化方程进行迭代求和，可得其显式表达如下

$$q_n = q_0 + k \sum_{j=0}^{n-1} v_j. \quad (2)$$

由该式可知，离散忆阻器的内部状态 q_n 本质上是输入信号 v_n 的历史累积。若要保证系统状态 q_n 有界，输入序列 v_n 必须满足严格的零均值条件。当输入信号始终为正时或者均值大于零时，离散忆阻内部状态会随着迭代的进行不断增加，最终处于发散状态。因此，在构建忆阻混沌映射时，需要避免因忆阻内部变量易出现发散行为而最终导致的系统发散现象。

文献^[15,27]讨论了一种离散Hénon忆阻映射，其方程为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + W(q_n)y_n \\ y_{n+1} = bx_n \\ q_{n+1} = q_n + ky_{n+1} \end{cases}, \quad (3)$$

其中， $W(q) = \eta - \varepsilon q$ 表示忆阻器模型取自于惠普忆阻器，或者其他的关于 q 的函数。可见，该系统将Hénon映射产生的混沌变量 x_n 直接作为输入信号施加于忆阻器。图 1 展示了在此非零均值信号激励下，传统离散忆阻器内部状态 q_n 的演化轨迹。仿真结果表明， q_n 呈现出单调的线性漂移趋势。随着迭代次数 n 的增加，这种累积效应导致状态变量迅速偏离初始值，并最终溢出计算机数值表示范围。这一现象证实，传统的直接累加模型缺乏对非零均值信号的内禀适应能力，是导致系统最终发散的根源。

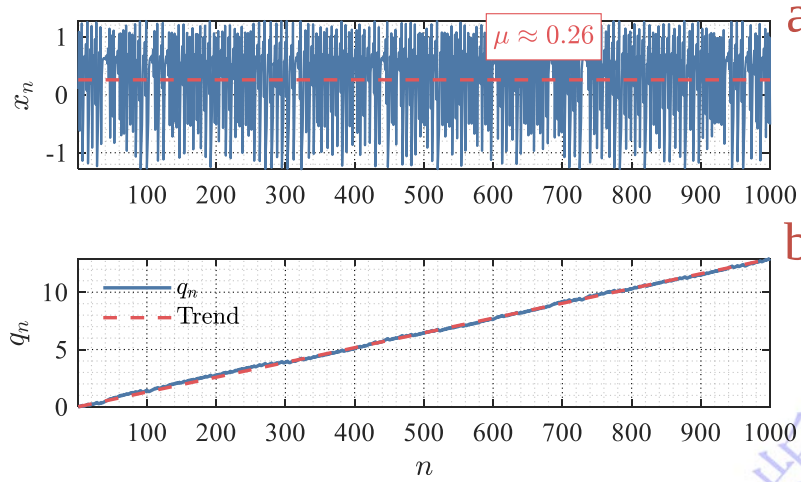


图 1: 传统离散忆阻器的状态发散验证 (a)Hénon输入序列 (b)内部状态的线性漂移

Fig. 1. Verification of state divergence in the traditional discrete memristor (a) Hénon input sequence (b) Linear drift of the internal state

面对上述发散困境，现有的研究主要提出了两类解决方案。第一种方案为Peng等^[15]提出的“短时记忆”策略，即在算法中强制设定固定的记忆长度，直接丢弃久远的历史数据。比如针对上述的离散忆阻Hénon混沌映射，设计的模型为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + W(q_n)y_n \\ y_{n+1} = bx_n \\ q_{n+1} = q_n + k(y_{n+1} - y_{n-100}) \end{cases}. \quad (4)$$

第二方案为Fu等^[27]提出的“状态变量差分”策略，即将输入信号的差分量作为忆阻器的激励源，试图消

除直流分量。此时，系统的模型为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + W(q_n) \cdot (y_{n+1} - y_n) \\ y_{n+1} = bx_n \\ q_{n+1} = q_n + k(y_{n+1} - y_n) \end{cases} \quad (5)$$

实际上，从信号处理的角度审视，上述两种方法在本质上是同源的。“差分”操作实际上可被视为一种极限情况下的“短时记忆”。这两种策略的共同核心在于采用了“硬截断”机制，即通过强制切断历史信息的累积链路来规避无限增长。

2.2 具有记忆调制能力的离散忆阻器

既然“截断”已被证明有效，那么除了这种硬性操作外，是否存在一种更符合物理弛豫规律的机制？这正是本文提出“记忆调制”方法的逻辑起点，即通过引入调制因子将对历史信息的“完全遗忘”转化为“渐进衰减”，从而在保证稳定性的同时保留系统的连续演化特征。

通过在状态演化方程中植入遗忘因子 α ，构建有限记忆离散忆阻器模型如下

$$\begin{cases} i_n = W(\beta, q_n) \cdot v_n \\ q_{n+1} = \alpha q_n + k v_n \end{cases}, \quad (6)$$

其中， q_n 为内部状态变量， $W(\beta, q_n)$ 为忆导函数， α 为记忆调制参数，取值范围为 $0 < \alpha < 1$ ， k 与 β 为增益系数。与传统模型相比，该方程的物理含义为：系统在累积当前时刻输入 v_n 的同时，对上一时刻的历史记忆 q_n 进行比例为 α 的耗散。

为证明该模型在非零均值输入下的稳定性，我们对新离散忆阻器第6式两端取数学期望。假设输入信号 v_n 包含一个恒定的直流分量即 $E_{v_n} = \mu$ 。当系统经过长时间演化达到稳态时，内部状态 q_n 的统计均值将趋于一个理论平衡点 q^* 。此时，状态的“累积量”与“耗散量”达到动态平衡，满足下式

$$q^* = \alpha q^* + k \cdot \mu. \quad (7)$$

通过代数变换，可解得该平衡点如下式

$$q^* = \frac{k\mu}{1 - \alpha}. \quad (8)$$

该式简洁而深刻地揭示了模型的稳定性机理。只要保证遗忘因子 $\alpha < 1$ ，无论输入信号的直流偏置 μ 如何变化，忆阻器的内部状态 q_n 始终被限制在以 q^* 为中心的有界区域内。该机制使得忆阻器能够自适应地平衡输入信号的直流漂移，实现了内禀的稳定性。

为验证模型是否符合忆阻器基本定义并展示记忆调制机制对器件非线性行为的影响，基于平方非线性设计如下忆阻器：

$$\begin{cases} i_n = \beta(q_n^2 - 1)v_n \\ q_{n+1} = \alpha q_n + kv_n \end{cases}, \quad (9)$$

其中， q_n 为内部状态变量， $\beta(q_n^2 - 1)$ 为忆导函数， α 为记忆调制参数，取值范围为 $0 < \alpha < 1$ ， k 为增益系数。对该模型进行了电压-电流特性仿真分析，结果如图 2 所示。如图2(a)所示，在固定遗忘因子 $\alpha = 0.95$ 时，模型在不同频率正弦电压激励下的V-I曲线均呈现出通过原点的“8”字形捏滞回线特征，证实了该离散模型具备典型的忆阻非线性。同时，随着激励频率 ω 从0.02增加至0.2，滞回环的波瓣面积逐渐减小；当频率趋于无穷大时，滞回环将退化为单值线性电阻，这与忆阻器的“频率指纹”特征完全吻合。图2(b)则重点揭示了本文提出的记忆调制参数 α 的物理作用。在固定频率 $\omega = 0.05$ 的条件下，对比了传统离散忆阻器（ $\alpha = 1$ ）与FM-DM模型（ $\alpha = 0.9, \alpha = 0.7$ ）的特性差异。可以看出，当 $\alpha = 1$ 时，模型退化为传统的理想累加器，其滞回环呈现出饱满的积分特性，意味着对历史电荷的“完全记忆”。而随着 α 的减小，滞回环发生了明显的形变与倾斜，这种几何形态的变化在物理上对应于“漏积分”效应的增强。需要指出的是，此时虽然 $\alpha = 1$ ，但是没有发散，其原因在于输入的正弦信号完全关于零对称，恰巧避免了发散问题。正是这种遗忘机制，在保留忆阻器非线性记忆的同时，为系统引入了必要的耗散通道，从而在根源上抑制了直流分量的无限累积。

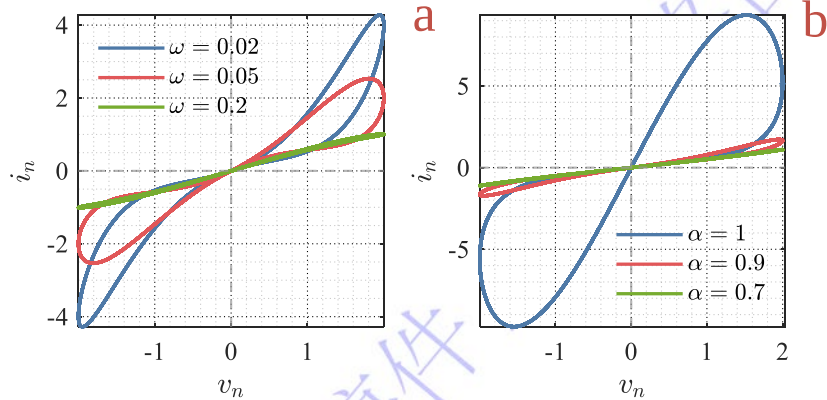


图 2: FM-DM 模型的伏安特性曲线 (a) 频率依赖特性 (b) 记忆调制参数 α 的影响

Fig. 2. V-I characteristics for the FM-DM model. (a) Frequency-dependent pinched hysteresis loops. (b) Influence of the memory modulation parameter α .

为了验证上述理论，我们重新设计离散忆阻 Hénon映射，其方程为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + \beta \cdot (q_n^2 - 1)y_n \\ y_{n+1} = bx_n \\ q_{n+1} = \alpha q_n + ky_n \end{cases} \quad (10)$$

可见，虽然只有变量 y_n 作为输入施加于FM-DM模型（ $\alpha = 0.98$ ），但是如图3所示，改进后的模型状态 q_n 不再发散，而是迅速收敛并稳定在理论计算值 q^* 附近（红色虚线所示），这与预计的效果完全一致。可见，引入记忆调制因子后，能够有效抑制离散忆阻混沌映射的发散行为。

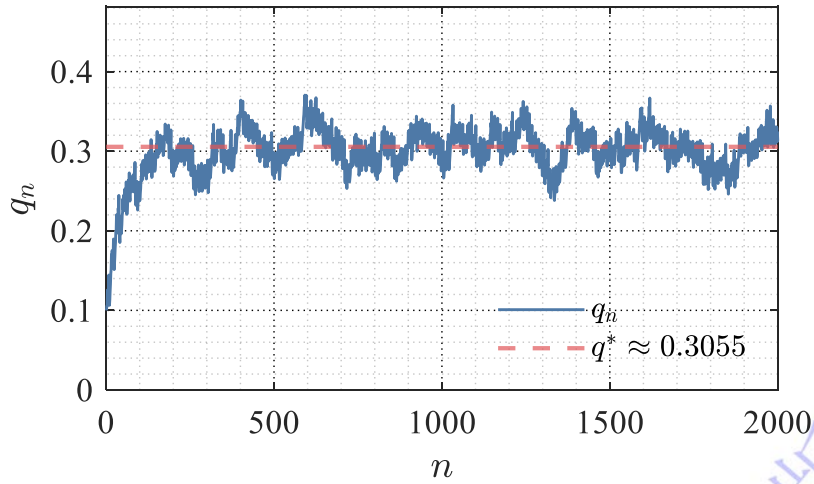


图 3: FM-DM模型在Hénon映射激励下的稳定性验证.

Fig. 3 Verification of stability for the FM-DM model under Hénon map excitation

3 基于记忆调制离散忆阻器的混沌映射设计

离散忆阻器在非线性动力系统中的应用长期受制于状态发散缺陷。本章基于前述有限记忆离散忆阻器模型，构建三种演化拓扑架构。首先，剥离外部经典映射，建立纯忆阻自反馈模型，验证FM-DM独立驱动复杂动力学行为的内禀特性。其次，以经典Hénon映射为基础，分别提出参数调制与附加耦合架构，考察FM-DM在提升系统维度与抑制周期窗口中的动力学效应。

3.1 忆阻自反馈混沌映射

3.1.1 模型构建

传统的离散时间动力学系统依赖预设的多项式或分段函数作为演化骨架。为测试FM-DM独立生成奇异吸引子的能力，本节构建一种无外部非线性核的纯忆阻自反馈架构。该闭环系统的状态演化方程定义为

$$\begin{cases} x_{n+1} = \beta(q_n^2 - 1)x_n \\ q_{n+1} = \alpha q_n + kx_n \end{cases}, \quad (11)$$

式中， x_n 为系统主状态变量， q_n 为忆阻器内部记忆状态；控制增益 k 决定输入信号的强度， $\alpha \in (0, 1)$ 表征受控遗忘因子的大小； β 分别表示对输入对记忆的更新权重或者忆阻输出信号的幅值。该闭环反馈系统的原理框图如图4所示。

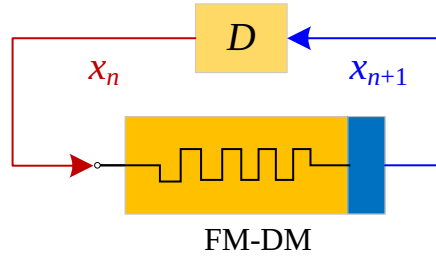


图 4: 忆阻自反馈系统原理框图

Fig.4. Schematic diagram of the memristive self-feedback system

3.1.2 固定点与稳定性分析

令系统左右两侧相等，可求解得出系统存在三个平衡点，分别为原点 $(0, 0)$ 以及两个非零平衡点 $\left(\pm \frac{1-\alpha}{k} \sqrt{1 + \frac{1}{\beta}}, \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\beta}}\right)$ 。当 $\beta > 1$ 时（例如 $\beta = 1.68$ ， $\alpha = 0.8$ ），开展如下分析。在原点处，其线性化矩阵的特征值为 $-\beta$ 和 α 。鉴于 $|\alpha| < 1$ 且 $|\beta| > 1$ ，则原点为不稳定的鞍点。在非零平衡点处，线性化矩阵的特征多项式为：

$$\lambda^2 - (1 + \alpha)\lambda + \alpha - 2(\beta + 1)(1 - \alpha) = 0. \quad (12)$$

当 $\beta > 1$ ， $\alpha \in (0, 1)$ 时，常数项 $\alpha - 2(\beta + 1)(1 - \alpha) < 0$ ，故而特征值一正一负，且正特征值大于1，负特征值绝对值小于1，因此非零平衡点同样为不稳定的鞍点。综上所述，对于 $\beta = 1.68$ ， $\alpha = 0.8$ 以及任意 $k > 0$ ，所有平衡点均不稳定。

3.1.3 相图

这里提取忆阻自反馈映射在不同控制增益 k 激励下，演化至稳态后的相平面轨线。在由主状态 x_n 与忆阻内部记忆状态 q_n 构成的二维相空间中，纯忆阻自反馈架构生成了边界清晰的奇异吸引子。如图 5 所示，随着控制增益 k 递增（图中分别取 $k = 1.68$ 、 1.76 、 1.72 、 1.82 ），吸引子呈现出高度不对称的折叠与拉伸流形，其相体积与拓扑形态发生了显著演变，直观体现了系统在非线演化过程中穿插的混沌激变以及密集的局部轨道交织。尤为值得注意的是，无论系统演化出何种复杂的混沌形态，相空间内的所有轨迹均被严格钳制在特定的几何边界内，并未出现传统理想离散忆阻器常见的单向漂移、数值溢出或发散断裂现象。这一现象提供了直观的几何证据，证实了FM-DM的漏积分机制在局部区域成功切断了历史状态的单向累加路径；当主状态幅值激增使得内部记忆逼近发散临界点时，受控遗忘因子 α 配合平方非线性项迅速转化为自适应的耗散拉回力，迫使轨道折返。这从代数拓扑底层验证了漏积分调制机制在全局非线性演化中的绝对收敛性与物理鲁棒性。

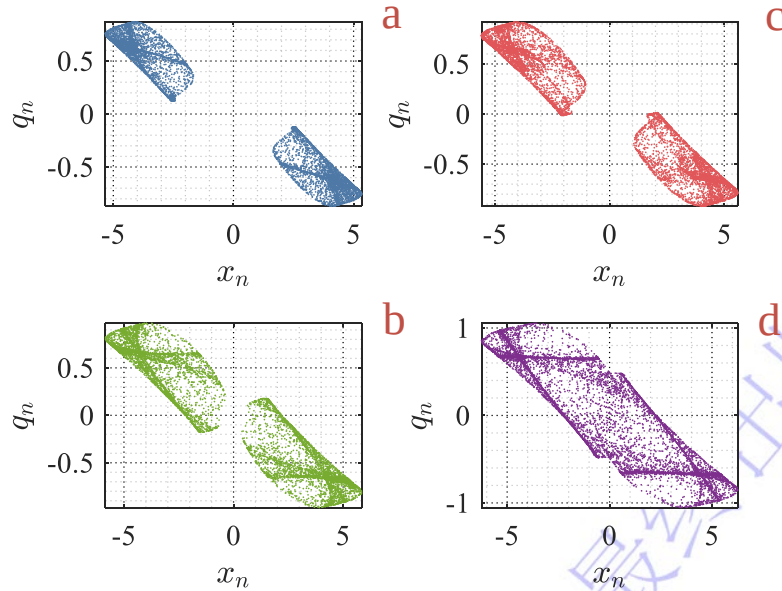


图 5: 忆阻自反馈映射在不同参数 k 下的稳态相图 (a) $k=1.68$; (b) $k=1.76$; (c) $k=1.72$; (d) $k=1.82$

Fig. 5. Steady-state phase portraits of the memristive self-feedback map under different parameters k (a) $k=1.68$; (b) $k=1.76$; (c) $k=1.72$; (d) $k=1.82$

在 x_n 与 q_n 构成的二维相空间内，纯忆阻自反馈架构生成了边界清晰的奇异吸引子。吸引子呈现高度不对称的折叠与拉伸流形，其轨迹被严格限制在有限区间内。这种几何界限的形成受控于FM-DM的漏积分机制。遗忘因子 α 的引入在局部区域切断了历史状态的单向累加路径；当主状态幅值激增导致内部记忆逼近发散临界点时，平方非线性项迅速转化为自适应的耗散拉回力，迫使轨道折返至原点附近的平衡区。

该自约束机制从代数拓扑底层消除了传统理想离散忆阻器内部状态变量面临的数值溢出问题。

3.2 参数调制离散忆阻混沌映射

3.2.1 模型构建

经典二维离散混沌映射的恒定参数设定使其相空间内必然存在离散的稳定周期窗口。将有限记忆离散忆阻器的内部记忆状态提取为时变信号，直接前馈至系统的主导非线性核，可构建自适应参数调制映射。根据驱动源的拓扑节点选择，建立基于 x_n 输入的离散忆阻混沌映射方程为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a(1 + \beta(q_n^2 - 1)x_n)x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \\ q_{n+1} = \alpha q_n + kx_n \end{cases} \quad (13)$$

基于 y_n 输入的离散忆阻混沌映射方程为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a(1 + \beta(q_n^2 - 1)y_n)x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \\ q_{n+1} = \alpha q_n + ky_n \end{cases} \quad (14)$$

方程中， a 与 b 为Hénon映射的参数， $\alpha \in (0, 1)$ 为控制记忆衰减的遗忘因子， β 定义输入状态对内部记忆的累积权重。耦合强度 k 缩放由忆阻器历史状态 $q_n^2 - 1$ 产生的非线性微扰分量。上述两类调制机制的物理拓扑路径具有高度同构性，二者原理框图如图 6所示。

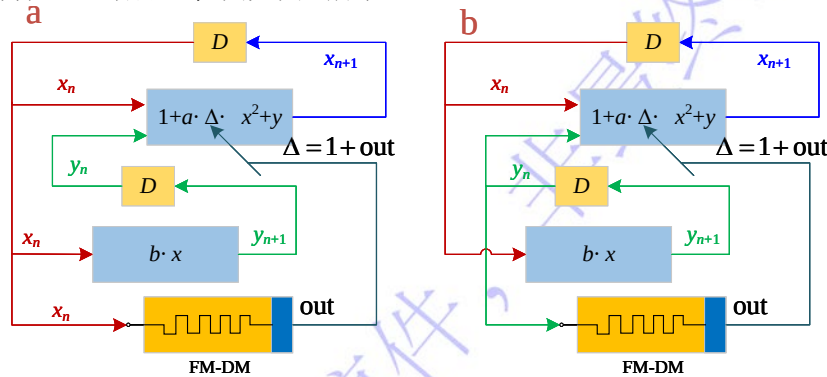


图 6: 参数调制系统原理框图 (a) 基于 x_n 调制的架构 (b) 基于 y_n 调制的架构

Fig. 6. Schematic diagram of the parameter modulation system (a) Architecture based on x_n modulation (b) Architecture based on y_n modulation

在演化链路中，主干回路由乘法器与离散延迟模块（D）串联构成。系统当前状态变量作为激励信号被同步馈入下方的FM-DM模块。该模块执行漏积分运算更新记忆状态 q_n ，其输出与原激励变量相乘，生成具有历史依赖性的动态修正项 Δ 。原本控制非线性抛物线曲率的静态常数 a 被重构为时变参数 $1 - a\Delta$ 。这种基于硬件底层变量的代数代换，使系统的瞬态雅可比矩阵在每一次迭代中自发波动，从根源上破坏了轨道闭合成为周期解的数学条件。

3.2.2 固定点与稳定性分析

令系统左右两侧相等，可求解得出系统平衡点 (x^*, y^*, q^*) 满足 $y^* = bx^*$ 与 $q^* = \frac{\beta}{1-\alpha}x^*$ ，且 x^* 为如下一元五次方程的实数根：

$$ak \left(\frac{\beta}{1-\alpha} \right)^2 (x^*)^5 - ak(x^*)^3 + a(x^*)^2 + (1-b)x^* - 1 = 0. \quad (15)$$

在平衡点处，线性化矩阵的特征多项式为：

$$\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0, \quad (16)$$

其中，各项系数分别为：

$$\begin{cases} c_2 = 2ax^* + 3ak((q^*)^2 - 1)(x^*)^2 - \alpha \\ c_1 = -\alpha(2ax^* + 3ak((q^*)^2 - 1)(x^*)^2) + 2ak\beta(x^*)^3q^* - b \\ c_0 = b\alpha \end{cases} \quad (17)$$

当 $a = 1.4$, $b = 0.3$, $\alpha = 0.98$, $\beta = 0.058$, $k = 0.1$ 时，开展如下分析。求解上述五次方程可得系统存在唯一实数平衡点，其坐标约为 $(0.606, 0.182, 1.757)$ 。代入该坐标，线性化矩阵的特征多项式化简为：

$$\lambda^3 + 1.038\lambda^2 - 2.271\lambda + 0.294 = 0. \quad (18)$$

求解该方程可得其特征值中存在一负实根 $\lambda \approx -2.15$ ，且负特征值绝对值大于1，因此该平衡点为不稳定的鞍点。综上所述，对于给定参数，系统的所有平衡点均不稳定。

3.2.3 相图

针对基于 y_n 调制的系统进行数值解算，图 7 提取了系统演化至稳态后的相平面轨线。在 x_n 与 q_n 以及 x_n 与 y_n 两个正交二维投影面上，原Hénon映射单一的抛物线结构发生破裂，并沿 q_n 轴正交延展，重构具有密集嵌套特征的三维折叠流形。相空间内的所有轨迹均被严格限制在特定的几何边界内。这种有

限体积的维系直接来源于FM-DM内部的耗散机制，遗忘因子的引入使得历史电荷的累积过程伴随确定的比例衰减，截断了非零均值信号下的单向漂移路径。系统在展现高维复杂轨道交织的同时，未出现数值溢出或发散断裂现象。

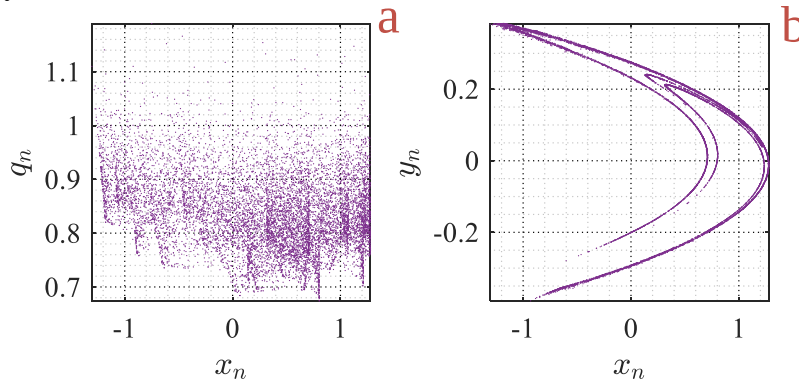


图 7: 基于 y_n 参数调制离散忆阻映射的稳态相图. (a) $x_n - q_n$ 平面; (b) $x_n - y_n$ 平面

Fig. 7. Steady-state phase portraits of the parameter-modulated discrete memristive map on y_n varying.

(a) $x_n - q_n$ plane; (b) $x_n - y_n$ plane

改变调制耦合节点，考察基于主状态变量 x_n 调制的系统。由于 x_n 与 y_n 在系统差分演化中具有高度的同构性，只存在一个迭代时刻的时延以及一个比例系数的区别，其宏观动力学特性与 y_n 调制的系统基本一致，同样能够诱发稳定的三维超混沌行为与相似的相空间拓扑流形。两者的区别仅在于，将 x_n 直接作为忆阻微扰源会引发更剧烈的非线性正反馈，导致混沌激变发生的临界阈值明显降低，且最大李雅普诺夫指数的绝对数值整体高于 y_n 调制系统。相空间相体积的剧烈扩张与收缩交替进行，证实了基于 x_n 的调制架构对参数波动的敏感度更高，能够在极小耦合域内输出熵值更高的伪随机序列。鉴于两者动力学本质相同，此处不再对 x_n 调制系统进行重复的图表展示。

3.3 附加耦合离散忆阻混沌映射

3.3.1 模型构建

除重构系统内禀参数外，将外部状态反馈作为独立加性项注入主干演化路径，是提升离散系统维度与复杂度的直接途径。基于有限记忆离散忆阻器，并引入加性非线性微扰，来建立附加耦合映射模型。根据激励源节点的选取差异，分别构造基于 x_n 与基于 y_n 耦合的两类系统演化方程。当忆阻器输入信号为 x_n 时，

系统方程为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n + \beta(q_n^2 - 1)x_n \\ y_{n+1} = bx_n \\ q_{n+1} = \alpha q_n + kx_n \end{cases} \quad (19)$$

当忆阻器输入信号为 y_n 时，系统方程为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n + \beta(q_n^2 - 1)y_n \\ y_{n+1} = bx_n \\ q_{n+1} = \alpha q_n + ky_n \end{cases} \quad (20)$$

在这两类演化架构中， a 与 b 为基础Hénon映射的静态骨架参数， α 控制内部记忆的漏积分衰减率， β 为激励输入的累积增益。参数 k 决定忆阻非线性输出叠加至主状态的耦合强度。加性项的直接注入改变了原系统状态方程的代数结构，迫使系统的瞬态雅可比矩阵元素发生非对角方向的拓展，进而改变了相空间体积的收缩率分布。

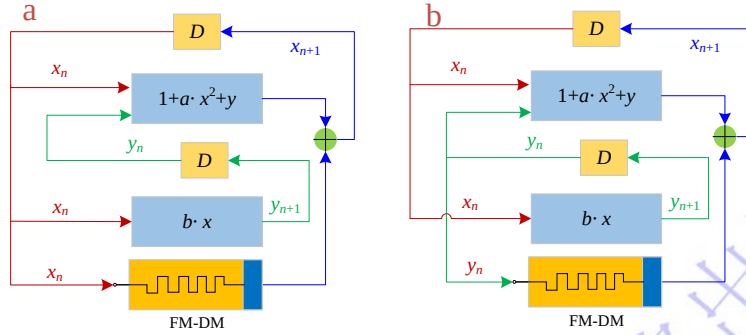


图 8: 附加耦合系统原理框图 (a) 基于 x_n 的耦合架构 (b) 基于 y_n 的耦合架构

Fig. 8. Schematic diagram of the additive coupling system (a) Architecture based on x_n (b) Architecture based on y_n

上述两类附加耦合机制的物理拓扑原理如图 8 所示。系统主回路由离散延迟模块与多项式核构成二维基础映射骨架。FM-DM模块在旁路形成独立的并联反馈支路，采集当前状态 x_n 作为驱动源并更新内部记忆 q_n 。其输出携带历史演化信息，经增益 k 缩放后，通过加法器直接汇入下一时刻的主状态迭代中。这种拓扑设计保留了原非线性核的完整性，利用独立的加性驱动在相空间引入正交方向的拉伸力。FM-DM内禀的受控遗忘机制确保了反馈信号的绝对幅值受到严格界定，截断了加性项在闭环迭代中可能引发的能量无限激增。

3.3.2 固定点与稳定性分析

令系统左右两侧相等，可求解系统的平衡点 (x^*, y^*, q^*) 。平衡点坐标满足：

$$\begin{cases} y^* = bx^* \\ q^* = \frac{\beta}{1-\alpha}x^* \end{cases}, \quad (21)$$

且 x^* 为如下多项式方程的实数根：

$$a(x^*)^2 + (b + k(1 - (q^*)^2) - 1)x^* + 1 = 0. \quad (22)$$

在任意平衡点处，系统的线性化雅可比矩阵为：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2ax^* + k((q^*)^2 - 1) & 1 & 2kq^*x^* \\ b & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad (23)$$

对应的特征多项式为 $\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$ ，其中各项系数分别为：

$$\begin{cases} c_2 = 2ax^* - k((q^*)^2 - 1) - \alpha \\ c_1 = -\alpha(2ax^* - k((q^*)^2 - 1)) - 2k\beta q^*x^* - b \\ c_0 = b\alpha \end{cases}. \quad (24)$$

代入设定的参数 $a = 1.4$ 、 $b = 0.3$ 、 $\alpha = 0.98$ 、 $\beta = 0.058$ 与 $k = 0.1$ 进行数值求解，系统存在唯一的实数平衡点。将该平衡点坐标代入雅可比矩阵并计算其特征值，结果显示特征值中存在模大于1的根，因此该平衡点为不稳定的。

3.3.3 相图

针对基于 x_n 耦合的系统进行解算，获取相图如图9所示。在 $x_n - q_n$ 、 $x_n - y_n$ 的二维正交投影面上，吸引子继承了基础抛物线流形，但在加性微扰的持续作用下发生显著的相体积膨胀，呈现出密集的多层分形嵌套结构。内部状态 q_n 的演化轨迹被完全约束在特定数值区间，证实了漏积分机制对非零均值激励发散的物理钳制。

4 复杂度动力学特性分析

采用分岔图、Lyapunov指数谱以及复杂度算法分析系统随参数变化的复杂动力学行为，其中复杂度采用了样本熵(SampEn)算法以及 C_0 复杂度算法。

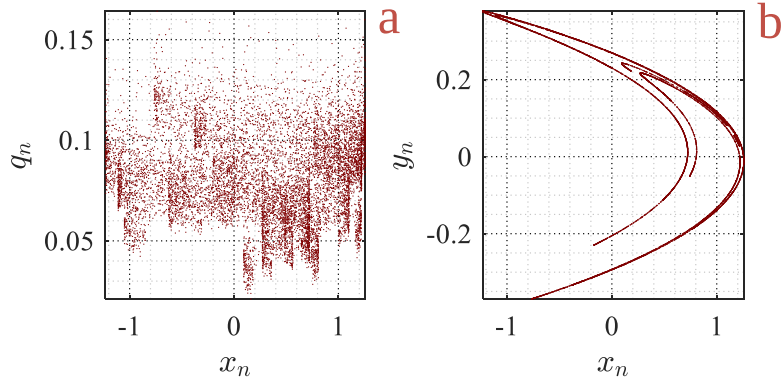


图 9: 附加耦合离散忆阻映射的相图 (a) $x_n - q_n$ 平面 (b) $x_n - y_n$ 平面

Fig. 9. Phase portraits of the additive coupling discrete memristive map (a) $x_n - q_n$ plane; (b) $x_n - y_n$ plane.

4.1 分岔图与Lyapunov指数谱

4.1.1 随参数 α 变化动力学特性

图 10 展示了三种系统在记忆调制因子 α 于 0.1 至 1.0 区间内连续变化时, 状态变量 x_n 的分岔路径及对应的 Lyapunov 指数谱。参数设置如下: 自反馈系统中 $k = 0.1$, $\beta = 1.68$; 参数调制映射与附加耦合映射中 $k = 0.1$, $\beta = 0.058$ 。由图 10(a) 可知, 随着 α 增大, 自反馈模型呈现出混沌与周期交替的丰富动力学行为, 表明 α 是该系统的分岔参数。而图 10(b,c) 显示, 对于参数调制映射和附加耦合映射, α 基本不改变系统的动力学状态, 但当其接近 1 时, 系统出现发散行为。上述结果说明, α 的取值不仅决定系统的记忆深度, 还直接触发临界稳定性转变。对于离散忆阻器, α 取不同值时具有不同的物理意义:

1) 当 $\alpha \rightarrow 1$ 时, 系统发生突发发散与边界危机。其物理机制在于, 此时漏积分通道完全关闭, 系统退化为传统的无损累加器, 非零均值激励导致的直流漂移突破收敛边界, 引发数值溢出。这一临界断裂现象从反面印证了引入受控遗忘因子以构建内禀能量耗散机制的必要性。

2) 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 系统呈现极端耗散与记忆缺失效应。此时忆阻器处于完全遗忘状态, 仅受外部输入信号影响, 丧失累加效应。因此 $\alpha \rightarrow 0$ 构成了系统维持忆阻混沌态的下限边界。

综上, 记忆调制因子虽不影响参数调制映射和附加耦合映射的动力学状态, 但取小于 1 的值能够有效抑制忆阻器内部状态变量的发散行为。

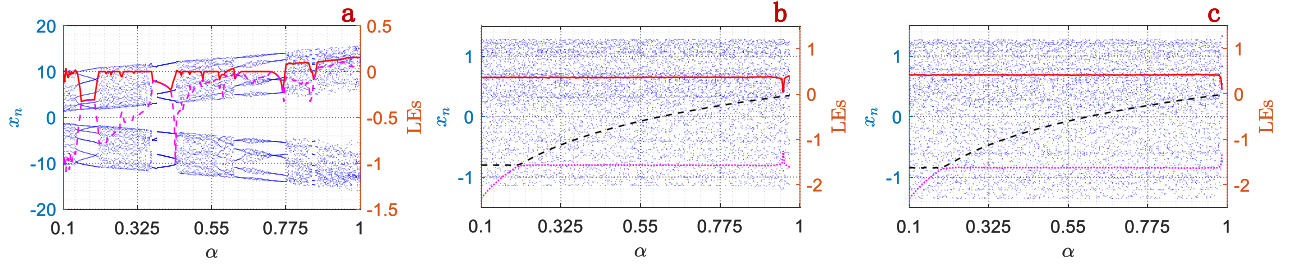


图 10: 不同离散忆阻混沌映射随参数 α 变化的动力学特性 (a) 忆阻自反馈映射 (11) (b) 参数调制模型 (13) (c) 附加耦合模型 (19)

Fig. 10. Dynamical characteristics of different discrete memristive chaotic maps with the variation of parameter α (a) Memristive self-feedback map (11) (b) Parameter modulation model (13) (c) Additional coupling model (19)

4.1.2 随参数 β 变化动力学特性

图 11 展示了三种系统随记忆调制因子 β 在0.1 至 0.5 区间内连续变化时, 系统状态变量 x_n 的分岔路径及对应的Lyapunov指数谱。其中, 对于自反馈系统, $\alpha = 0.9$, $\beta = 1.5 + \beta$ 以及 $k = 1.68$, 而对于参数调制映射以及附加耦合映射, $\alpha = 0.9$, $k = 0.1$ 。与记忆因子 α 作用不同, β 参数能够更多的影响系统动力学行为, 三系统都存在混沌状态与周期状态, 展现出丰富的动力学行为。特别是参数调制系统, 出现了随 β 变小的倍周期分岔行为。在实际系统中, β 参数用于调制忆阻器输出信号的幅度, 进而自然地动力学行为有影响。但是, 对于附加耦合模型, β 取值需要小于0.075。此时, 模型更多的保留原始系统的动力学特性。虽然记忆调制因子 α 能够降低系统发散的风险, 但是过大增益参数 β 仍然会破坏系统稳定性而最终导致发散。

4.1.3 随参数 k 变化动力学特性

图 12 (a) 展示了当控制增益 k 在0.2 至 2.0 区间内连续变化时, 系统状态变量 x_n 的分岔路径及对应的Lyapunov指数谱, 其中 $\alpha = 0.9$, $\beta = 1.68$ 。由图可见, 随着 α 增加, 系统始终处于超混沌状态, 因为系统具有两个正的指数谱。图 12 (b) 为参数调制映射在控制增益 k 在0 到1之间的动力学行为, 其中 $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.058$ 。可见, 在0 至 0.65 区间内分岔图轨迹显示系统总体为混沌状态, 且超过此区域后, 系统发散。基于同样的参数设置, 图 12 (c) 记录了模型随耦合增益 k 在0至1区间内变化的动力学演化。观察分岔图可以发现, 状态变量在 $k \in (0, 1]$ 整个扫描域内均呈现稠密的连续分布, 且始终存在一个正的指数谱, 表明系统处于混沌状态。

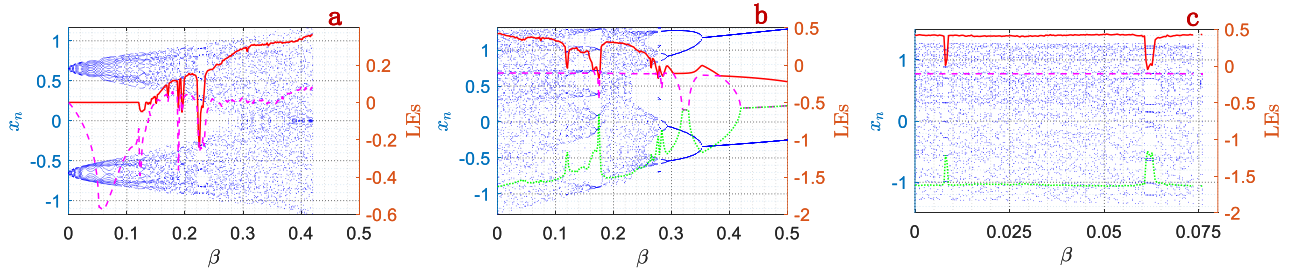


图 11: 不同离散忆阻混沌映射随参数 β 变化的动力学特性 (a) 忆阻自反馈映射 (11) (b) 参数调制模型 (13) (c) 附加耦合模型 (19)

Fig. 11. Dynamical characteristics of different discrete memristive chaotic maps with the variation of parameter β (a) Memristive self-feedback map (11) (b) Parameter modulation model (13) (c) Additional coupling model (19)

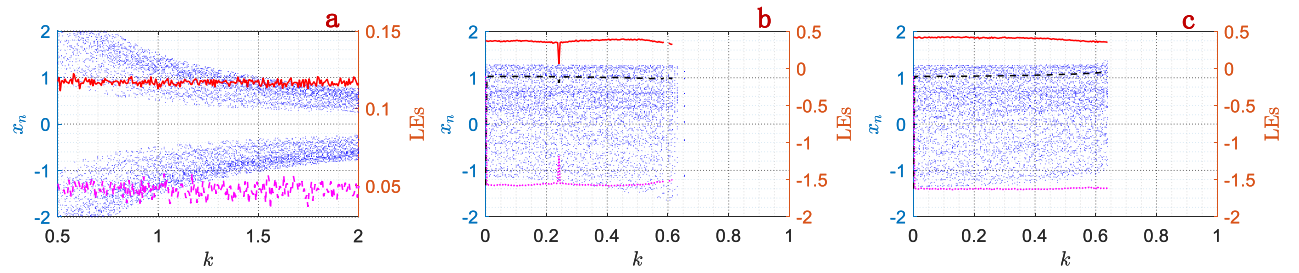


图 12: 不同离散忆阻混沌映射随参数 k 变化的动力学特性 (a) 忆阻自反馈映射 (11) (b) 参数调制模型 (13) (c) 附加耦合模型 (19)

Fig. 10. Dynamical characteristics of different discrete memristive chaotic maps with the variation of parameter k (a) Memristive self-feedback map (11) (b) Parameter modulation model (13) (c) Additional coupling model (19)

4.2 复杂度分析

4.2.1 算法描述

样本熵^[33]计算函数需输入嵌入维数 m 、相似容限度 r 以及混沌序列 $\{x_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ 。首先，将 x 转换为行向量并获取其长度 N ，然后将 r 与 x 的标准差相乘，作为实际的距离阈值。对于维数 m ，从序列中构建所有长度为 m 的子向量 $x_1(k) = [x(k), x(k+1), \dots, x(k+m-1)]$ ，其中 k 取值范围为从 1 到 $N - m + 1$ 。针对每个子向量，计算其与其他所有子向量（包含自身）的切比雪夫距离（即各对应坐标差绝对值的最大值），统计距离小于阈值的匹配个数，并减去自身匹配，进而得到每个子向量的匹配数。将所有子向量的匹配数相加，再除以 $(N - m - 1)$ 与 $(N - m)$ ，得到平均匹配概率 B_m 。之后，将维

数增加至 $m + 1$ ，重复上述构建和计数过程，得到 B_{m+1} 。最后，样本熵定义为 $-\ln(B_{m+1}/B_m)$ ，该值体现了序列的不规则程度：熵值越大，序列越复杂。

C_0 复杂度^[34]计算函数以一个混沌序列 $\{x_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ 与一个容限度 r 作为输入。首先，对序列 x 实施快速傅里叶变换，从而得到频域序列 Y ，并计算所有频点功率谱密度的均值 G_n ，即 G_n 为 $|Y|^2$ 各分量的平均值。随后，构建一个与 Y 长度相等的零向量 $\tilde{Y}$ ，对每一个频率点进行遍历，若该点的功率 $|Y(i)|^2$ 大于 $r \cdot G_n$ ，则将 $\tilde{Y}(i)$ 赋值为 $Y(i)$ ，反之则保持为零。此举旨在保留能量超过阈值的主要频率分量，滤除次要分量。接着，对 $\tilde{Y}$ 进行逆傅里叶变换，得到重构序列 $\hat{x}$ 。计算重构序列与原序列的误差平方和 $S = \sum (\hat{x}_i - x_i)^2$ ，并将其除以原序列的总能量 $\sum x_i^2$ ，以此得到 C_0 复杂度。若计算结果为非数值 (NaN)，则将其强制设定为 0 后输出。

4.2.2 复杂度测度与分析

所提出的三种类型的系统存在共同参数，分别为 k 、 α 与 β 。为使不同系统的复杂度计算结果能够统一于同一图，进行了部分参数调整。例如，对于自反馈系统，令 $\beta = \beta + 1.5$ 、 $k = k + 1.5$ 。因此，相应的结果与前文所述的分岔图及指数谱分析结果会略有差异。同时，参数 α 的变化范围设定为 0.1 至 1，步长值为 0.0036；参数 β 的变化范围为 0 至 0.5，步长值为 0.002；参数 k 的变化范围是 0 至 1，步长值为 0.004。此外，针对参数调制模型以及附加耦合模型，均选取以 x_n 驱动模型作为代表。

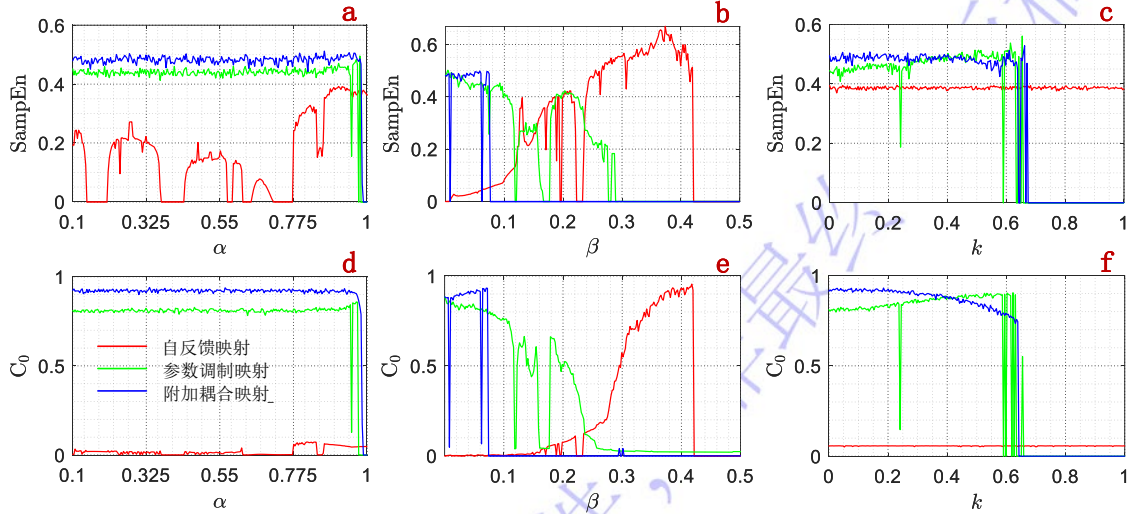


图 13: 不同系统在复杂度测度结果 (a) 自反馈映射 (b) 参数调制映射 (c) 附加耦合映射

Fig. 13. Different systems in terms of complexity measurement results (a) The self-feedback map (b) The parameter modulation map (c) The additional coupling map

首先，对各系统参数变化的复杂度进行了分析，其结果如图13所示。随着参数 α 的变化，附加耦合模

型呈现出更高的复杂度，而自反馈模型的复杂度最低；对于自反馈系统而言，随着 α 的变化，复杂度存在高低波动，而对于参数调制模型与附加耦合模型，在参数值接近1之前，并不影响系统状态，直至参数值接近1时，系统出现发散行为，复杂度测度值不存在或为零。当参数 β 发生变化时，自反馈系统的复杂度先升高后归零，而参数调制模型与附加耦合模型的变化趋势总体一致，当 β 取值较大时，系统复杂度最终均为零，因此， β 的值不宜过大。当 k 发生变化时，自反馈模型的复杂度总体保持不变，而另外两个系统在 $k > 0.6$ 之后出现系统发散而是的测度值归零。

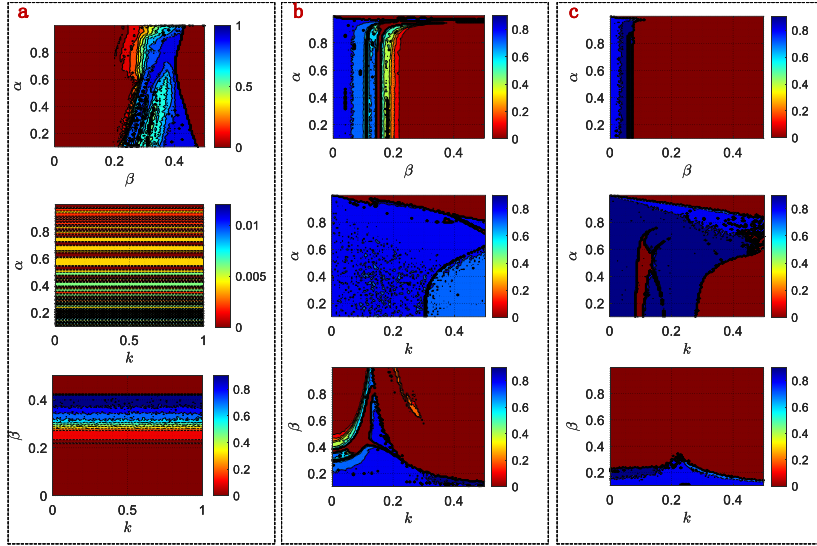


图 14: 不同系统在 $\beta - \alpha$ 平面、 $k - \alpha$ 平面、 $k - \beta$ 平面的二维复杂度混沌图 (a) 自反馈映射 (b) 参数调制映射 (c) 附加耦合映射

Fig. 14. The two-dimensional complexity chaotic diagrams of different systems in the $\beta - \alpha$ plane, $k - \alpha$ plane, and $k - \beta$ plane (a) The self-feedback map (b) The parameter modulation map (c) The additional coupling map

其次，鉴于 C_0 复杂度与样本熵测度结果在变化趋势上具有一致性，故采用 C_0 算法对系统在双参数变化时的动力学行为作进一步分析，其结果如图14所示。在 $\alpha - \beta$ 平面中，自反馈系统的 k 取值为1.6，参数调制系统与附加耦合系统的 k 取值为0.1；在 $\alpha - k$ 平面中，自反馈系统的 β 取值为1.558，参数调制系统与附加耦合系统的 β 取值为0.058；在 $\beta - k$ 平面中，自反馈系统的 α 取值为0.9，参数调制系统与附加耦合系统的 k 取值为0.1。在当前的颜色图设定下，蓝色区域为高复杂度区域，即对应系统的混沌区域。在实际应用中，需选取此类区域的参数。

4.3 与原始Hénon映射动力学特性对比分析

本文设计的参数调制离散忆阻Hénon映射与附加耦合离散忆阻Hénon映射与原始的Hénon映射存在共同的参数 a 与 b 。为了对比不同系统的复杂动力学行为，共同的系统参数 b 固定为0.3，分析三种系统随参数 a 变化时的动力学行为。对于参数调制离散忆阻Hénon映射与附加耦合离散忆阻Hénon映射，内部忆阻器参数 $\alpha = 0.9$ 、 $\beta = 0.058$ 、 $k = 0.1$ 。

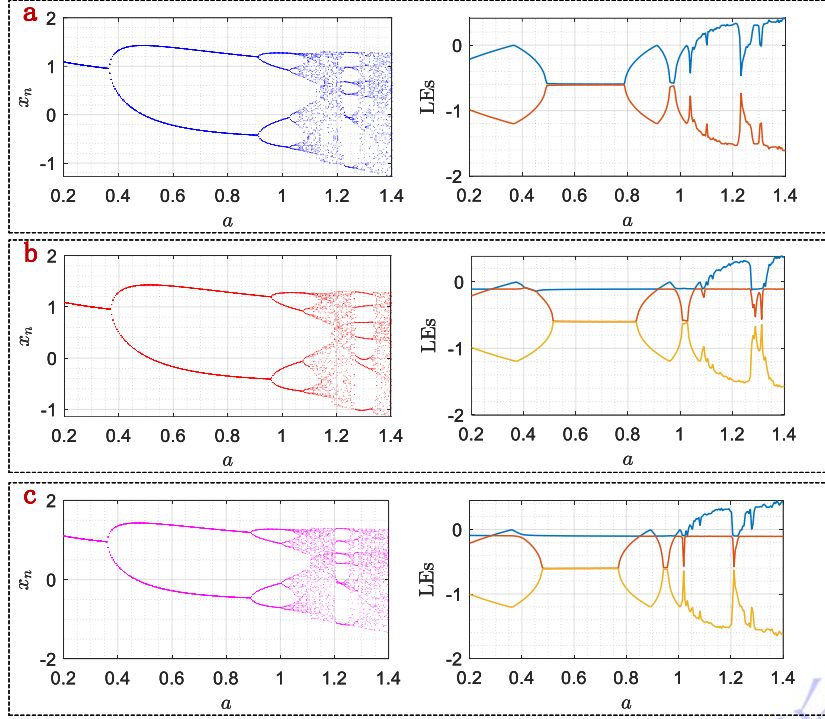


图 15: 参数调制离散忆阻Hénon映射以及附加耦合离散忆阻Hénon映射与原始Hénon映射的对比分析结果，暨基于随参数 a 变化的分岔图与指数谱 (a) 原始Hénon映射 (b) 参数调制离散忆阻Hénon映射 (c) 附加耦合离散忆阻Hénon映射

Fig. 15. The comparative analysis results of the parameter-modulated discrete memristive Hénon mapping and the additional-coupled discrete memristive Hénon mapping with the original Hénon mapping, along with the bifurcation diagrams and exponential spectra based on the variation of parameter a (a) Original Hénon mapping (b) Parameter-modulated discrete memristive Hénon mapping (c) Additional-coupled discrete memristive Hénon mapping

首先，基于分岔图与Lyapunov指数谱分析三种系统随参数 a 变化的动力学特性，其对比分析结果如图15所示。由图可知，三种系统都随着参数 a 的增加存在倍周期分岔并最终变化为混沌的行为。同时，分析可知，加入离散忆阻器后的系统的在混沌区域增加以及最大Lyapunov指数谱的取值方面都没有明显

优势，但是也没有退化状况。

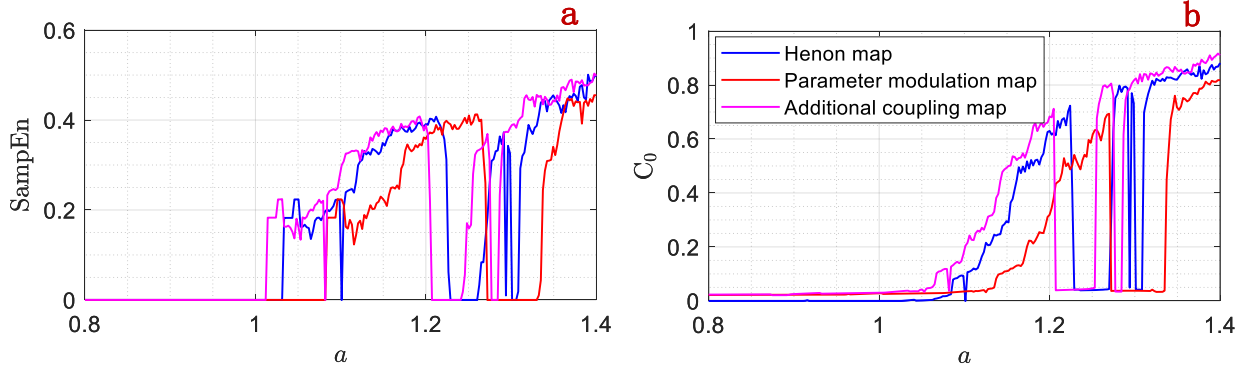


图 16: 参数调制离散忆阻Hénon映射以及附加耦合离散忆阻Hénon映射与原始Hénon映射的复杂度计算结果, 基于随参数 a 变化的复杂度测度值 (a) SampEn (b) C_0

Fig. 16. The complexity calculation results of the parameter-modulated discrete memristive Hénon map and the additional-coupled discrete memristive Hénon map, compared with the original Hénon map, are based on the complexity measure values that vary with parameter a (a) SampEn (b) C_0

其次，采用样本熵与 C_0 复杂度计算了参数 a 从0.8到1.4变化时的复杂度曲线，其结果如图16所示。由图可见，参数耦合模型复杂度测度值相对最小，而附加耦合模型复杂度测度值相对最大。但是，总体而言，引入离散忆阻器之后，复杂度测度结果也没有展现出明显的优势。

总体而言，从分析结果可知，通过参数调制与附加耦合，能够在一定程度上对原始 Hénon 映射的动力学行为产生扰动，然而新系统在性能方面并未呈现出显著优势。其一，本文引入离散忆阻的方式较为保守，要么对原始参数进行调制，要么相当于在系统中添加一个扰动项。但从动力学特性分析结果来看，系统会呈现出更为复杂的动力学特性。其二，本文旨在解决引入离散忆阻后出现的发散行为问题，而本文结果确实表明离散忆阻器内部具有稳定性，不受输入序列不平衡的影响。不过需要指出的是，尽管离散忆阻器具有内在稳定性，但并非绝对可靠。若新系统本身会发散，最终也会发散，这需遵循非线性系统的相关规律。

5 模拟电路仿真与验证

为验证上一章所提出的附加耦合型离散忆阻混沌系统的物理可实现性，本节针对该数学模型开展模拟电路设计。构建基于模拟器件的离散忆阻硬件系统，具体实现目标为上述设计的离散忆阻以及公式(20)所示的附加耦合离散忆阻Hénon映射。为实现特定的混沌动力学行为，将目标系统的模型参量设定

如下： $a = 1.4$ ， $b = 0.3$ ； 忆阻器的关键参数设定为 $\beta = 0.058$ ， 输入增益 $k = 0.98$ ， 遗忘因子 $\alpha = 0.918$ 。

5.1 离散迭代模拟电路设计方法

在模拟电路中实现离散时间动力学系统， 首要解决的核心难题在于如何利用连续运行的物理器件精确模拟数学上的离散迭代过程， 即实现状态变量从 n 时刻到 $n + 1$ 时刻的瞬态跳变与稳态暂存。 为此， 我们首先构建了基于采样保持器（Sample-and-Hold, S/H）的精密时序控制单元^[30]。 如图 17 所示， 该单元的核心由专用芯片 LF398 构成， 并采用一对受反相时钟信号驱动的 S/H 模块级联而成。 在时钟信号的严格控制下， 系统形成了一个模拟移位寄存器： 当前级模块处于“追踪”模式以实时捕获输入信号 x_n 时， 后级模块被强制锁定在“保持”模式， 从而稳定输出上一时刻的数值 x_{n-1} 。 这种严密的时序交错机制在连续的模拟电压流中分离出了精确的离散时间窗口， 从而为后续差分方程的硬件求解提供了物理基础。

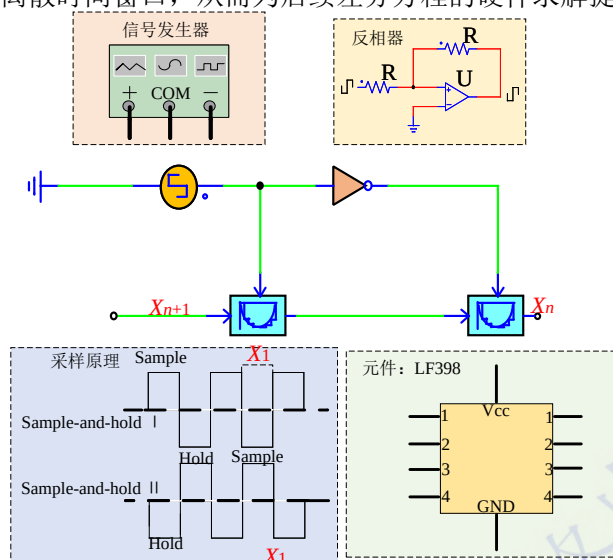


图 17: 基于采样保持电路的离散迭代系统模拟电路设计原理图

Fig.17. Schematic diagram of analog circuit design for discrete iterative systems based on sample-and-hold circuits

5.2 离散忆阻器模拟电路设计

基于上述时序控制策略， 我们将理论层面构建的 FM-DM 数学模型转化为具体的物理实体。 其关键在于如何利用模拟器件的电气特性来精确复现“记忆衰减”机制与非线性乘积运算。 为此， 我们设计了如图 18 所示的电路单元。 依据基尔霍夫电流定律， 对运算放大器反相输入端进行节点电流分析， 可推导出该

模块端口物理量的传输特性：

$$\begin{cases} i_n = \frac{R_{13}}{R_{12}} \left(\frac{R_5}{R_4} q_n^2 - \frac{R_5}{R_{10}} \right) v_n \\ q_{n+1} = \frac{R_7 R_2}{R_6 R_3} q_n + \frac{R_9 R_2}{R_8 R_1} v_n \end{cases} \quad (25)$$

电路参数与模型参数存在显式的解析对应关系，即 $\alpha = \frac{R_7 R_2}{R_6 R_3}$ ， $k = \frac{R_9 R_2}{R_8 R_1}$ ，忆导系数 $\beta = \frac{R_{13}}{R_{12}}$ ，且直流偏置项需满足 $\frac{R_5}{R_{10}} = 1$ 。需要指出的是，为适应模拟电路的信号处理与测量机制，理论模型中表征忆阻器电流的物理量 i_n 在电路仿真与实际硬件中均以等比例的电压信号进行输出，二者在动力学演化上完全等效。为了在硬件电路中精确复现 FM-DM 模型的动力学特性，我们依据上述确立的解析映射关系对各无源元件进行了参数整定。以实现遗忘因子 $\alpha = 0.918$ 为例，选定基准电阻 $R_1 \sim R_6$ 、 R_8 、 $R_{10} \sim R_{12}$ 的阻值均为 $10\text{k}\Omega$ 。基于此基准，反馈电阻 R_7 被精细调节至 $9.18\text{k}\Omega$ ，从而通过阻抗比值 R_7/R_6 精确设定了系统的记忆衰减率。同时，输入耦合电阻 R_9 设定为 $9.8\text{k}\Omega$ ，以匹配预设的增益系数 k 。

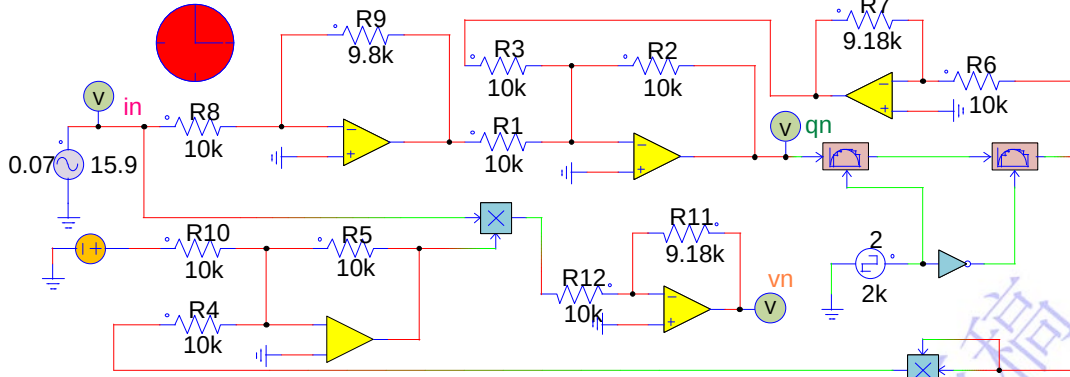


图 18: 基于 PSIM 平台搭建的 FM-DM 模块验证电路。

Fig. 18. The verification circuit of the FM-DM module built based on the PSIM platform.

图 18 展示了基于 PSIM 平台搭建的 FM-DM 模块底层验证电路。该拓扑结构并非简单的元件堆砌，而是对前述状态更新方程的模拟同态映射。核心运算逻辑由精密运算放大器 AD711 与四象限模拟乘法器 AD633 协同完成。特别地，为了在硬件层面实现关键的遗忘因子 α ，我们摒弃了复杂的数字控制回路，转而巧妙利用积分电路中的自然泄漏效应。具体而言，通过精细调节反馈电阻与输入路径电阻的阻抗比值，即可在充放电过程中设定状态变量的指数衰减率，从而实现对历史记忆的可控遗忘。将上述参数代入电路后，在给定频率的正弦电压激励下，系统输出的离散伏安特性曲线如图 19 所示。结果呈现出频率依赖迟滞回线，且波形表现出由双级采样保持机制带来的离散阶梯状特征，验证了该离散忆阻器电路设计的有效性与理论模型的正确性。需要指出的是，本电路模拟的是信号 i_n 与信号 v_n 之间的关系，并不一定是传统意义上忆阻器电流与电压的关系，以及内部存在离散电荷这一概念。在这一电路中，实际上所有的信

号被转换为电压信号及其相关运算。

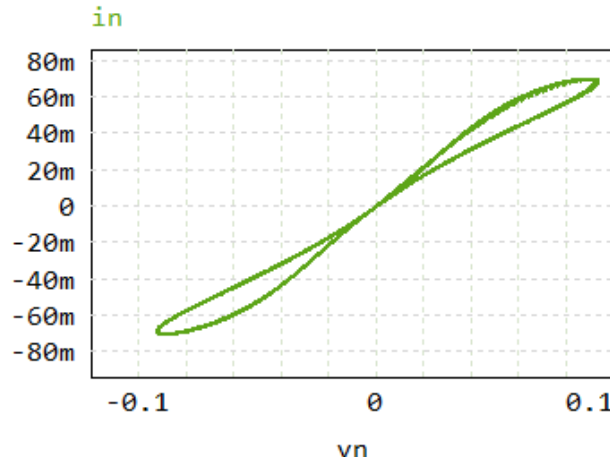


图 19: FM-DM 电路输出的离散伏安特性迟滞回线.

Fig. 19. The hysteresis loop output by the FM-DM circuit.

需要指出的是，离散忆阻的物理本质与经典连续忆阻存在本质性差异。在传统连续忆阻器中，器件的瞬时电阻由内部状态变量，即通常为通过器件的电荷总量的连续积分而进行实时调控，其核心在于电荷累积对导电通道或势垒的电磁调制。而本文所涉及的离散忆阻的实现并不依赖内部电荷对阻值的直接调控。在采样保持电路架构下，离散忆阻实际上描述的是不同时间节点上电压信号之间的代数映射关系：当前时刻的输出电压由前一时刻的输入电压、状态电压以及若干可调参数（如遗忘因子 α 、耦合强度 k 、非线性增益 β 等）通过离散迭代方程共同确定，并不存在一个在物理意义上连续变化的“忆阻值”实体，而是以信号处理层面的记忆与非线性变换功能取而代之。因此，离散忆阻可被视作对经典忆阻器动力学行为的一种功能等效映射：它保留了“由历史输入决定当前响应”这一核心记忆特征，但在物理实现上避免了对内部电荷积分与阻值连续调制的依赖，直接构建离散电压信号之间的非线性传递关系。这一特性使离散忆阻更符合数字或混合信号处理系统的时序逻辑，也为在无需实际忆阻器件材料工艺的条件下于电路层次复现忆阻混沌动力学行为提供了可行的物理载体。

5.3 离散忆阻混沌映射电路设计与实现

将上述独立的FM-DM单元作为一个非线性反馈内核，嵌入至经典的离散映射中，构建了如图 20 所示的完整的忆阻Hénon混沌电路系统，其物理量的传输特性如下

$$\begin{cases} y_{n+1} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} x_n \\ q_{n+1} = \frac{R_{39}}{R_{38}} \left(\frac{R_6 R_8 R_{38}}{R_5 R_7 R_{35}} q_n + \frac{R_2 R_4 R_{36}}{R_1 R_3 R_{34}} x_n \right) \\ x_{n+1} = \frac{R_{29} R_{33}}{R_{31} R_{32}} \left(\frac{R_{24} R_{26}}{R_{23} R_{28}} - \frac{R_{14} R_{24} R_{26}}{R_{13} R_{21} R_{25}} x_n^2 \right) + \frac{R_{29} R_{33}}{R_{27} R_{32}} \left(\frac{R_{29} R_{33}}{R_{28} R_{32}} y_n + \right. \\ \left. \frac{R_2 R_4 R_{16} R_{18} R_{42} R_{45}}{R_1 R_3 R_{15} R_{17} R_{41} R_{44}} q_n^2 x_n - \frac{R_{20} R_{42} R_{45}}{R_{19} R_{40} R_{44}} y_n \right) \end{cases} \quad (26)$$

基于前述电路状态方程与数学模型的系数比对，我们确定了忆阻Hénon系统的完整电路参数配置。系统中绝大多数电阻元件（ $R_1, R_3, R_4, R_5, R_7, R_9, R_{11}, R_{13}, R_{15}$ 及其他“未特指电阻”）均统一取值为基准阻值 $10\text{k}\Omega$ 。为了精确复现目标动力学行为，关键节点的电阻进行了精密整定： R_2 设定为 $3\text{k}\Omega$ ， R_{16} 设定为 $0.58\text{k}\Omega$ ，分别用于调节Hénon映射的线性参数 b 及忆阻反馈增益；反馈电阻 R_6 精确调整至 $9.18\text{k}\Omega$ 以锁定遗忘因子 α ；输入耦合电阻 R_{10} 取值为 $9.8\text{k}\Omega$ 以设定耦合强度；参数控制电阻 R_{14} 则设定为 $14\text{k}\Omega$ 以对应系统非线性参数 $a = 1.4$ 。另外，电路中其他电阻以及元器件的相关描述见表1，即上述参数组合确保了电路在模拟域中能够高保真地执行离散混沌迭代。

表 1: 离散忆阻混沌映射模拟电路主要元器件参数表

元件标号	阻值/型号	物理意义与功能标号
未特指电阻	$10\text{k}\Omega$	基准定值电阻
R14	$14\text{k}\Omega$	调节非线性控制参数 a
R2	$3\text{k}\Omega$	调节线性参数 b
R6	$9.18\text{k}\Omega$	设定遗忘因子 α
R10	$9.8\text{k}\Omega$	设定耦合强度 k
R16	$0.58\text{k}\Omega$	设定非线性微扰增益 β
AD711	—	精密运算放大器
AD633	—	四象限模拟乘法器
LF398	—	精密采样保持芯片

由于物理传输方程包含了大量的级联运算放大器与信号调理网络，导致原状态方程中堆积了极其繁

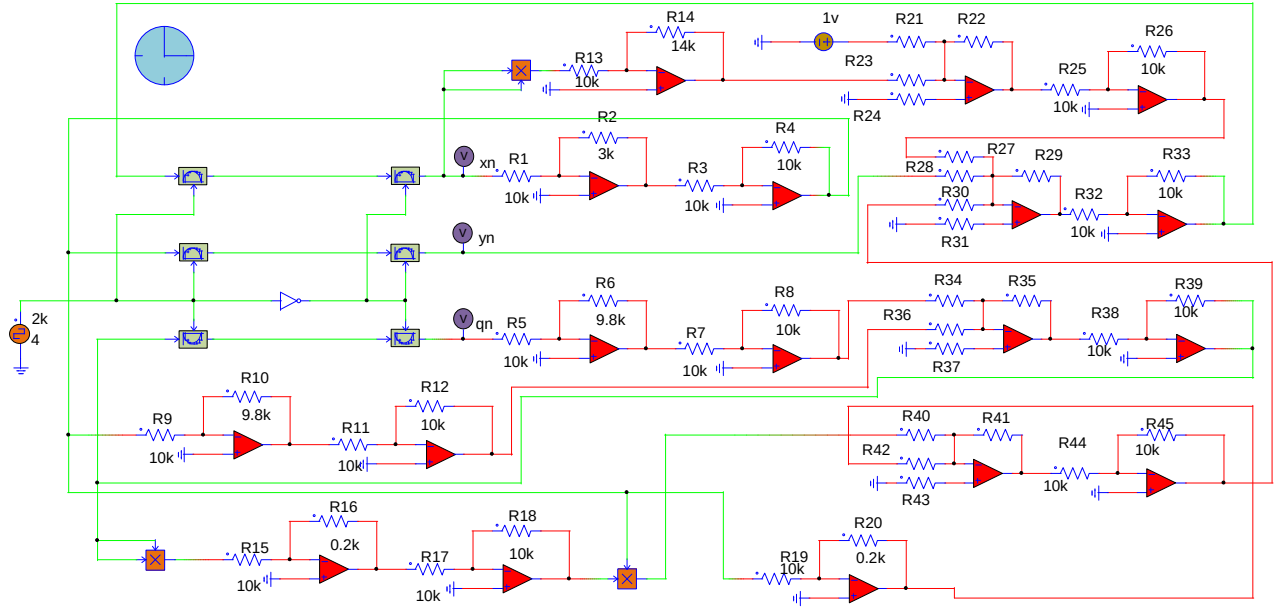


图 20: 一种离散忆阻混沌映射电路图

Fig. 20. A circuit diagram of a discrete memristor chaotic mapping

冗的电阻比例项。这种复杂的代数结构不仅极大增加了硬件电路的设计难度，也极易因元器件固有的容差产生显著的累积误差。为此，本文基于阻抗匹配原则对电路拓扑及其传输方程进行了深度化简。其核心优化策略是：将运算放大器链路中仅起信号传递、倒相或基础相加作用的非关键电阻，统一设定为相同的基准阻值（统一定为 $10\text{k}\Omega$ ），使得这些冗余的增益比值在代数推导中精确抵消为 1。经过消除冗余项并提取关键控制节点后，该混沌电路系统的物理量传输特性被大幅精简为如下形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = \frac{R_2}{R_1} x_n \\ q_{n+1} = \frac{R_6}{R_5} q_n + \frac{R_{10}}{R_9} x_n \\ x_{n+1} = 1 - \frac{R_{14}}{R_{13}} x_n^2 + y_n + \frac{R_{16}}{R_{15}} (q_n^2 - 1) x_n \end{cases} \quad (27)$$

基于上述精简后的电路状态方程，系统无源器件与数学模型参数之间的解析对应关系变得极其直观，即：线性参数 $b = \frac{R_2}{R_1}$ ，遗忘因子 $\alpha = \frac{R_6}{R_5}$ ，忆阻输入增益 $k = \frac{R_{10}}{R_9}$ ，非线性参数 $a = \frac{R_{14}}{R_{13}}$ ，以及忆阻反馈增益 $\beta = \frac{R_{16}}{R_{15}}$ 。为了在模拟域中精确复现目标动力学行为，我们依据上述简化关系对关键节点的电阻进行了精密整定。将分母端电阻（ R_1 、 R_5 、 R_9 、 R_{13} 、 R_{15} ）以及其他未特指的辅助电阻均统一取值为基准阻值 $10\text{k}\Omega$ 。在此基础上： R_2 设定为 $3\text{k}\Omega$ ， R_{16} 设定为 $0.58\text{k}\Omega$ ，分别用于调节 Hénon 映射的线性参数 b 及忆阻反馈增益 β ；反馈电阻 R_6 精确调整至 $9.8\text{k}\Omega$ 以锁定遗忘因子 α ；输入耦合电阻 R_{10} 取值为 $9.8\text{k}\Omega$ 以设定耦合强度 k ；参数控制电阻 R_{14} 则设定为 $14\text{k}\Omega$ 以对应系统非线性参数 $a = 1.4$ 。上述极简的参数

组合不仅大幅降低了硬件实施难度，更配合双级采样保持模块确保了离散混沌迭代的高保真执行。

该系统集成了非线性运算单元与前述的双级采样保持模块，形成了一个闭环反馈系统。电路中的线性加法与减法运算由反相加法器阵列承担，而非线性项则通过模拟乘法器实现。值得注意的是，为了匹配模拟器件的线性动态范围并防止常见的饱和溢出，我们在设计阶段对所有状态变量进行了幅度缩放，确保信号始终处于有源器件的线性工作区内，从而保证了混沌信号的完整性。为了进一步剖析电路输出信号的动力学品质，图21给出了忆阻Hénon系统状态变量的时域波形、稳态相图及频域特性分析。

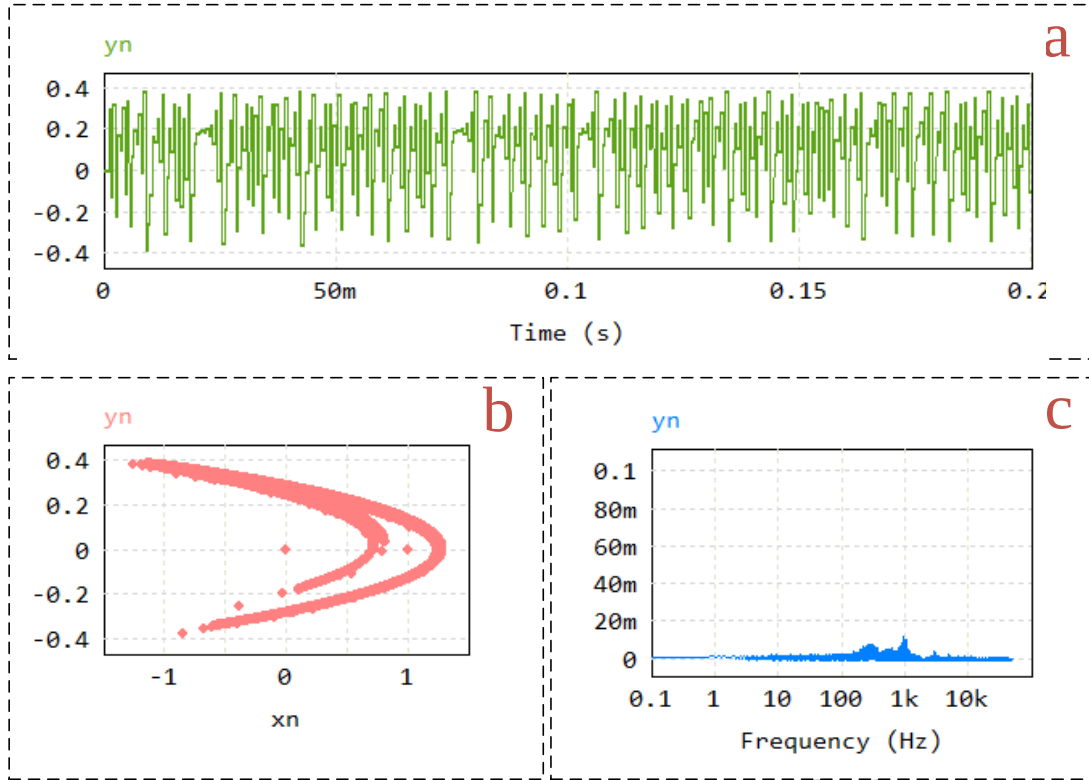


图 21: 设计的混沌离散电路的仿真结果

Fig.21.Simulation results of the designed chaotic discrete circuit

图 21 (a)描绘了系统输出电压 y_n 随时间演化的时域波形。在双级采样保持模块的时序交错控制下，模拟电压流中分离出了精确的离散时间窗口，信号呈现出显著的离散阶梯状演化过程。可以看出，该波形具有明显的非周期性与伪随机特性，且幅度始终稳定在 $\pm 0.4V$ 的线性工作区间内，这再次印证了电路设计的动态范围缩放策略的有效性，避免了非线性失真。图 21 (b)为电路输出端口捕获的 x_n 、 y_n 稳态相图。电路仿真生成的吸引子轨迹在几何形态与拓扑结构上与数值模拟结果保持了高度的一致性，清晰地呈现了Hénon映射典型的自相似分形特征以及复杂的折叠与拉伸结构。更为关键的是，电路实验结果直观地证实了FM-DM模型的稳定性。由于电路中反馈电阻与输入路径电阻的阻抗匹配精确地实现了遗忘因子 α 的

物理映射，为系统引入了必要的耗散机制，吸引子轨迹被严格限制在特定的电压范围内，并未出现任何单向漂移或发散迹象。图 21 (c)展示了该混沌信号的宽频频谱特性。从频谱图中可以观察到，输出信号具有连续的宽带频谱特性，不存在明显的主导离散谱线。这种能量在频域上的弥散分布是混沌信号区别于周期信号与准周期信号的指纹特征，表明硬件系统产生的序列具有极高的复杂度与不可预测性。特别是平坦的宽带特性，意味着该硬件系统能够作为一种优质的高熵源，在混沌保密通信与硬件随机数生成领域具有重要的工程应用价值。

6 结论

本研究聚焦于传统离散忆阻系统因理想累加特性所引发的状态发散问题，提出一种具备记忆调制机制的有限记忆离散忆阻器模型。在状态演化方程里引入受控遗忘因子后，该模型于离散动力系统中构建起内在的能量耗散与平衡机制，从本质上克服了非零均值激励下的数值溢出弊端，达成了系统状态的全局有界收敛。基于此模型，本研究分别搭建了忆阻自反馈、参数调制和附加耦合三种混沌演化架构。动力学分析显示，记忆调制机制不仅有效消除了原系统的大范围周期窗口，还极大增强了系统的复杂性。系统能够输出高带宽、高复杂度的伪随机序列，显著拓展了有效密钥空间，为构建抗攻击能力更强的新一代保密通信系统提供了优质的候选模型以及设计方法。此外，本研究设计了基于双级采样保持技术的离散迭代模拟电路，成功在连续时间物理域中实现了离散系统的硬件映射。电路仿真结果以高保真度复现了理论预测的相空间分形结构，未出现任何饱和失真现象，从硬件底层验证了该模型抑制状态发散的物理有效性与鲁棒性。

尽管本文在抑制离散忆阻系统发散方面取得了初步成果，但在实际工程应用中仍存在一定的局限性。一方面，模拟电路在高频时钟激励下，受限于运算放大器的有限带宽与压摆率，可能会引入非预期的相位延迟，进而引起系统动力学特性的偏移；另一方面，硬件电路中无源元器件的固有容差会导致参数取值出现漂移，这在临界发散区域可能对系统的绝对稳定性产生影响。针对所述局限，未来的工作将围绕以下方向展开。首先，在工程实现层面，致力于开展基于印刷电路板的硬件实物制备与测试，重点探究真实物理器件中寄生参数与热噪声对系统鲁棒性的影响，并设计相应的自适应补偿策略。其次，鉴于所设计的忆阻模型遗忘机制与生物突触的学习机制存在高度相似性，未来将尝试将其作为突触节点引入脉冲神经网络或储备池计算架构中，探索其在增强网络时空模式识别能力方面的潜在价值。

参考文献

- [1] Chua L 1971 *IEEE Trans. Circuit Theory* **18** 507
- [2] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, et al. 2008 *Nature* **453** 80
- [3] Adhikari S P, Sah M P, Kim H, Chua L O 2013 *IEEE Trans. Circuits Syst. I-Regul. Pap.* **60** 3008
- [4] Gong Y C, Ming J Y, Wu S Q, et al. 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 207302 (in Chinese) [贡以纯, 明建宇, 吴思齐, 等 2024 物理学报 **73** 207302]
- [5] Ma M L, Yang Y, Qiu Z C, et al. 2022 *Nonlinear Dyn.* **107** 2935
- [6] Xu B, Zou S T, Bai L B, et al. 2024 *Nonlinear Dyn.* **112** 1395
- [7] Fu L X, He S B, Wang H H, Sun K H 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 030501(in Chinese) [扶龙香, 贺少波, 王会海, 孙克辉 2022 物理学报 **71** 030501]
- [8] Wang C, Chong Z L, Zhang H L, et al. 2024 *Integration* **96** 102138
- [9] Deng Q L, Wang C H, Yang G 2026 *Acta Phys. Sin.* **75** 010003 (in Chinese) [邓全利, 王春华, 杨港 2026 物理学报 **75** 010003]
- [10] Ren L J, Mou J, Banerjee S, et al. 2023 *Chaos Solitons Fract.* **167** 113024
- [11] Feali M S 2025 *Chaos Solitons Fract.* **196** 116480
- [12] Wang J, Gu Y, Rong K, et al. 2022 *Mathematics* **10** 3426
- [13] Li C L, Yang Y Y, Yang X B, et al. 2022 *Eur. Phys. J. Special Topics* **231** 3209
- [14] Bao B C, Rong K, Li H Z, et al. 2021 *IEEE Trans. Circuits Syst. II-Express Briefs* **68** 2992
- [15] Peng Y X, Sun K H, He S B 2020 *Chaos Solitons Fract.* **137** 109873
- [16] Lai Q, Lai C 2022 *IEEE Trans. Circuits Syst. II-Express Briefs* **69** 2331
- [17] Yuan F, Xing G, Deng Y 2023 *Chaos Solitons Fract.* **166** 112888
- [18] Peng Y X, He S B, Sun K H 2021 *Aeu-Int. J. Electron. C.* **129** 153539

- [19] Lu Y M, Wang C H, Deng Q L 2022 *Network-Comp Neural* **33** 214
- [20] Wang L L, Gao H, Li C B, et al. 2025 *Eur. Phys. J. Special Topics* **234** 8441–8455
- [21] Xu Q, Wang Y T, Wu H G, et al. 2024 *Chaos Solitons Fract.* **179** 114458
- [22] Shatnawi M T, Abbas A, Ouannas A, et al. 2023 *Phys. Scr.* **98** 035213
- [23] Vignesh D, He S B, Banerjee S 2026 *Nonlinear Dyn.* **114** 226
- [24] He S B, Liu J, Wang H H, et al. 2023 *Neurocomputing* **523** 1
- [25] He S B, Peng Y X, Wang H H, et al. 2025 *Nonlinear Dyn.* **113** 28119
- [26] Laskaridis L, Volos C, Giakoumis A E, et al. 2025 *Electronics* **14** 311
- [27] Fu L X, Wu X M, He S B, et al. 2023 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **71** 9668
- [28] Boriskov P 2024 *Nonlinear Dyn.* **112** 3917
- [29] Rodriguez-Vazquez A, Huertas J L, Rueda A, et al. 1987 *Proc. IEEE* **75** 1090
- [30] Huang Q L, Chen J F, Peng J H 2003 *Phys. Exper.* **23** 22 (in Chinese) [黄秋楠, 陈菊芳, 彭建华 2003 物理实验 **23** 22]
- [31] Chen L, Li C D, Huang T W, et al. 2013 *Phys. Lett. A* **377** 3260
- [32] Shi F, Wang K H, Cao Y H, et al. 2025 *Neural Networks* **195** 108291
- [33] Sun K H, He S B, Yin L Z, et al. 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 130507 (in Chinese) [孙克辉, 贺少波, 尹林子, 等 2012 物理学报 **61** 130507]
- [34] Cai Z J, Sun J 2009 *Int. J. Bifur. Chaos* **19** 977

A Discrete Memristor with Memory Modulation Mechanism and Its Application in Divergence Suppression of Chaotic Maps*

ZHANG Zijian ¹⁾ HE Shaobo^{1)†} WU Xianming²⁾

1) (*School of Automation and Electronic Information, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China.*)

2) (*School of Mechanical and Electrical Engineering, Guizhou Normal University, Guiyang, 550025, Guizhou, China.*)

Abstract

This study addresses the critical issue of state divergence in discrete memristors under non-zero mean excitation, a fundamental limitation arising from the unbounded accumulation characteristic of conventional discrete memristor models. To fundamentally overcome this challenge, we propose a finite-memory discrete memristor (FM-DM) model incorporating a novel memory modulation mechanism. By embedding a controllable forgetting factor $0 < \alpha < 1$ into the state evolution equation, the conventional full accumulation operation is transformed into a leaky integration process. This introduces an intrinsic energy dissipation and dynamic equilibrium mechanism, which mathematically guarantees the bounded convergence of the internal memristor state under arbitrary input signals, including those with persistent DC components. The proposed model retains the essential nonlinear memory features and the frequency-dependent pinched hysteresis fingerprint of ideal memristors while fundamentally eliminating the risk of numerical overflow or attractor collapse.

* National Natural Science Foundation of China (Grant Nos.: 62501516, 62071496, 62061008), Hunan Provincial Natural Science Foundation (Grant No.: 2025JJ50391)

† Corresponding author. E-mail: hshaobo_123@163.com

The First Author. E-mail: 202305571628@smail.xtu.edu.cn

Building upon the FM-DM model, three universal chaotic evolution architectures are systematically constructed: a pure memristive self-feedback map, a parameter-modulated Hénon map, and an additively coupled Hénon map. In each architecture, the memristor’s internal state serves as a dynamical variable that interacts with the host chaotic system. Comprehensive dynamical analyses—including bifurcation diagrams, Lyapunov exponent spectra, phase portraits, and complexity measures (sample entropy and C_0 complexity)—demonstrate that the introduction of the FM-DM module not only suppresses state divergence but also significantly enriches the system’s nonlinear dynamics. The memory modulation mechanism effectively eliminates large periodic windows, enhances topological dimensionality, and induces high-dimensional hyperchaotic behaviors with improved pseudorandomness and complexity over a wide range of system parameters.

To validate the physical realizability and hardware robustness of the proposed model, an analog discrete-time circuit is designed using dual-stage sample-and-hold technology. This circuit architecture precisely emulates the discrete iterative operations in the continuous-time voltage domain. The FM-DM module and the complete chaotic map are implemented using operational amplifiers (AD711), analog multipliers (AD633), and precision sample-and-hold ICs (LF398). PSIM-based circuit simulations faithfully reproduce the numerically predicted phase-space attractors and fractal structures. All state variables remain strictly confined within the linear operating range of the active components, exhibiting no saturation, distortion, or unbounded drift. The output signals feature a broad continuous spectrum and high entropy, confirming the physical effectiveness and stability of the proposed approach.

In conclusion, this work resolves the long-standing divergence bottleneck in discrete memristive chaotic systems by reconstructing the internal memory mechanism rather than imposing external constraints. The FM-DM model provides a robust and physically realizable framework for designing high-dimensional discrete memristive chaotic maps, offering significant potential for applications in chaotic secure communications, pseudorandom number generation, and hardware-accelerated neuromorphic computing. Future work will focus on PCB-level hardware implementation and the integration of FM-DM as a synaptic unit into spiking neural networks and reservoir computing architectures.

Keywords: Chaos; Discrete memristor; Memory modulation; Dynamics; Analogue Circuit